M. A.

# An Elementary Treatise on Statics (Higher).

by

S. L. LONEY.

سکونیات ( اعلیٰ )

ترجمہ

مولوی شیخ برکت علی، ایم - اے۔

سلسلۂ نصابِ تعلیم جامعۂ عثمانیہ

# سکونیات اعلیٰ

تصنیف

پروفیسر ایس۔ ایل۔ لونی ایم۔ اے

ترجمہ

مولوی شیخ برکت علی صاحب ایم۔ اے (عثمانیہ)

پروفیسر ریاضی کلیۂ جامعۂ عثمانیہ حیدرآباد دکن

سنہ ۱۳۵۱ھ م سنہ ۱۳۴۱ف م سنہ ۱۹۳۲ء

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکارِ عالی حیدرآباد دکن

# فہرست مضامین

## سکونیات اعلیٰ

| صفحہ | مضمون |
| --- | --- |


### پہلا باب

تمہید۔ ایک نقطہ پر عمل کرنیوالی قوتوں کی ترکیب و تحلیل ۱

ایک ذرہ کا تعادل ایک چکنے منحنی پر ۲۲

### دوسرا باب

متوازی قوتیں۔ معیار اثر۔ جفت ۲۷

### تیسرا باب

ہم مستوی قوتوں کے زیر عمل استوار جسم کا توازن ۵۳

اچھل توازن ۷۴

### چوتھا باب

| مضمون | صفحہ |
| --- | --- |
| رگڑ | ۸۰ |
| ایک ذرہ کا توازن ایک کھردرے منحنی پر | ۹۰ |

## پانچواں باب

| مضمون | صفحہ |
| --- | --- |
| کام۔ موہوم کام | ۱۱۶ |
| موہوم کام کے اصول کا ثبوت ایک ہم مستوی نظام کے لئے | ۱۳۲ |

## چھٹا باب

| مضمون | صفحہ |
| --- | --- |
| ترسیمی حل | ۱۴۶ |

## ساتواں باب

| مضمون | صفحہ |
| --- | --- |
| جزئی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر | ۱۸۰ |
| ترسیمی عمل جھکاؤ کے معیار اثروں کے لئے | ۱۹۷ |

## آٹھواں باب

| مضمون | صفحہ |
| --- | --- |
| مرکز ثقل | ۲۰۳ |
| کسی قوس کا مرکز ثقل | ۲۱۷ |
| کسی مستوی رقبہ کا مرکز ثقل | ۲۲۲ |
| کسی گردشی سطح یا گردشی مجسم کا مرکز ثقل | ۲۳۲ |
| کسی حجم کا مرکز ثقل | ۲۳۸ |
| کسی کروی مثلث کا مرکز ثقل | ۲۴۵ |
| پپے پس کے مسئلے | ۲۴۷ |

## نواں باب

| مضمون | صفحہ |
|---|---|


قائم اور غیر قائم تعادل ۲۵۰

## دسواں باب

تین ابعاد میں قوتیں ۲۷۳
تعادل کی عام شرطیں ۲۷۷
موہوم کام کے اصول کا ثبوت قوتوں کے کسی نظام کے لئے ۲۹۶
کام کا تفاعل ۳۰۳
قائم اور غیر قائم تعادل ۳۰۷

## گیارہواں باب

تین ابعاد میں قوتیں (مسلسل) ۳۱۲
پائن سو کا مرکزی محور ۳۱۲
دو معلومہ ریخوں کا حاصل ریخ ۳۲۷
اسطوانہ نما ۳۳۳
مثکافی پیچ ۳۴۲
صفری خطوط اور صفری مستوی سطحیں ۳۴۳

## بارہواں باب

مشینیں ۳۵۲
بیرم ۳۵۴
چرخیاں ۳۵۱
چرخ اور محور ۳۶۵
معمولی ترازو ۳۷۱
تک ۳۷۵

| مضمون | صفحہ |
|---|---|
| پیچ | ۳۷۸ |
| فانہ | ۳۸۳ |
| مشین کی استعداد | ۳۸۵ |
| مشین کا کلیہ | ۳۸۹ |

## تیرہواں باب


| | |
|---|---|
| رسیوں اور زنجیروں کا تعادل | ۳۹۴ |
| سادہ زنجیرہ | ۳۹۴ |
| معلق پلوں کا قطع مکافی | ۴۱۰ |
| ایک رسی کے تعادل کی عام شرطیں | ۴۱۴ |
| یکساں طاقت کا زنجیرہ | ۴۱۶ |
| چکنی سطحوں اور منحنیوں پر رسیاں | ۴۱۸ |
| کھردرے منحنیوں پر رسیاں | ۴۲۷ |
| مرکزی قوتوں کے زیر عمل رسیاں | ۴۳۴ |
| قابل کھنچاؤ رسیاں | ۴۴۰ |


## چودہواں باب


| | |
|---|---|
| کشش اور قوہ | ۴۶۱ |
| ایک پتلی سلاخ کی کشش | ۴۶۲ |
| مستدیر تختی | ۴۶۸ |
| ایک پتلی کشش کرنیوالی سطح میں سے گزرنے میں کشس کی تبدیلی | ۴۶۹ |
| پتلے کروی خول اور ٹھوس کرہ | ۴۷۷ |
| سطح مرتفع پر جاذبہ ارض کی قیمت | ۴۸۳ |
| تجاذب کے مستقل کی قیمت | ۴۸۴ |

| مضمون | صفحہ |
|---|---|
| قوہ | ۴۹۲ |
| ایک پتلی سلاخ کا قوہ | ۴۹۷ |
| پتلے کروی خول اور ٹھوس کرہ | ۵۰۳ |
| **پندرھواں باب** | |
| کشش اور قوہ (مسلسل) | ۵۲۲ |
| مادی کشش کا سطحی تکملہ | ۵۲۲ |
| لاپلاس اور پوائن سو کی مساواتیں | ۵۲۶ |
| مساوی قوہ سطحیں | ۵۳۳ |
| قوت کے خطوط اور نلیاں | ۵۳۶ |
| ایک جاذب بالذات نظام کا کام | ۵۴۰ |
| ایک دئے ہوئے قوہ کے لئے مادہ کی تقسیم | ۵۴۷ |
| مماثل تہیں | ۵۵۰ |
| **سولھواں باب** | |
| کم لچک والے شہتیروں کا تعادل | ۵۵۶ |
| تین معیار اثروں کی کلاپی رون کی مساوات | ۵۶۵ |
| ایک خمیدہ سلاخ کے تعادل کی عام شرطیں | ۵۷۲ |
| ایک سلاخ کو جھکانے میں کام | ۵۷۹ |
| لمبے ستونوں کا جھکاؤ | ۵۸۳ |
| دھروں کی محوری گردش | ۵۸۵ |
| ستون کا جھکاؤ اپنے ہی وزن کے زیر عمل | ۵۸۹ |

(۱)

# سکونیات اعلیٰ

## پہلا باب

## تمہید - ایک نقطہ پر عمل کرنے والی قوتوں کی ترکیب و تحلیل

ا - جسم مادہ کا ایک ایسا حصہ ہے جو ہر طرف سے محدود ہو -

قوت وہ ہے جو کسی جسم کی حالت سکون کو یا یکساں حرکت کو بدل دے یا بدل دینے کی قابلیت رکھے -

کسی جسم کو ساکن اُس وقت کہتے ہیں جب وہ اپنی گرد و پیش کی چیزوں کے لحاظ سے اپنا مقام نہ بدلے -

سکونیات وہ علم ہے جس میں جسموں پر قوتوں کے عمل کے متعلق بحث کیجاتی ہے جبکہ ان قوتوں کی ترتیب ایسی ہو کہ اجسام مذکور ساکن رہیں -

وہ علم جس میں قوتوں کے زیر عمل حرکت کرنے والے اجسام پر بحث ہو حرکیات کہلاتا ہے -

۲ - ذرہ مادہ کا ایک حصہ ہے جو بلحاظ مقدار کے لا انتہا چھوٹا ہو یا ہماری تحقیقات کی اغراض کے لحاظ سے اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کے مختلف حصوں کے درمیانی فاصلوں کو نظر انداز کر سکیں -

کسی جسم کو ہم لا انتہا چھوٹے اجزا کی لا انتہا تعداد کا مجموعہ یا لا انتہا ذروں کا مجتمعہ گروہ تصور کر سکتے ہیں -

ایک استوار جسم سے ایسا جسم مراد ہوتا ہے جس کے اجزاء ایک دوسرے

کے لحاظ سے اپنا اضافی محل نہ بدلیں۔

استوار جسم کا تصور بھی ذرہ کے تصور کی طرح خیالی ہے کائنات میں کوئی جسم کامل طور پر استوار نہیں۔ ہر جسم میں قوت کے عمل سے کچھ نہ کچھ تغیر ضرور پیدا ہوتا ہے خواہ یہ تغیر کتنا ہی خفیف ہو۔ اگر لکڑی کی ایک سلاخ لی جائے اور اس کے ایک سرے کو مضبوط باندھ دیا جائے اور دوسرے کو کھینچا جائے تو لکڑی کچھ نہ کچھ ضرور کھنچ جائیگی۔ اگر سلاخ لوہے کی ہو تو طول کا تغیر مقابلتہً بہت کم واقع ہوگا۔

ہم اپنی تحقیقات کو سہل بنانے کے لئے یہ مان لیں گے کہ وہ تمام اجسام جو زیر بحث آئینگے مکمل طور پر استوار ہیں اور جہاں کہیں یہ بات نہ ہو اس کو بیان کر دیا جائے گا۔

(۲) ۳۔ مساوی قوتیں۔ دو ایسی قوتیں مساوی کہلاتی ہیں جو اگر ایک ذرہ پر متقابل سمتوں میں عمل کریں تو ذرہ حالتِ سکون میں رہے۔

۴۔ کمیت کسی جسم میں جس قدر مادہ ہو اُسے جسم کی کمیت کہتے ہیں۔ کمیت کی اکائی جو انگلستان میں مستعمل ہے ایک پونڈ ہے، پونڈ سے پلاٹینم کے ایک خاص ٹکڑے کی کمیت مراد ہے جو انگلستان کے دفتر فینانس میں محفوظ ہے۔

فرانس اور دیگر ممالک میں کمیت کی جو نظری اکائی مستعمل ہے وہ ایک گرام ہے جو تقریباً ۱۵٫۴۳۲ گرین کے مساوی ہے۔ عملی اکائی ایک کلوگرام (= ۱۰۰۰ گرام) ہے جو تقریباً ۲٫۲۰۴۶ پونڈ کے مساوی ہے۔

وزن۔ وزن کے تصور سے ہر ایک شخص بخوبی واقف ہے۔ ہم سب جانتے ہیں کہ کسی جسم کو زمین پر گرنے سے روکنے کے لئے کچھ نہ کچھ زور لگانا پڑتا ہے۔ زمین ہر ایک جسم کو جس قوت سے اپنی طرف کھینچتی ہے اُس کو اس جسم کا وزن کہتے ہیں۔

۵۔ قوت کی پیمائش۔ سکونیات میں ہم ایک پونڈ کے وزن کو قوت کی اکائی مقرر کریں گے۔ پس قوت کی اکائی اُس قوت کے مساوی ہے جو آزادانہ لٹکے ہوئے ایک پونڈ کی کمیت عین سہار سکے۔

علم حرکت میں یہ معلوم ہوگا کہ سطح زمین کے مختلف مقامات پر پونڈ کا وزن بالکل وہی نہیں رہتا مگر چونکہ سکونیات میں سطح زمین کے مختلف مقامات پر قوتوں کے مقابلہ کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی اس لئے پونڈ کے وزن کے تغیرات عملی اہمیت نہیں رکھتے ۔ اس لئے ہم ان تغیرات کو نظرانداز کرینگے اور پونڈ کے وزن کو مستقل مان لیں گے ۔

عملی طور پر برائے اختصار "ایک پونڈ کے وزن" کی بجائے ہم سکونیات میں "ایک پونڈ" کہیں گے ۔ اس سے طالب علم سمجھ جائیگا کہ "۱۰ پونڈ کی قوت" کے معنی "۱۰ پونڈ کے وزن کے مساوی قوت" ہے ۔

۶ — **قوتوں کو خطوط مستقیم سے تعبیر کرنا** ۔ کوئی قوت پورے طور پر معلوم ہو جائے گی جب ہمیں (۱) اس کی مقدار (۲) اس کی سمت اور (۳) اس کا نقطہ عمل معلوم ہو جائیں یعنی جسم کا وہ نقطہ جس پر یہ عمل کرتی ہے ۔

اس لئے ہم قوت کو نہایت آسانی سے ایک خط مستقیم کے ذریعے تعبیر کرسکتے ہیں جو اس کے نقطۂ عمل میں سے کھینچا جائے کیونکہ خط مستقیم میں مقدار اور سمت دونوں چیزیں پائی جاتی ہیں ۔

۷ — **قوت کی قسمیں** ۔ جب قوت کسی کمیت پر عمل کررہی ہو تو یہ تین مختلف شکلوں میں ظاہر ہوسکتی ہے :-

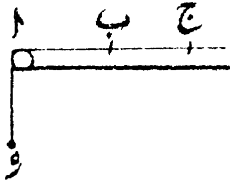
(۱) کشش (۲) تناؤ (۳) تعامل

۸ — **کشش** ۔ کشش سے مراد وہ قوت ہوتی ہے جو ایک جسم کسی دوسرے جسم پر بغیر کسی مرئی واسطہ کی موجودگی کے اور بغیر ان اجسام کے لازمی طور پر ایک دوسرے سے متصل ہونے کے لگاتا ہے ۔

اس کی نہایت عام مثال وہ کشش ہے جو زمین ہر ایک چیز پر لگاتی ہے اس کشش کو شئے مذکور کا (دفعہ ۴) وزن کہتے ہیں ۔

۹ — **تناؤ** ۔ اگر ہم ایک رسی کا ایک سرا کسی جسم کے ساتھ باندھ دیں اور رسی کے دوسرے سرے کو کھینچیں تو ہم جسم پر قوت لگائیں گے ۔ ایسی قوت جو کسی رسی یا سلاخ کے توسط سے لگائی جائے تناؤ کہلاتی ہے ۔

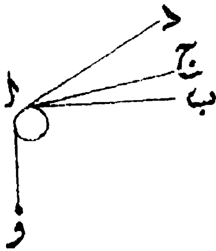
اگر رسی ہلکی ہو (یعنی اس کا وزن اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کو نظر انداز کر سکیں) تو جو قوت رسی لگاتی ہے وہ اس کے تمام طول پر یکساں ہوتی ہے۔




مثلاً اگر ایک وزن و کو ایک ہلکی رسی کے ذریعہ سہارا جائے جو ایک میز کے چکنے کنارے پر سے گذرتی ہو تو یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ قوت خواہ رسی کے کسی نقطہ (ا، ب یا ج) پر لگائی جائے اس کی مقدار ہر صورت میں وہی ہوگی۔

اب وزن کو سہارنے کے لئے ا پر جو قوت لگانی پڑتی ہے وہ ہر صورت میں وہی ہے اس لئے ظاہر ہے کہ ا پر اس کا اثر وہی رہتا ہے خواہ تناؤ رسی کے کسی نقطہ پر لگایا جائے۔ لہٰذا رسی کا تناؤ اس کے تمام طول پر وہی رہتا ہے۔

نیز اگر وزن و کو ایک ہلکی رسی سے سہارا جائے جو ایک چکنی کھونٹی ا پر سے گزرتی ہو تو یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ رسی کے دوسرے سرے پر وہی قوت لگانی پڑے گی خواہ رسی کو کسی سمت (اب، اج یا اد) میں کھینچا جائے اور یہ قوت وزن و کے مساوی ہوگی۔




(یہ قوت رسی کے آزاد سرے کو کمانی دار ترازو کے ساتھ باندھ دینے سے ناپی جا سکتی ہے)

**لہٰذا اگر ایک ہلکی رسی ایک چکنی کھونٹی پر سے گزرتی ہو تو اس کا تناؤ اس کے طول کے تمام نقطوں پر وہی ہوتا ہے۔**

(۴) اگر دو یا زیادہ رسیاں ایک دوسرے کے ساتھ باندھ دی جائیں تو ضروری نہیں کہ سب رسیوں کے تناؤ باہم مساوی ہوں۔

۱۰۔ **تعامل** ۔ اگر ایک جسم دوسرے جسم پر ٹکا ہو یا دوسرے جسم کو دبا رہا ہو تو ہر ایک جسم نقطہ تماس پر قوت محسوس کرتا ہے۔ اس قسم کی قوت کو **تعامل** کہتے ہیں۔

ایک جسم دوسرے جسم پر جو قوت لگاتا ہے (یا عمل کرتا ہے) وہ اس قوت (یا عمل) کے متضاد ہوتی ہے جو دوسرا جسم پہلے جسم پر لگاتا ہے۔

یہ اصول نیوٹن کے تیسرے کلیۂ حرکت میں پایا جاتا ہے

۱۱۔ **لچک دار رسیوں کے تناؤ** ۔ تمام رسیاں کھینچ سکتی ہیں اگرچہ بہت رسیوں میں کھینچ سکنے کی استعداد نہایت کم ہوتی ہے اور عملی طور پر نظرانداز ہوسکتی ہے۔ جب رسی کے کھینچنے کی استعداد کو نظرانداز نہ کیا جاسکے تو تجربہ سے معلوم ہوا ہے کہ رسی کے تناؤ کو اس کے کھنچاؤ کی مقدار کے ساتھ جو ربط ہوتا ہے اس کے لئے ایک سادہ کلیہ ہے جس کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے۔

**لچک دار رسی کا تناؤ رسی کے قدرتی طول سے زائد کھنچاؤ کے متناسب ہوتا ہے۔**

فرض کرو کہ قدرتی حالت میں ایک رسی کا طول ایک فٹ ہے، تب اس کے اُس تناؤ کو جبکہ اس کا طول ۱۳ انچ ہو اُس تناؤ کے ساتھ جبکہ اس کا طول ۱۵ انچ ہو یہ نسبت ہوگی

۱۳ - ۱۲ : ۱۵ - ۱۲ یعنی نسبت ۱ : ۳

اس کلیہ کی بذریعہ تجربہ یوں تصدیق ہوسکتی ہے۔ کوئی پیچدار کمانی یا ایک ربڑ کی نلی لو۔ اس کے ایک سرے A کو ایک ثابت نقطے سے پیوست کردو اور پھر اس کے دوسرے سرے B پر وزن لٹکا دو اور دیکھو کہ ان وزنوں سے کس قدر کھنچاؤ پیدا ہوتا ہے تب معلوم ہوگا کہ یہ کھنچاؤ تقریباً وزنوں کے متناسب ہیں۔ اس امر کی احتیاط رکھی جائے کہ جو وزن استعمال کئے جائیں وہ کمانی یا ربڑ کی نلی کی طاقت کے مطابق ہوں اور

زیادہ سے زیادہ وزن اتنا نہیں ہونا چاہیئے جو کمانی یا نلی کو منتشر کردے یا اس کی شباہت کو مستقلاً بدل دے۔

مندرجہ بالا کلیہ کو ہک صاحب (۱۶۳۵ء یا ۱۷۰۳ء) نے ۱۶۷۶ء میں مشتہر کیا اور اسے ان الفاظ میں پیش کیا۔ "جیسی قوت ویسا امتداد" اس سے کسی صورت میں تناؤ معلوم کرنے کا مقابلۃً آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ بغیر کھینچے رسی کا طول ا ہے، اور جب اس کا طول کھینچ کر لا ہو گیا ہے تو تناؤ ت ہے۔ تب کھچاؤ لا - ا ہے اور کلیہ مذکور کی رو سے ت ∝ لا - ا
اس کو عام طور پر اس شکل میں بیان کرتے ہیں:-

$$ت = لہ \frac{لا - ا}{ا}$$

مقدار لہ رسی کے مادہ پر اور نیز اس کی موٹائی پر منحصر ہوتی ہے، اس کو رسی
کی لچک کا مقیاس کہتے ہیں، اور یہ مقیاس اُس قوت کے مساوی ہوتا (۵)
ہے جو افقی میز پر رکھی ہوئی کسی لچکدار رسی کے طول کو دگنا کر دینے کے لئے
کافی ہو کیونکہ جب لا = ۲ا تو ت = لہ، لیکن ظاہر ہے کہ کوئی لچکدار رسی غیر محدود حد تک کھینچ تان کو برداشت نہیں کر سکتی، جب کوئی رسی بوجہ کھچاؤ ٹوٹنے کے عین قریب ہو تو اس وقت اس کے تناؤ کو توڑ تناؤ کہتے ہیں۔

ہک کا کلیہ فولادی اور نیز دیگر سلاخوں پر بھی صادق آتا ہے لیکن جن کھچاؤں کے لئے یہ درست ہے اُن کی حدود بہت تنگ ہیں۔ ہم کسی سلاخ کو کھینچ کر اس کے طول کو دو چند نہیں کر سکتے لیکن لہ اس قوت کے ۱۰۰ گنا کے مساوی ہوگا جو اس کے قدرتی طول میں اس کے $\frac{۱}{۱۰۰}$ کا اضافہ کر دے کیونکہ اگر لا - ا = $\frac{ا}{۱۰۰}$ تو ت = $\frac{لہ}{۱۰۰}$۔

ت کی قیمت سلاخ کی موٹائی پر بھی منحصر ہوگی۔ سلاخ عام طور پر ایک مربع انچ عمودی تراش کی لی جاتی ہے۔ چنانچہ ایک فولادی سلاخ کی لچک کا مقیاس تقریباً (۱۳۵۰۰) ٹن فی مربع انچ کے مساوی ہوتا ہے۔

۱۲ — **تعادل** ۔ جب دو یا زیادہ قوتیں ایک جسم پر عمل کرتی ہوں اور

اُن کو اس طرح ترتیب دیا گیا ہو کہ اُن کے زیرِ عمل جسم متوازن ہو تو اِن قوتوں کو متعادل قوتیں کہتے ہیں۔

ہم فرض کرلیں گے کہ اگر ہم کسی استوار جسم کے ایک ہی نقطہ پر دو مساوی اور متقابل قوتیں لگائیں تو ان سے جسم کے تعادل پر کوئی اثر نہیں پڑتا نیز اسی طرح سے اگر کسی جسم کے ایک ہی نقطہ پر دو مساوی اور متقابل قوتیں عمل کر رہی ہوں تو ان کو خارج کر سکتے ہیں۔

**۱۳ — قوتوں کے انتقال کا اصول۔** اگر کوئی قوت ایک استوار جسم کے کسی نقطہ پر عمل کرے تو ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ یہ اپنے خطِ عمل کے کسی اور نقطہ پر عمل کرتی ہے۔ بشرطیکہ موخر الذکر نقطہ جسم کے ساتھ استوار طور پر مربوط ہو۔

لا ق ب ق ق ا

فرض کرو کہ ایک قوت ق کسی جسم کے نقطہ ا پر ا لا کی سمت میں عمل کرتی ہے ا لا پر کوئی اور نقطہ ب لو اور ب پر دو مساوی اور متقابل قوتیں لگاؤ جنمیں سے ہر ایک قوت ق کے برابر ہو اور جو بالترتیب ب ا اور ب لا کی سمتوں میں عمل کریں۔ ان سے جسم کے توازن پر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔

قوت ق جو ا پر ا ب کی سمت میں عمل کرتی ہے اور قوت ق جو ب پر ب ا کی سمت میں عمل کرتی ہے یہ دونوں مساوی اور متقابل ہیں، ہم یہ فرض کرینگے کہ یہ ایک دوسرے کو زائل کر دیتی ہیں اور اس لئے ان کو خارج کیا جا سکتا ہے۔ ایسا کرنے سے ہمارے پاس صرف ایک قوت ق رہ جاتی ہے جو ب پر ب لا کی سمت میں عمل کرتی ہے اور اس کا اثر کلیۃً وہی ہے جو ا پر عمل کرنے والی ابتدائی قوت ق کا ہے۔ جسم مذکورہ بالا میں اندرونی قوتیں قوت ق کے ا یا ب پر عمل کرنے کی صورت میں مختلف ہونگی۔

۱۴۔ چکنے اجسام۔ لکڑی کا ایک صاف اور چکنا ٹکڑا لو جس کا ایک رخ مستوی ہو، اس کو اس رخ کے بل ایک میز پر رکھو جس کی سطح اتنی چکنی ہو جتنی کہ ممکن ہو سکے۔ اب اگر ہم لکڑی کے ٹکڑے کو میز پر پھسلانے کی کوشش کریں تو ہمیں کچھ نہ کچھ مزاحمت محسوس ہوگی۔ لکڑی اور میز کی سطح کے درمیان کچھ نہ کچھ قوت ہمیشہ ہوتی ہے۔ اگر اجسام کاملۃً چکنے ہوتے تو ٹکڑے اور میز کی سطح کے متوازی قوت بالکل معدوم ہوتی اور اُن کے درمیان جو قوت عمل کرتی وہ صرف میز پر عمود وار ہوتی۔

جب دو جسم جو ایک دوسرے سے مس کرتے ہوں بالکل چکنے ہوں تو وہ قوت یا تعامل جو ان دونوں کے درمیاں عمل کرتا ہے ان کے نقطہ تماس پر کی مشترک مماسی سطح پر عمود وار ہوتا ہے۔

پس معمولی منحنی سطح کی صورت میں یہ سمت اُس عماد کی سمت ہوتی ہے جو نقطہ تماس میں سے کھینچا جائے اور ظاہر ہے کہ یہ ایک قطعی طور پر معین سمت ہے۔

اگر ایک جسم ایک پتلے باریک تار کی شکل کا ہو یا کوئی پتلا کنارہ ہو تو اس پر کے کسی نقطہ ن میں سے لاانتہا خطوط ایسے کھینچ سکتے ہیں جو اس کی سطح پر عمود وار ہوں، کیونکہ ن میں سے گزرنے والے جملہ خطوط جو مماسی خط پر عمودی سطح مستوی میں واقع ہوں گے اس شرط کو پورا کریں گے، لیکن اگر دو کنارے ایک دوسرے سے مس کرتے ہوں تو مشترک عمود کی سمت معین ہو جائے گی کیونکہ اسے دونوں کناروں پر عمود وار ہونا چاہیئے اور بنائے علیہ اُس سطح پر عمود وار ہونا چاہیئے جو دونوں کناروں میں سے گزرتی ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ اس کی سمت وہ عماد ہے جو دونوں کناروں میں سے گزرنے والی سطح مستوی پر ان کے نقطہ تماس میں سے کھینچا جائے۔

## قوتوں کی ترکیب و تحلیل

(۲)

۱۵۔ فرض کرو کہ لکڑی کا ایک چپٹا ٹکڑا ایک چکنے میز پر پڑا ہے اور اس کو تین رسیوں کے ذریعے کھینچا گیا ہے جو اس کے کناروں پر بندھی ہیں، نیز رسیوں کے ذریعے جو قوتیں عمل کرتی ہیں وہ سب کی سب افقی ہیں۔ اگر رسیوں کے تناؤں

کو اس طرح ترتیب دیا گیا ہو کہ لکڑی ساکن رہے تو اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ قوتیں باہم متوازن ہیں۔ اس لئے ان قوتوں میں سے دو قوتیں باہم ملکر اتنی قوت لگاتی ہیں جو بلحاظ اثر کے تیسری قوت کے مساوی اور متقابل ہوتی ہیں۔ اس قوت کو جو تیسری قوت کے مساوی اور متقابل ہوتی ہے پہلی دو قوتوں کا حاصل کہتے ہیں۔

**حاصل۔ تعریف**۔ اگر دو یا زیادہ قوتیں ف، ق، س، ..... ایک استوار جسم پر عمل کریں اور اگر ایک واحد قوت ح ایسی معلوم ہوسکے جس کا اثر جسمِ مذکور پر وہی ہو جو ان قوتوں ف، ق، س .... کا ہے تو اس واحد قوت ح کو باقی قوتوں کا حاصل کہتے ہیں اور قوتوں ف، ق، س، .... کو ح کے اجزائے ترکیبی سے موسوم کرتے ہیں۔

تعریف بالا کی رو سے ظاہر ہے کہ اگر جسم مذکور پر ایک قوت ایسی لگائی جائے جو قوت ح کے مساوی اور متقابل ہو تو جسم پر عمل کرنے والی قوتیں توازن میں ہونگی اور جسم متوازن ہوگا۔ برعکس اس کے اگر جسم پر عمل کرنے والی قوتیں توازن میں ہوں تو اُن میں سے کوئی ایک قوت باقی قوتوں کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہوگی۔

۱۔ اگر ایک جسم پر دو قوتیں ایک ہی سمت میں عمل کریں تو اُن کا حاصل صریحاً اُنکے مجموعہ کے مساوی ہوگا اور بڑی قوت کی سمت میں عمل کرے گا۔

جب دو قوتیں ایک جسم پر مختلف سمتوں میں عمل کریں تو اُن کا حاصل ذیل کے مسئلہ سے معلوم ہو سکتا ہے۔

**مسئلہ۔ قوتوں کا متوازی الاضلاع**۔ اگر دو قوتوں کو جو ایک نقطہ پر عمل کرتی ہوں بلحاظ مقدار اور سمت کے ایک متوازی الاضلاع کے دو ضلعوں سے تعبیر کیا جائے جو اس کے ایک راس میں سے

کھینچے جائیں تو ان قوتوں کا حاصل بلحاظ سمت اور مقدار دونوں کے متوازی الاضلاع کے اس وتر سے تعبیر ہوتا ہے جو اس راس میں سے گزرتا ہے۔

سکونیات کے اس اساسی مسئلہ کو یا اسی کی دوسری شکل یعنی قوتوں کے مثلث دفعہ (۲۱) کو پہلے پہل شہر بروز کے باشندے سٹیوی نس (Stevinus) نے ۱۵۸۶ء میں دریافت کیا تھا۔ اس سے قبل علم سکونیات کا دارومدار بیرم کے اصول پر تھا۔

۱۷۔ تجربی ثبوت۔ تین ہلکی رسیاں لو اور ان تینوں کے ایک ایک سرے کو گرہ دیکر ایک نقطہ پر باندھ دو۔ اب دو رسیوں کو دو ثابت چرخیوں پر سے گزارو جو آزادانہ پھر سکتی ہوں اور ثابت سہاروں پر قائم ہوں۔ ان رسیوں کے دوسرے سروں پر وزن ف اور ق پونڈ باندھ دو۔ نیز تیسری رسی کے ساتھ وزن ہا پونڈ باندھو۔ اب اگر یہ تین وزن ایسے ہوں کہ ان میں سے کوئی ایک باقی دو کے مجموعہ سے زیادہ نہ ہو تو یہ نظام کسی نہ کسی محل میں تعادل کی حالت اختیار کرے گا۔ تعادل کی اس حالت میں رسیوں پر ایسے طول وا، وب، وج قطع کرو جو ف، ق، ہا کے بالترتیب متناسب ہوں اور متوازی الاضلاع وادب کی تکمیل کرو۔ تب معلوم ہوگا کہ وج، اد کے مساوی اور متقابل ہے۔ لیکن چونکہ ف، ق اور ہا باہم متوازن ہیں اس لئے ہا لازماً ف اور ق کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہوگا۔ یعنی ود اُن قوتوں کے حاصل کو تعبیر کرے گا جو وا وب سے تعبیر ہوتی ہیں۔ (۸)

اوپر کے تجربہ میں چرخیوں اور وزنوں کی بجائے کمانی دار ترازو استعمال ہو سکتے ہیں ان ترازوؤں میں ایک نمایندہ لگا ہوتا ہے جو اس کے درجہ دار رُخ پر اوپر نیچے حرکت کرتا ہے۔ اس سے وہ قوت معلوم ہو جاتی ہے جو کمانی پر عمل کرتی ہے۔

تین ہلکی رسیوں کو و پر گرہ دو اور اُن کے آزاد سروں کے ساتھ کمانی دار ترازو باندھ دو۔ ترازوؤں کو اتنا کھینچو کہ ان سے کوئی موزوں تناؤ تعبیر ہوں تب

ان کو ایک میز پر لٹا دو اور میخوں کے ذریعے ثابت کر دو۔ تب ہم رسیوں کے تناؤں ف، ق، مہ کو ترازوں پر پڑھ کر معلوم کر سکتے ہیں اور حسب سابق قوتوں کے متوازی الاضلاع کے مسئلہ کی صداقت کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

**حرکیاتی ثبوت** ۔ مسئلہ بالا کا ثبوت اسراع کے متوازی الاضلاع اور نیوٹن کے قوانین حرکت سے بھی مستنبط کیا جا سکتا ہے۔

اگر ایک ذرہ کی کمیت ک ہو اور اس کے اسراع ف، اور ف، بلحاظ مقدار اور سمت کے دو خطوط مستقیم و ا اور و ب سے تعبیر ہوں تو اس کا حاصل اسراع فہ متوازی الاضلاع و ا ج ب کے وتر و ج سے تعبیر ہوگا۔

چونکہ ذرہ کا اسراع و ا کی سمت میں ف ہے اس لئے اس سمت میں قوت ق (= ک ف) عمل کرتی ہے اور اسی طرح سے ایک قوت ق (= ک ف) و ب کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ ان قوتوں کو بلحاظ مقدار اور سمت کے و ا اور و ب سے تعبیر کرو۔

$$\text{تب}\quad \frac{\text{و ا}}{\text{و ب}} = \frac{\text{ف}}{\text{ف}} = \frac{\text{ق}}{\text{ق}} = \frac{\text{و ا}}{\text{و ب}}$$

متوازی الاضلاع و ا ج ب کی تکمیل کرو، تب معمولی ہندسہ سے ثابت ہو سکتا ہے کہ و، ج، ج ایک خط مستقیم میں ہیں اور

$$\frac{\text{و ج}}{\text{و ج}} = \frac{\text{و ا}}{\text{و ا}}$$

اس لئے و ج سے وہ قوت تعبیر ہوتی ہے جو اسراع و ج پیدا کرتی ہے اور اس لئے وہ قوت ہے جو و ا اور و ب کے حاصل کو تعبیر کرتی ہے۔

۱۸ — اگر دو قوتیں ف اور ق اس طرح عمل کرتی ہوں کہ ان کے خطوط عمل کے درمیان زاویہ ع بنتا ہو تو ان کا حاصل ح بلحاظ مقدار اور سمت کے آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے۔

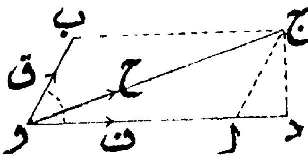
فرض کرو کہ مذکورہ بالا قوتیں ف اور ق خطوط مستقیم و ا اور و ب سے تعبیر ہوتی ہیں جن کے درمیان زاویہ ع بنتا ہے۔ متوازی الاضلاع و ا ج ب

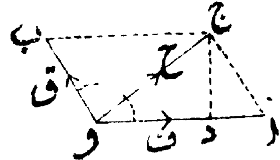
کی تکمیل کرو اور ج د، وا (ممدودہ بشرط ضرورت) پر عمود کھینچو

تب ود = وا + اج جم د ا ج = ف + ق جم ب و د = ف + ق جم عہ

[اگر د، و اور ا کے درمیان واقع ہو تو (شکل ۲)

د و = وا - اج جم د ا ج = ف - ق جم (۱۸۰ - عہ) = ف + ق جم عہ ]




نیز دج = اج جب د ا ج = ق جب عہ

∴ ح$^2$ = وج$^2$ = ود$^2$ + ج د$^2$ = ف$^2$ + ق$^2$ + ۲ ف ق جم عہ ........ (۱)

اور مس ج و د = $\frac{\text{دج}}{\text{ود}}$ = $\frac{\text{ق جب عہ}}{\text{ف + ق جم عہ}}$ .............. (۱۱)

ان دو مساواتوں سے مطلوبہ حاصل کی مقدار اور سمت دونوں معلوم ہو جاتی ہیں

نتیجہ صریح - اگر قوتیں علی القوائم ہوں تو عہ = ۹۰ اس لئے

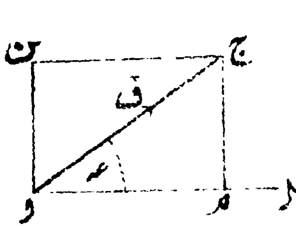
ح = $\sqrt{\text{ف}^2 + \text{ق}^2}$ اور مس ج وا = $\frac{\text{ق}}{\text{ف}}$

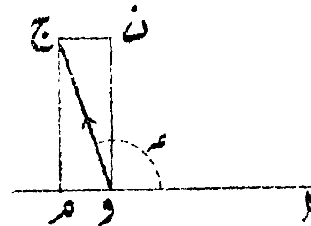
۱۹ — ہم ایک قوت کو دو اجزائے ترکیبی میں لامتناہی طریقوں سے تحلیل کر سکتے ہیں کیونکہ ظاہر ہے کہ ایسے لا انتہا متوازی الاضلاع کھینچ سکتے ہیں جن کا وتر وج ہو۔ ان میں سے ہر ایک متوازی الاضلاع کے دو متصلہ ضلع قوت کے اجزائے ترکیبی کو تعبیر کریں گے۔

سب سے ضروری صورت اس وقت واقع ہوتی ہے جب ہم کسی قوت کو ایسے دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کریں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں۔ فرض کرو کہ ہم ایک قوت ق کو جو وج سے تعبیر ہوتی ہے دو ایسے اجزائے ترکیبی میں تحلیل کرنا چاہتے ہیں جن میں سے ایک وا کی سمت میں ہو اور دوسری وا

پر عمود ہو۔

ج م، و ا پر عمود کھینچو اور متوازی الاضلاع و م ج ن کی تکمیل کرو۔ تب جو قوتیں و م اور و ن سے تعبیر ہوتی ہیں وہی مطلوبہ اجزائے ترکیبی ہیں۔




فرض کرو کہ زاویہ ا و ج = عہ

تب و م = و ج جم عہ = ق جم عہ اور و ن = و ج جب عہ = ق جب عہ

(اگر نقطہ م، ا و ممدودہ پر واقع ہو جیسا کہ شکل دوم میں تو ق کا جزو ترکیبی و ا کی سمت میں

= - و م = - و ج جم ج و م = و ج جم عہ = ق جم عہ

نیز و ا پر عمودوار جزو ترکیبی = و ن = م ج = و ج جب ج و م = ق جب عہ)

پس ہر صورت میں مطلوبہ اجزائے ترکیبی ہیں

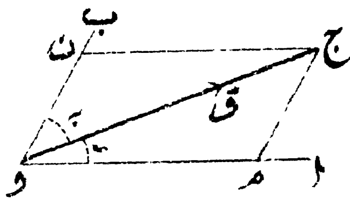
ق جم عہ اور ق جب عہ

کسی دی ہوئی قوت کی دی ہوئی سمت میں جزو تحلیلی سے وہ جزو ترکیبی مراد ہے کہ اگر اس کو سمت مذکورہ کی عمودی سمت میں عمل کرنے والے ایک اور جزو ترکیبی کے ساتھ ترکیب دیا جائے تو دی ہوئی قوت حاصل ہو۔

مثلاً قوت ق کا جزو تحلیلی و ا کی سمت میں ق جم عہ ہے۔

پس ایک دی ہوئی قوت کا جزو تحلیلی معلومہ قوت کو اس کی سمت اور دی ہوئی سمت کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۰۔ کسی قوت کو دی ہوئی دو سمتوں میں عمل کرنے والے دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔




فرض کرو کہ ایک قوت ق ہے جو و ج کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ اس کے اجزائے ترکیبی سمتوں وا اور و ب میں نکالنا مقصود ہے جو ق کی سمت کے ساتھ بالترتیب زاویے عہ اور بہ بناتے ہیں۔ ج م، و ب کے متوازی کھینچو جو وا سے م پر ملے اور متوازی الاضلاع و م ج ن کی تکمیل کرو، تب و م اور و ن مطلوبہ اجزائے ترکیبی ہیں۔

چونکہ مثلث و م ج کے اضلاع مقابل کے زاویوں کی جیوب کے متناسب ہیں اس لئے

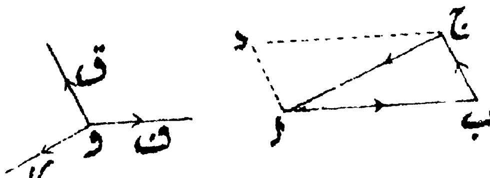
$$\frac{\text{و م}}{\text{جب بہ}} = \frac{\text{م ج}}{\text{جب عہ}} = \frac{\text{ق}}{\text{جب (عہ + بہ)}}$$

پس مطلوبہ اجزائے ترکیبی $\frac{\text{ق جب بہ}}{\text{جب (عہ + بہ)}}$ اور $\frac{\text{ق جب عہ}}{\text{جب (عہ + بہ)}}$ ہیں۔

طالب علم کو بغور سمجھ لینا چاہیئے کہ کسی قوت کے جزو ترکیبی اور جزو تحلیلی ایک ہی سمت میں مساوی نہیں ہوتے۔ مثلاً ہم دفعہ ۱۹ میں دیکھ چکے ہیں کہ ق کا جزو تحلیلی وا کی سمت میں ق جم عہ ہے۔

۲۱۔ **قوتوں کا مثلث** - اگر تین متراکز قوتوں کو بلحاظ مقدار اور سمت دونوں کے ایک مثلث کے اضلاع سے بالترتیب ظاہر کیا جاسکے تو قوتیں تعادل میں ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ قوتیں ف، ف' اور م جو ایک نقطہ و پر عمل کرتی ہیں بلحاظ مقدار اور سمت کے ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع ا ب، ب ج، ج ا سے تعبیر ہوتی ہیں۔ متوازی الاضلاع ا ب ج د کی تکمیل کرو۔



ب ج اور ا د سے وہی قوتیں تعبیر ہوتی ہیں کیونکہ ب ج اور ا د مساوی اور متوازی ہیں۔

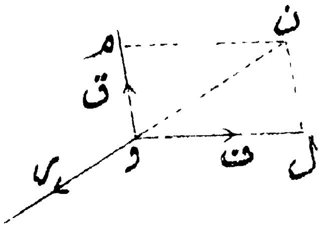
اب قوتوں ا ب اور ا د کا حاصل قوتوں کے متوازی الاضلاع کی رو سے ا ج سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس لئے ا ب، ب ج اور ج ا کا حاصل ا ج اور ج ا کے حاصل کے مساوی ہے اور اس لئے صفر ہے۔

پس تین قوتیں ف، ق، ر تعادل میں ہیں۔

*نتیجہ صریح*۔ چونکہ وہ قوتیں جو ایک نقطہ پر عمل کرتی ہیں اور ا ب، ب ج اور ج ا سے تعبیر ہوتی ہیں متعادل ہوتی ہیں اور نیز جب تین قوتیں تعادل میں ہوں تو ہر ایک قوت باقی دو کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہوتی ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ا ب اور ب ج کا حاصل ج ا کے مساوی اور متقابل ہے یعنی ان کا حاصل ا ج ہے۔

پس اگر دو قوتیں ایک ہی نقطہ پر عمل کریں اور ایک مثلث کے اضلاع ا ب اور ب ج سے تعبیر ہوں تو ان کا حاصل مثلث مذکور کے تیسرے ضلع ا ج سے تعبیر ہوگا۔

۲۲ — قوتوں کے مثلث کا عکس بھی درست ہے یعنی اگر تین متراکز قوتیں ف، ق اور ر جو ایک نقطہ و پر عمل کرتی ہیں باہم متعادل ہوں تو ان کو بلحاظ مقدار اور سمت کے ایک مثلث کے اضلاع سے تعبیر کیا جا سکتا ہے جس کے اضلاع بالترتیب قوتوں کی سمتوں کے متوازی ہوں۔




ف اور ق کی سمتوں پر طول و ل، و م ناپو جو بالترتیب ان قوتوں کو تعبیر کریں۔ متوازی الاضلاع و ل ن م کی تکمیل کرو اور و ن کو ملاؤ۔

چونکہ تین قوتیں ف، ق، ر متعادل ہیں اس لئے ر قوتوں ف اور

ق کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہوگا، اس لئے یہ ن و سے تعبیر ہوگا۔ اس لئے یہ تین قوتیں مثلث و ل ن کے اضلاع و ل، ل ن اور ن و کے متوازی اور متناسب ہیں۔

اگر کوئی اور ایسا مثلث کھینچا جائے جس کے اضلاع مثلث و ل ن کے اضلاع کے متوازی ہوں تو اس کے اضلاع مثلث و ل ن کے اضلاع کے متناسب اور اسلئے قوتوں کے متناسب ہوں گے۔ نیز اگر کوئی اور مثلث کھینچا جائے جسکے اضلاع مثلث و ل ن کے اضلاع پر عمود ہوں تو اس کے اضلاع مثلث و ل ن کے اضلاع کے متناسب اور بناءً علیہ قوتوں کے متناسب ہونگے۔

اس لئے اگر تین قوتیں متعادل ہوں اور ان کی مقداریں معلوم ہوں تو ہم ان قوتوں کی اضافی سمتوں کو بذریعہ عمل ترسیم نہایت آسانی سے متعین کر سکتے ہیں۔ اس کے لئے ہمیں صرف ایک مثلث بنا لینا چاہیئے جس کے اضلاع قوتوں کے متناسب ہوں اور مثلث ہمیشہ بنایا جا سکتا ہے تاوقتیکہ دو قوتوں کا مجموعہ تیسری قوت سے بڑا نہ ہو۔

۲۳ — **لامی کا مسئلہ**۔ اگر تین قوتیں ایک ذرہ پر عمل کریں اور ذرہ متعادل رہے تو ہر ایک قوت باقی دو قوتوں کے درمیانی زاویہ کی جیب کے متناسب ہوگی۔

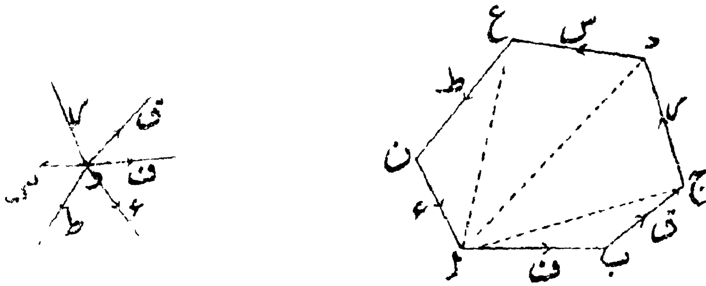
کیونکہ کسی مثلث میں اس کے اضلاع مقابل کے زاویوں کی جیوب کے متناسب ہوتے ہیں اور گزشتہ دفعہ میں ثابت ہو چکا ہے کہ قوتیں اضلاع کے متناسب ہوتی ہیں اس لئے (۱۳)

$$\frac{\text{ول}}{\text{جب ل ن و}} = \frac{\text{ل ن}}{\text{جب ل و ن}} = \frac{\text{ن و}}{\text{جب و ل ن}}$$

یعنی

$$\frac{\text{ف}}{\text{جب ق و ر}} = \frac{\text{ق}}{\text{جب ر و ف}} = \frac{\text{ر}}{\text{جب ف و ق}}$$

**۲۴ — قوتوں کا کثیر الاضلاع** - اگر متعدد قوتیں ایک ذرہ پر عمل کریں اور بلحاظ سمت اور مقدار کے ایک کثیر الاضلاع کے ضلعوں سے بالترتیب تعبیر ہوسکیں تو قوتیں تعادل میں ہونگی۔




فرض کرو کہ کثیر الاضلاع کے ضلعے اب، ب ج، ج د، د ع، ع ن اور ن ا بالترتیب و پر عمل کرنے والی قوتوں کو بلحاظ مقدار اور سمت کے تعبیر کرتے ہیں۔ اج، اد، اع کو ملاؤ۔

دفعہ ۲۱ کے نتیجہ صریح کی رو سے اب اور ب ج کا حاصل اج سے تعبیر ہوتا ہے۔اسی طرح سے اج اور ج د کا حاصل اد سے تعبیر ہوتا ہے، اد اور دع کا حاصل اع سے تعبیر ہوتا ہے، اور علیٰ ہذا القیاس اع اور ع ن کا حاصل ان سے تعبیر ہوتا ہے۔

لہذا سب قوتوں کا حاصل ان اور ن ا کے حاصل کے مساوی ہے گویا حاصل معدوم ہو جاتا ہے اور اس لئے قوتیں متعادل ہیں۔

قوتوں کی تعداد خواہ کچھ ہی ہو یہی استدلال ہر صورت پر صادق آئے گا ثبوت سے یہ بھی ظاہر ہے کہ کثیر الاضلاع کے ضلعوں کا ایک ہی مسطح مستوی میں ہونا ضروری نہیں۔

قوتوں کے کثیر الاضلاع کا عکس درست نہیں کیونکہ اگر ہیں اس کے

اضلاع کی سمتیں معلوم ہوں تو ان سے کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی نسبتیں متعین نہیں ہوسکتیں مثلاً اوپر کی شکل میں ا ب پر کوئی نقطہ اَ لو اور ا ن کے متوازی اَ نَ کھینچو جو ع ن سے نَ پر ملے، تب نئے کثیر الاضلاع اَ ب ج د ع نَ کے اضلاع کثیر الاضلاع ا ب ج د ع ن کے اضلاع کے بالترتیب متوازی ہیں لیکن اضلاع صریحاً متناسب نہیں ہیں۔

(۱۴) ۲۵ — دو قوتیں نقطہ و پر و ا اور و ب کی سمتوں میں عمل کرتی ہیں اور مقداریں لہ × و ا اور مہ × و ب سے تعبیر ہوتی ہیں، تب اُن کا حاصل (لہ + مہ) × و ج سے تعبیر ہوگا۔ جہاں ج، ا ب پر کا ایسا نقطہ ہے کہ لہ × ج ا = مہ × ج ب

کیونکہ دفعہ ۲۱ کے نتیجہ صریح کی رو سے قوت لہ × و ا اُن دو قوتوں کے مساوی ہے جو لہ × و ج اور لہ × ج ا سے تعبیر ہوتی ہیں اور اسی طرح سے قوت مہ × و ج قوتوں مہ × و ج اور مہ × ج ب کے مساوی ہے۔

پس معلومہ قوتیں دونوں مل کر قوت (لہ + مہ) × و ج اور نیز قوتوں لہ × ج ا اور مہ × ج ب کے مساوی ہیں، اب موخرالذکر ایک دوسرے کی تعدیل کرتی ہیں۔

نتیجہ صریح۔ و ا اور و ب سے جو قوتیں تعبیر ہوتی ہیں اُن کا حاصل ۲ × و ج ہے جہاں ج، ا ب کا وسطی نقطہ ہے۔ نیز یہ ظاہر ہے کہ و ج اُس متوازی الاضلاع کے وتر و د کا نصف ہے جو منتصل اضلاع و ا، و ب سے بنتا ہے۔

# مثالیں

(۱) اگر ایک مثلث کے نقاط راس کو کسی نقطہ سے ملا دیا جاسے تو ان خطوط سے قوتوں کا جو نظام تعبیر ہوگا وہ اس نظام کے معادل ہوگا جو نقطۂ مذکور کو مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط سے ملانے والے خطوط سے تعبیر ہوتا ہے۔

(۲) ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے اندر ایک ایسا نقطہ معلوم کرو کہ اگر اس نقطہ کو ذو اربعۃ الاضلاع کے راسوں سے ملایا جاسے تو ان ملانے والے خطوں سے تعبیر ہونیوالی قوتوں کے زیر عمل نقطہ مذکور ساکن رہے۔

(۳) چار قوتیں ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د کے اضلاع کی سمتوں میں اور ان کے متناسب ہیں۔ ان میں سے تین قوتیں ا ب، ب ج، ج د کی سمتوں میں عمل کرتی ہیں اور چوتھی ا سے د کی طرف عمل کرتی ہے ان کے حاصل کی مقدار اور سمت معلوم کرو اور وہ نقطہ معلوم کرو جس میں یہ ج د سے ملتی ہے۔

(۴) ایک ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د کے اضلاع ب ج اور د ا کی تنصیف ف اور ھ پر کی گئی ہے، ثابت کرو کہ اگر دو قوتیں ا ب اور د ج کے مساوی اور متوازی ایک ذرہ پر عمل کریں تو حاصل ھ ف کے متوازی اور ۲ ھ ف کے مساوی ہوگا۔

(۵) ایک ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د کے اضلاع ا ب، ب ج، ج د، د ا کی تنصیف ع، ف، گ، ھ پر کی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ اُن قوتوں کا حاصل جو ایک نقطہ پر عمل کریں اور بلحاظ سمت اور مقدار کے ع گ اور ھ ف سے تعبیر ہوں بلحاظ مقدار اور سمت کے ا ج سے تعبیر ہوتا ہے۔

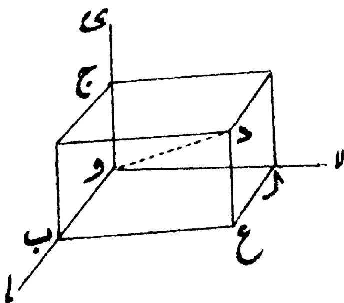
(۶) ایک دائرہ کے اندر ایک نقطہ ن ہے، دائرہ کا مرکز ثابت ہے۔ ن میں سے ن ل۱، ن ل۲، ن ل۳، خط کھینچے گئے ہیں جو محیط سے ملتے ہیں۔ یہ سب خطوط ن میں سے گزرنے والے نصف قطر سے مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ن سے نکلتی ہوئی قوتیں ان خطوط سے تعبیر ہوں تو ان کا حاصل دائرہ کے نصف قطر کی مقدار پر منحصر نہیں ہے۔

(۱۵) (۷) ایک قطع ناقص کے ماسکے س اور سَ ہیں، اس پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے

ناقص کے مرکز ج پر دو مساوی اور مستقل قوتیں س ن اور ن س کے متوازی عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اس خط مستقیم کا سرا جو ان کے حاصل کو تعبیر کرتا ہے، ایک دائرہ پر واقع ہوتا ہے جو ج میں سے گزرتا ہے۔

(۸) اس امر کی تشریح کرو کہ کس طرح ایک بادبانی کشتی کو ہوا کی تقریباً مخالف سمت میں چلانا ممکن ہے۔ اگر اس کے بادبان کو ایک استوار سطح مستوی فرض کیا جائے تو بتاؤ کہ کشتی کو آگے بڑھانے میں جو قوت عمل کرتی ہے وہ بڑی سے بڑی اس وقت ہو سکیگی جب کشتی کو اس طرح چلایا جائے کہ بادبان اُس زاویہ کی تنصیف کرے جو کشتی کے پیندے اور ہوا کی ظاہری سمت کے درمیان ہے۔

**قوتوں کا متوازی السطوح** تین قوتیں ایک نقطہ و پر عمل کرتی ہیں اور بالترتیب و ا، و ب، و ج سے تعبیر ہوتی ہیں، تب ان کا حاصل اس متوازی السطوح کے وتر و د سے تعبیر ہوگا جس کے اضلاع و ا، و ب، و ج ہیں۔




کیونکہ دو قوتیں و ا، و ب ایک قوت و ع کے مساوی ہیں جہاں و ا ع ب متوازی الاضلاع ہے نیز قوتیں و ع اور و ج ایک قوت و د کے معادل ہیں کیونکہ و ع د ج متوازی الاضلاع ہے۔

اگر متوازی السطوح مستطیلی ہو یعنی و ا، و ب، و ج قایم محوروں پر لئے جاسکیں اور اگر قوتیں و ا، و ب، و ج بالترتیب لا، ما، ے ہوں تو حاصل $ح = \sqrt{لا^2 + ما^2 + ے^2}$ اور اس خط پر عمل کرتا ہے جس کے سمتی جیوب التمام جم ا و د، جم ب و د اور جم ج و د ہیں

یعنی $\frac{وا}{ود}$، $\frac{وب}{ود}$، $\frac{وج}{ود}$ یعنی $\frac{لا}{ح}$، $\frac{ما}{ح}$، $\frac{ے}{ح}$

برعکس اس کے اگر ایک قوت ح مبدا و پر عمل کرے اور اس کے خط عمل کے سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہوں تو اس کے اجزائے ترکیبی محوروں پر لا (= ل ح)، ما (= م ح) اور ے (= ن ح) ہونگے۔

۲۷۔ کسی دی ہوئی سمت میں دو قوتوں کے اجزائے تحلیلی کا مجموعہ اسی سمت میں ان قوتوں کے حاصل کے جزو تحلیلی کے مساوی ہوتا ہے۔

کیونکہ یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ اگر و ا، و ب دو قوتوں کو تعبیر کریں اور و ا ج ب متوازی الاضلاع ہو تو و ا، و ب کے ظلوں کا مجموعہ کسی خط و لا پر و ا اور ا ج کے ظلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے اور اس لئے اسی خط پر و ج کے ظل کے مساوی ہوتا ہے، لہذا نتیجہ بالا حاصل ہوا۔

۲۸۔ اگر متعدد قوتیں ایک معلومہ نقطہ و پر عمل کرتی ہوں تو اُن کے متعادل ہونے کی شرطیں اور اُن کا حاصل معلوم کرو۔ (۱)

کوئی تین باہم عمود دار محور و لا، و ما، و ی لو جو و میں سے گزریں۔ اور فرض کرو کہ دی ہوئی قوتیں $ح_۱$، $ح_۲$ وغیرہ ہیں جن کی سمتی جیوب التمام بالترتیب ($ل_۱$، $م_۱$، $ن_۱$)، ($ل_۲$، $م_۲$، $ن_۲$) وغیرہ ہیں تب دفعہ ۲۶ کی رو سے $ح_۱$ ان محوروں کے متوازی اپنے اجزائے ترکیبی $ل_۱ ح_۱$، $م_۱ ح_۱$، $ن_۱ ح_۱$ کے مساوی ہے اور $ح_۲$ اپنے اجزائے ترکیبی $ل_۲ ح_۲$، $م_۲ ح_۲$، $ن_۲ ح_۲$ کے مساوی ہے، علیٰ ہذا القیاس

اب اگر محوروں کے متوازی کل اجزائے ترکیبی لا، ما، ے ہوں تو

$$لا = ل_۱ ح_۱ + ل_۲ ح_۲ + ل_۳ ح_۳ + \ldots\ldots$$

$$ما = م_۱ ح_۱ + م_۲ ح_۲ + م_۳ ح_۳ + \ldots\ldots$$

$$\text{ے} = \text{ن}_1\,\text{ح}_1 + \text{ن}_2\,\text{ح}_2 + \text{ن}_3\,\text{ح}_3 + \ldots\ldots$$

لہٰذا دفعہ ۲۶ کی رو سے حاصل قوت $\text{ح} = \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ے}^2}$

اور اس کے خط عمل کی سمتی جیوب التمام ہیں $\frac{\text{لا}}{\text{ح}}$ ، $\frac{\text{ما}}{\text{ح}}$ ، $\frac{\text{ے}}{\text{ح}}$

اگر قوتیں متعادل ہوں تو حاصل ح کو صفر ہونا چاہیے

لہٰذا $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ے}^2 = ۰$

$\therefore$ $\text{لا} = ۰$ ، $\text{ما} = ۰$ ، $\text{ے} = ۰$

پس اگر ایک نقطہ پر عمل کرنے والی قوتیں تعادل میں ہوں تو تین علی القوائم سمتوں میں ان کے اجزائے ترکیبی کا جبریہ مجموعہ علیحدہ علیحدہ صفر ہونا چاہیے۔ برعکس اس کے اگر تین جداگانہ علی القوائم سمتوں میں قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ صفر ہو تو قوتیں تعادل میں ہونگی۔

اگر گزشتہ دفعہ کی قوتیں ہم مستوی ہوں تو ہمیں ان قوتوں کو ان کے مستوی میں صرف دو سمتوں میں تحلیل کرنا کافی ہے۔

اگر صرف تین ہم مستوی قوتیں ایک نقطہ پر عمل کریں تو تعادل کی شرائط بالعموم لامی کے مسئلہ سے نہایت آسانی سے معلوم ہو سکتی ہیں (دفعہ ۲۳)

**۲۹ — ایک ذرہ ایک چکنے مادی منحنی یا سطح پر ساکن ہے۔ اس کے تعادل کی شرائط معلوم کرو۔**

فرض کرو کہ منحنی کے جس نقطہ پر ذرہ ساکن ہے اس کے محدد (لا، ما، ی) ہیں اور قوس ون کا طول جو ایک ثابت نقطہ و سے ناپا گیا ہے س ہے۔

منحنی کے مماس کی سمتی جیوب التمام ہیں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} \;،\; \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} \;،\; \frac{\text{فری}}{\text{فرس}}$$

اور یہ معلوم ہو سکتے ہیں اگر منحنی کی شکل معلوم ہو۔
چونکہ منحنی چکنا ہے اس لئے قوتوں کا عمل نقطۂ تماس پر صرف منحنی کے (۱۷)
عماد کی سمت میں ہو سکتا ہے یعنی منحنی کے مماس کی سمت میں حاصل قوت لازماً
معدوم ہونی چاہیئے اس لئے اگر محوروں کے متوازی ذرہ پر عمل کرنے والی
قوتوں کے اجزائے ترکیبی لا، ما، ے ہوں تو

$$\text{لا}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}+\text{ما}\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}+\text{ے}\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}=\text{۰}$$

اگر منحنی ایک سطح مستوی میں ہو تو یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{لا}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}+\text{ما}\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}=\text{۰}\quad\text{یعنی}\quad\text{لا}+\text{ما}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}=\text{۰}$$

اگر ذرہ ایک چکنی سطح ف (لا، ما، ی) = ۰ کے نقطہ ن پر ساکن ہو تو ن پر
کے کسی مماسی خط میں حاصل ح صریحاً معدوم ہونا چاہیئے۔ پس اجزائے ترکیبی
لا، ما، ے کی حاصل قوت کو (جو اس خط پر عمل کرتی ہے جس کی سمتی
جیوب التمام لا، ما، ے کے متناسب ہیں) ن پر کے عماد پر منطبق ہونا
چاہیئے اور ہم جانتے ہیں کہ ن پر کے عماد کی سمتی جیوب التمام ہیں

$$\frac{\text{فرف}}{\text{فرلا}}\ ،\ \frac{\text{فرف}}{\text{فرما}}\ ،\ \frac{\text{فرف}}{\text{فری}}$$

اس لئے

$$\frac{\dfrac{\text{فرف}}{\text{فرلا}}}{\text{لا}}=\frac{\dfrac{\text{فرف}}{\text{فرما}}}{\text{ما}}=\frac{\dfrac{\text{فرف}}{\text{فری}}}{\text{ے}}$$

نیز سطح پر کا عمادی التعامل صریحاً حاصل قوت

$$\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{ما}^{\text{۲}}+\text{ے}^{\text{۲}}}$$

کے مساوی ہونا چاہیئے

۳۰۔ ایک چکنے تار کو ایک ناقص $\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{ا}^{\text{۲}}}+\frac{\text{ما}^{\text{۲}}}{\text{ب}^{\text{۲}}}=\text{۱}$ کی شکل میں موڑا گیا ہے

اس تار پر ایک منکہ ہے جس پر دو قوتیں $ل\ لا^{ن}$ ، $مہ\ ما^{ن}$ بالترتیب محوروں کی سمتوں میں عمل کرتی ہیں ۔ منکہ کے تعادل کا مقام معلوم کرو اور اس صورت پر غور کرو جبکہ $ن = ۱$

مقام تعادل ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے $ل\ لا^{ن} \frac{فرلا}{فرس} + مہ\ ما^{ن} \frac{فرما}{فرس} = ۰$

یعنی $ل\ لا^{ن} = - مہ\ ما^{ن} \times \frac{فرما}{فرلا} = مہ\ ما^{ن} \frac{لا\ ب^{۲}}{ما\ ا^{۲}}$ ....... (۱) ناقص کی مساوات سے

$$\therefore \frac{لا}{(مہ\ ب^{۲})^{\frac{۱}{ن-۱}}} = \frac{ما}{(ل\ ا^{۲})^{\frac{۱}{ن-۱}}} = \frac{۱}{\left\{\frac{۱}{ا^{۲}}(مہ\ ب^{۲})^{\frac{۲}{ن-۱}} + \frac{۱}{ب^{۲}}(ل\ ا^{۲})^{\frac{۲}{ن-۱}}\right\}^{\frac{۱}{۲}}}$$

جس سے تعادل کا نقطہ حاصل ہوتا ہے

اگر $ن = ۱$ تو تعادل کی مساوات (۱) ذیل کی مساوات میں تحویل ہو جاتی ہے

$$ا^{۲}\ ل = ب^{۲}\ مہ$$

اور اس لئے اگر یہ شرط پوری ہو تو ذرہ مذکور منحنی کے ہر مقام پر متعادل ہوگا پس اگر نقطہ لا، ما پر محوروں کے متوازی عمل کرنے والی قوتیں $\frac{لا}{ا^{۲}}$ اور $\frac{ما}{ب^{۲}}$ کے متناسب ہوں تو ذرہ ہر مقام پر متعادل ہوگا۔

**مشق ۲** — ایک ذرہ ن پر دو قوتیں $\frac{مہ}{ان^{۲}}$ اور $\frac{مہ_۱}{بن^{۲}}$ دو ثوابت مرکزوں ا اور ب کی طرف سے بالترتیب عمل کرتی ہیں ۔ ثابت کرو کہ ذرہ کسی چکنے منحنی پر ساکن رہ سکتا ہے جس کی مساوات اس شکل کی ہو

$$(ر - مہ\ ج)(ر_۱ - مہ_۱\ ج) = مہ\ مہ_۱\ ج^{۲}$$

جہاں $ان = ر$ ، $بن = ر_۱$ اور ج کوئی مستقل ہے ۔

اگر مطلوبہ چکنے منحنی کی قوس پر کسی نقطہ و سے قوس ون کا طول س ہو اور ن پر کا مماس ن ت ہو تو قوتوں کو ن ت کی سمت میں تحلیل کرنے سے

$$\frac{مہ}{ر^{۲}}\ جم\ ان\ ت + \frac{مہ_۱}{ر_۱^{۲}}\ جم\ ب\ ن\ ت = ۰$$

یعنی $\frac{مہ}{ر^{۲}} \frac{فرر}{فرس} + \frac{مہ_۱}{ر_۱^{۲}} \frac{فرر_۱}{فرس} = ۰$

لہذا استعمال کرنے سے

$$-\frac{مہ_1}{ر_1} + \frac{مہ_2}{ر_2} = مستقل = -\frac{1}{ج}$$

$$\therefore \quad (ر_1 - مہ_1 ج)(ر_2 - مہ_2 ج) = مہ_1 مہ_2 ج^2$$

# مثالیں

(۱) ایک چھوٹا منکہ ایک چکنے ناقص کی شکل کے تار پر پھسل سکتا ہے۔ یہ دو ماسکوں س اور ھ کی طرف دو قوتوں سے کھنچتا ہے جو بالترتیب س ک$^م$ اور ھ ک$^ن$ کے متناسب ہیں۔ تعادل کا مقام معلوم کرو۔

(۲) ایک ذرہ ن پر دو قوتیں $\frac{مہ}{ر_1^2}$ اور $\frac{مہ}{ر_2^2}$ دو ثابت نقطوں و$_1$ اور و$_2$ کی طرف عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ ایک چکنی نالی کے ہر مقام پر ساکن رہ سکتا ہے جس کی مساوات $ر_1 ر_2 =$ مستقل ہے جہاں

$$و_1ن = ر_1 \quad اور \quad و_2ن = ر_2$$

اگر اس پر انہی دو نقطوں کی طرف دو مستقل قوتیں ق$_1$ اور ق$_2$ عمل کریں تو اس کے متناظر نالی کی مساوات $ق_1 ر_1 + ق_2 ر_2 =$ مستقل ہوگی۔

(۳) ایک ذرہ ن پر کشش جاذبہ $\frac{مہ}{و ن^2}$ ایک ثابت نقطہ و کی طرف عمل کرتی ہے اور قوت اندفاع $\frac{مہ}{وَ ن^2}$ ایک اور ثابت نقطہ وَ سے عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ ن کے ایسے طریق کی مساوات جس کے ہر نقطہ پر پوری کشش صرف مماس کی سمت میں ہے جم طہ − جم طہَ = مستقل ہوگی۔ طہ اور طہَ دو زاویے ہیں جو ون اور وَن بالترتیب ووَ ممدودہ کے ساتھ بناتے ہیں۔

اگر قوتیں $\frac{مہ}{و ن}$ اور $\frac{مہ}{وَ ن}$ ہوں تو ثابت کرو کہ منحنی کی مساوات طہ − طہَ = مستقل ہوگی یعنی ایک دائرہ کی قوس ہوگی۔

(۱۹) (۴) ایک نلی مکافی کی شکل کی ہے۔ اس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور راس نیچے کی طرف ہے، ایک وزنی ذرہ کو اس کے اندر رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ معین کی سمت میں باہر کی طرف عمل کرنے والی ایسی قوت کے زیر عمل متعادل رہ سکتا ہے جو معین کے طول کی طرح بدلے۔ نیز ثابت کرو کہ نلی کا متناظر تعامل مکافی کے ماسکہ سے اس کے فاصلہ کے جذر کے متناسب ہوتا ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ چکنی سطح $\frac{\text{لا}^{3}}{\text{ا}^{3}} + \frac{\text{ما}^{3}}{\text{ب}^{3}} + \frac{\text{ی}^{3}}{\text{ج}^{3}} = 1$ پر کا وہ نقطہ جس پر مبدا کی طرف عمل کرنے والی قوت کے زیر عمل کوئی ذرہ ساکن رہ سکتا ہے اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}^{3}} = \frac{\text{ما}}{\text{ب}^{3}} = \frac{\text{ی}}{\text{ج}^{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\text{ا}^{6} + \text{ب}^{6} + \text{ج}^{6}}}$$

(۶) ایک ڈھانچہ آٹھ مساوی ہلکی سلاخوں سے بنا ہوا ہے جن کو اس طرح جوڑا گیا ہے کہ اس سے منتظم ہشت سطحی کے نصف کی شکل بنتی ہے۔ اس کو اس کی مربع سطح کے بل افقی سطح پر رکھا گیا ہے اگر اس کے راس سے ایک وزن و لٹکایا جائے تو ثابت کرو کہ ترچھی سلاخوں پر دباؤ $\frac{1}{4}$ و $\sqrt{2}$ ہوگا اور افقی سلاخوں پر $\frac{1}{2}$ و $\sqrt{2}$ ہوگا۔

(۷) بارہ مساوی ہلکی سلاخوں کو وصل کرنے سے ایک منتظم ہشت سطحی بنایا گیا ہے اس کے ایک کونہ کو ساکن کر کے ڈھانچہ کو بلا تکلف لٹکایا گیا ہے اور اس کونے کے سوائے باقی سب کونوں کے ساتھ مساوی وزن بندھے ہیں۔ ثابت کرو کہ نیچے کی سلاخوں اور اوپر کی سلاخوں کے تناؤ بالترتیب نسبت ۱ : ۳ : ۵ میں ہیں۔

(۸) تین کھمبے ہیں جن میں سے ہر ایک کا طول ۹ فٹ ہے، ان میں سے ہر ایک کے ایک ایک سرے کو ایک جگہ جوڑنے سے ایک تپائی بنائی گئی ہے، کھمبوں کے نیچے کے سرے ایک ایسی کھردری افقی سطح پر قائم ہیں کہ پھسلنا ممکن نہیں۔ ان کے پایوں سے جو مثلث بنتا ہے اس کے اضلاع ۴، ۵، ۶ فٹ ہیں اس کے راس سے ایک وزن و لٹکایا گیا ہے اگر کھمبوں پر تناؤ $\text{ت}_{1}$، $\text{ت}_{2}$، $\text{ت}_{3}$ ہوں تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{ت}_{1}}{25} = \frac{\text{ت}_{2}}{14} = \frac{9\,\text{و}}{45\ 59\sqrt{18}}$

(۳۰)

# دوسرا باب

## متوازی قوتیں۔ معیار اثر۔ جفت

۳۰۔ ایک استوار جسم پر دو متوازی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ اُن کا حاصل معلوم کرنا۔

صورت اوّل ۔ فرض کرو کہ قوتیں موافق ہیں یعنی ایک ہی سمت میں عمل کرتی ہیں ۔

فرض کرو کہ قوتیں ف اور ق ہیں جو جسم کے دو نقطوں ا اور ب پر عمل کرتی ہیں اور بالترتیب خطوں ا ل اور ب م سے تعبیر ہوتی ہیں ۔

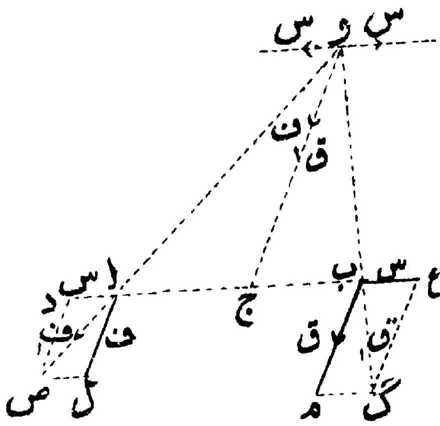
ا اور ب پر دو مساوی اور متقابل قوتیں لگاؤ جن میں سے ہر ایک س کے مساوی ہو اور بالترتیب ب ا اور ا ب کی سمتوں میں عمل کریں اور ا د، ب ع سے تعبیر ہوں ۔ یہ دو قوتیں ایک دوسرے کی تعدیل کرتی ہیں اور جسم کے توازن پر کچھ اثر نہیں ڈالتیں ۔

متوازی الاضلاع ا ل ص د اور ب م گ ع کی تکمیل کرو اور دونوں ص ا ، گ ب کو بڑھاؤ حتیٰ کہ یہ و پر ملیں و ج، ا ل کے متوازی کھینچو جو ا ب سے ج پر ملے ۔

ا پر جو دو قوتیں ف اور س عمل کرتی ہیں اُن کا حاصل فا ہے جو ا ص سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس کے نقطہ عمل کو و پر منتقل کر دو ۔

اسی طرح ب پر عمل کرنے والی قوتیں ق اور س کا حاصل قا ہے جو ب گ سے تعبیر ہوتا ہے ۔ اس کے نقطہ عمل کو بھی و پر لیجاؤ ۔

اب و پر عمل کرنے والی قوت ف کو دو قوتوں میں تحلیل کیا جا سکتا ہے جن میں سے ایک قوت س، اد کے متوازی ہے اور دوسری ف، و ج کے متوازی ہے اسی طرح سے قوت ق کو جو و پر عمل کرتی ہے دو قوتوں میں تحلیل کیا جا سکتا ہے ایک قوت س میں جو ب ع کے متوازی ہے اور دوسرے قوت ق جو و ج کے متوازی ہے۔ پس ابتدائی قوتیں ف اور ق ایک قوت (ف + ق) کے معادل ہیں جو و ج کی سمت میں عمل کرتی ہے یعنی نقطہ ج پر ابتدائی قوتوں کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ (۲۱)




عمل سے ظاہر ہے کہ و ج ا اور ا ل ص متشابہ مثلث ہیں

$$\therefore \quad \frac{\text{و ج}}{\text{ج ا}} = \frac{\text{ا ل}}{\text{ل ص}} = \frac{\text{ف}}{\text{س}} \quad \text{یعنی ف} \times \text{ج ا} = \text{س} \times \text{و ج} \quad \dots\dots (۱)$$

اسی طرح چونکہ مثلث و ج ب اور ب م گ متشابہ ہیں۔ اس لئے

$$\text{ق} \times \text{ج ب} = \text{س} \times \text{و ج} \quad (۲)$$

$$\text{اس لئے ف} \times \text{ج ا} = \text{ق} \times \text{ج ب} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{ج ا}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{ق}}{\text{ف}}$$

یعنی نقطہ ج، خط ا ب کو داخلاً قوتوں کی مقلوب نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

**صورت دوم۔** فرض کرو کہ قوتیں مخالف ہیں یعنی مخالف سمتوں میں عمل کرتی ہیں۔

فرض کرو کہ ان میں سے بڑی قوت ف ہے حسب سابق عمل کرنے سے وتر ا ص اور ب گ ایک دوسرے سے لازماً کسی نقطہ و پر ملیں گے سوائے اس صورت کے جبکہ یہ متوازی ہوں یعنی جب قوتیں ف اور ق مساوی ہوں۔

حسب سابق ابتدائی قوتیں ف اور ق ایک قوت ف۔ق کے معادل ہونگی جو ج و ممدودہ کی سمت میں عمل کرتی ہے یعنی جو ج پر ف کی سمت کے متوازی عمل کرتی ہے۔

صورت اول کے مطابق $\frac{ج ا}{ج ب} = \frac{ق}{ف}$ یعنی ج خط ا ب کو خارجاً قوتوں کی مقلوب نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

خلاصہ یہ کہ اگر دو متوازی قوتیں ف اور ق ایک استوار جسم کے نقاط ا اور ب پر عمل کریں تو

(۱) ان کا حاصل ایک قوت ہوگی جس کا خط عمل متوازی قوتوں کے خط عمل کے متوازی ہوگا۔ نیز جب ترکیبی قوتیں موافق ہوں تو حاصل کی سمت قوتوں کی سمت ہوگی اور جب یہ مخالف عمل کرتی ہوں تو حاصل کی سمت بڑی قوت کی سمت ہوگی۔

(۲) ان کا نقطۂ عمل ج، ا ب پر کا ایسا نقطہ ہوگا کہ (۲۲)

ف × ل ج = ق × ب ج

(۳) ان کے حاصل کی مقدار ترکیبی قوتوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگی جب قوتیں موافق ہوں اور ان کے فرق کے مساوی ہوگی جب قوتیں مخالف ہوں۔

۳۲۔ گزشتہ عمل کے ناممکن ہونے کی صورت۔

دفعہ گزشتہ کی دوسری شکل میں اگر قوتیں ف اور ق مساوی ہوں تو مثلث ص د ا اور گ ع ب ہر لحاظ سے مساوی ہونگے اور اس لئے زاویئے د ا ص اور ع ب گ بھی مساوی ہونگے۔ اس صورت میں خطوط ا ص اور گ ب متوازی ہونگے اور نقطہ و جیسے کسی نقطہ پر نہیں ملیں گے پس اس صورت میں عمل ناکام رہیگا۔

پس معلوم ہوا کہ کوئی واحد قوت دو مساوی مخالف متوازی قوتوں کے مساوی نہیں ہوتی۔

۳۳۔ اگر ہمارے پاس متعدد متوازی قوتیں ہوں جو ایک استوار جسم پر عمل کرتی ہوں تو دفعہ (۳۱) کے متواتر استعمال سے ہم ان کا حاصل معلوم کر سکتے ہیں۔ پہلے ہم پہلی اور دوسری قوت کا حاصل معلوم کرتے ہیں۔ پھر اس حاصل اور تیسری قوت کا حاصل اور علیٰ ہذا القیاس۔ آخری حاصل کی مقدار قوتوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگی۔

اگر متوازی قوتیں سب موافق نہ ہوں تو ان کے حاصل کی مقدار ان قوتوں کے جبری مجموعہ کے مساوی ہوگی جبکہ ہر ایک کے قبل مناسب علامت لگائی جائے۔

۳۴۔ متوازی قوتیں $ق_۱$، $ق_۲$، $ق_۳$ ..... نقاط $ا_۱$، $ا_۲$، $ا_۳$ ..... پر عمل کرتی ہیں جن کے محدد ($لا_۱$، $ما_۱$، $ی_۱$) اور ($لا_۲$، $ما_۲$، $ی_۲$)، ($لا_۳$، $ما_۳$، $ی_۳$) ..... ہیں۔ وہ نقطہ معلوم کرو جس پر ان قوتوں کا حاصل عمل کرتا ہے خواہ قوتیں

کسی سمت میں عمل کریں۔

دفعہ ۱۳ کی رو سے آ۱ اور آ۲ پر عمل کرنے والی قوتوں کا حاصل آ۱ آ۲ کو نقطہ ث۱ پر قطع کرتا ہے جہاں

$$\frac{ق_1}{ق_2} = \frac{ث_1 آ_2}{ث_1 آ_1} = \frac{ی_2 - ث_1 ع_1}{ث_1 ع_1 - ی_1}$$

جہاں ث۱ ع۱ عمود ہے سطح مستوی لا و ما پر۔

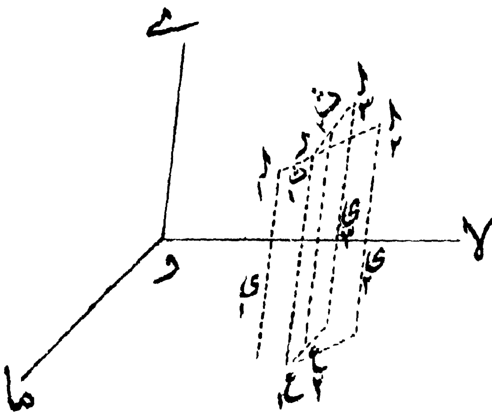
$$\therefore \quad ث_1 ع_1 = \frac{ق_1 ی_1 + ق_2 ی_2}{ق_1 + ق_2}$$

(۲۴) قوت ($ق_1 + ق_2$) جو ث۱ پر عمل کرتی ہے اور قوت ق۳ جو آ۳ پر عمل کرتی ہے ان کا حاصل ث۱ آ۳ کو ث۲ پر قطع کرتا ہے جہاں

$$\frac{ق_1 + ق_2}{ق_3} = \frac{ث_2 آ_3}{ث_2 ث_1} = \frac{ی_3 - ث_2 ع_2}{ث_2 ع_2 - ث_1 ع_1}$$

جس سے $ث_2 ع_2 = \frac{(ق_1 + ق_2) ث_1 ع_1 + ق_3 ی_3}{ق_1 + ق_2 + ق_3} = \frac{ق_1 ی_1 + ق_2 ی_2 + ق_3 ی_3}{ق_1 + ق_2 + ق_3}$

اور علیٰ ہذا القیاس خواہ قوتوں کی تعداد کچھ ہی ہو۔



لہذا بالآخر متوازی قوتوں کے نقطۂ عمل کا ی محدد ہے

$$\bar{ی} = \frac{ق_1 ی_1 + ق_2 ی_2 + ق_3 ی_3 + \cdots}{ق_1 + ق_2 + ق_3 + \cdots\cdots}$$

اسی طرح سے نقطہ عمل کے دیگر محدد ہیں

$$\bar{لا} = \frac{\Sigma (ق\, لا)}{\Sigma (ق)} \quad \text{اور} \quad \bar{ا} = \frac{\Sigma (ق\, ا)}{\Sigma (ق)}$$

**اس نقطہ کو متوازی قوتوں کے نظام کا مرکز کہتے ہیں۔**

## مثالیں

(۱) ایک مربع کے سروں پر ترتیب وار چار قوتیں جن میں نسبت ۱ : ۳ : ۵ : ۷ ہے عمل کرتی ہیں۔ جس نقطہ پر اُن کا حاصل عمل کرتا ہے اُس کا فاصلہ مربع کے مرکز سے معلوم کرو۔

(۲۴) (۲) ا، ب، ج، د ترتیب وار ایک متوازی الاضلاع کے زاویے ہیں۔ موافق متوازی قوتیں جو نسبت ۶ : ۱۰ : ۱۴ : ۱۰ میں ہیں بالترتیب ا، ب، ج، د پر عمل کرتی ہیں بتاؤ کہ ان متوازی قوتوں کا مرکز اور حاصل وہی رہیگا اگر ان قوتوں کی بجائے ۱۲ : ۱۶ : ۲۴ کے مناسب متوازی قوتیں بالترتیب اب، ب ج، ج د، د ا کے نقاط تنصیف پر عمل کریں۔

(۳) متوازی قوتیں ق، ۲ق، ۳ق، ۴ق، ۵ق اور ۶ق ایک خط مستقیم اب کے اُن نقاط پر جن کے فاصلے ا سے بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، اور ۶ انچ ہیں عمل کرتی ہیں۔ ان قوتوں کے مرکز کا مقام معلوم کرو۔

(۴) تین متوازی قوتیں ق، ق، ق ایک مثلث کے راسوں ا، ب، ج پر عمل کرتی ہیں اور بالترتیب ا، ب، ج کے متناسب ہیں ثابت کرو کہ اُن کا حاصل مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔

## معیار اثر

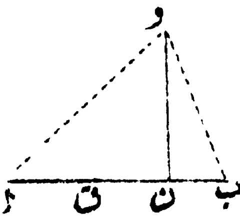
**۳۵ ۔ تعریف ۔** ایک نقطہ معلومہ کے گرد کسی قوت کے معیار اثر

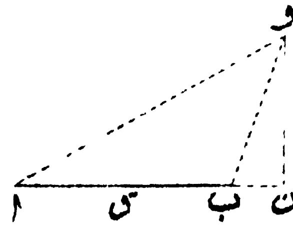
سے وہ مقدار مراد ہے جو قوت مذکور اور اس کے خطِ عمل سے نقطۂ
معلومہ کے عمودی فاصلے کو ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

مثلاً ایک قوت ق کا معیارِ اثر کسی نقطۂ معلومہ و کے گرد ق × ون ہے جہاں
ون نقطۂ و سے ق کے خطِ عمل پر عمود ہے۔

یہ بات قابلِ غور ہے کہ کسی قوت ق کا معیارِ اثر کسی نقطہ و کے گرد صفر نہیں
ہوسکتا تا وقتیکہ قوت صفر نہ ہو یا قوت نقطۂ معلومہ میں سے نہ گزرے جس کے گرد معیارِ اثر
لیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ قوت ق کو مقدار، سمت اور خطِ عمل کے لحاظ خط اب سے تعبیر کیا گیا ہے




وا اور وب کو ملاؤ

تب قوت ق کا معیارِ اثر و کے گرد ق × ون یعنی اب × ون ہے۔
لیکن اب × ون مثلث اب و کے رقبہ کا دوچند ہے۔

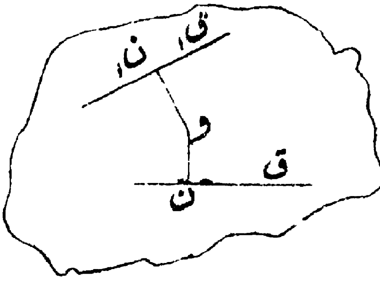
پس قوت ق کا معیارِ اثر کسی نقطہ کے گرد ہندسی طور پر اس مثلث
کے رقبہ کے دوچند سے تعبیر ہوتا ہے جس کا قاعدہ قوت مذکور کو تعبیر کرنے والا
خط ہو اور جس کا راُس وہ نقطہ ہو جس کے گرد معیارِ اثر لیا گیا ہے۔

۳۶۔ ایک نقطہ کے گرد کسی قوت کے معیارِ اثر کے طبیعی معنی۔ (۲۵)

فرض کرو کہ جسم ایک مستوی پتر ا ہے جو ایک چکنے میز پر پڑا ہے اور جسم کا نقطہ و ثابت کر دیا گیا ہے، تب قوت عامل ق کا اثر یہ ہوگا کہ جسم مرکز و کے گرد گھومے اور یہ اثر صفر نہیں ہوگا تا وقتیکہ (۱) قوت ق صفر نہ ہو یا (۲) قوت ق نقطہ و میں سے نہ گزرے جس صورت میں عمود ون صفر ہوگا۔

لہذا حاصل ضرب ق × ون سے قوت ق کے زیر اثر نقطہ و کے گرد جسم کے میلان گردش کا بہترین معیار معلوم ہوتا ہے اس کی عملی طور پر ذیل کی طرح تصدیق ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ پترا دو رسیوں کے زیر عمل ساکن ہے جن کے تناؤ ق اور ق، ہیں اور جو پترے کے ثابت نقطوں کے ساتھ بندھی ہیں اور جن کے خطوط عمل پترے کی سطح مستوی میں ہیں۔ فرض کرو کہ ون اور ون، ثابت نقطہ و سے قوتوں ق اور ق، کے خطوط عمل پر عمود نکالے گئے ہیں۔




اگر ہم طول ون اور ون، کو اور نیز قوتوں ق اور ق، کو ناپیں تو ہمیں معلوم ہوگا کہ حاصل ضرب ق × ون ہمیشہ حاصل ضرب ق، × ون، کے مساوی ہے اس لئے قوتیں ق اور ق، جسم کو نقطہ و کے گرد گھمانے کی مساوی مگر متقابل قابلیت رکھیں گی اگر ان کے معیار اثر نقطہ و کے گرد مساوی ہوں۔

ان قوتوں ق اور ق، کو اس طرح ناپ سکتے ہیں کہ رسیوں کو ہلکی چکنی چرخیوں پر سے گزارا جائے اور ان کے سروں پر اس قدر اوزان لٹکا دئے جائیں کہ تعادل پیدا ہو جائے۔ یہ اوزان رسیوں کے تناؤں کے ناپ ہونگے یا رسیوں کو کمانی دار ترازوؤں کے کنڈوں سے باندھا جائے اور ان ترازوؤں کو مثل دفعہ ۷ اسکے پڑھ لیا جائے۔

۲۷۔ مثبت اور منفی معیار اثر۔ دفعہ ماقبل میں اگر صرف ایک ہی قوت ق پترے

پر عمل کرے تو وہ جسم کو گھڑی کی سوئیوں کے مخالف سمت میں گھمائیگی جبکہ گھڑی میز پر اس طرح رکھی ہے کہ اس کا رخ اوپر کو ہے۔ برعکس اس کے اگر صرف قوت ق ایسے پر عمل کرے تو وہ جسم کو اوسی سمت میں گھمائے گی جس سمت میں گھڑی کی سوئیاں حرکت کرتی ہیں نقطہ و کے گرد ف کے معیار اثر کو جو سمت میں ہے مثبت معیار اثر کہتے ہیں اور (۲۶)
ق کے معیار اثر کو جو سمت میں ہے منفی معیار کہتے ہیں۔

ایک نقطہ کے گرد متعدد قوتوں کے معیار اثروں کے جبری مجموعہ سے ان قوتوں کے معیار اثروں کا مجموعہ مراد ہوتا ہے جبکہ ہر معیار اثر کو اس کی مناسب علامت کے ساتھ لیا جائے۔

۳۸۔ کسی دو قوتوں کے معیاروں کا جبری مجموعہ جو ان کی سطح مستوی کے کسی نقطہ و کے گرد لیا گیا ہے اسی نقطہ کے گرد ان کے حاصل کے معیار اثر کے مساوی ہوتا ہے۔

**صورت اول۔** فرض کرو کہ قوتیں ف اور ق ایک دوسرے سے نقطہ ا پر ملتی ہیں۔

و سے خط و ج قوت ف کی سمت کے متوازی کھینچو تاکہ ق کے خط عمل سے ج پر ملے۔

فرض کرو کہ ا ج قوت ق کی مقدار کو تعبیر کرتا ہے اسی پیمانہ پر قوت ف کو ا ب سے تعبیر کرو۔

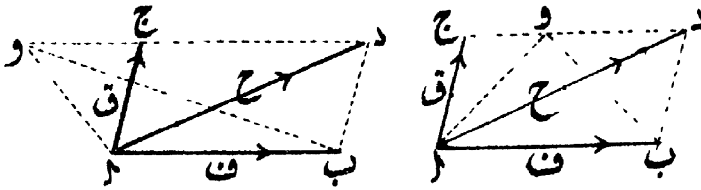
متوازی الاضلاع ا ب د ج کی تکمیل کرو اور و ا، و ب کو ملاؤ۔

تب ا د قوتوں ف اور ق کے حاصل ح کو تعبیر کرے گا۔

(عہ) اگر و زاویہ د ا ج کے باہر ہو جیسا کہ شکل اول میں دکھایا گیا ہے تو ہمیں ثابت کرنا چاہیے کہ

۲ △ و ا ب + ۲ △ و ا ج = ۲ △ و ا د

کیونکہ ف اور ق کے معیار اثر نقطہ و کے گرد ایک ہی سمت میں ہیں۔




چونکہ اب اور ود متوازی ہیں اس لئے △ واب = △ داب = △اج د

∴ ۲△واب + ۲△واج = ۲△اج د + ۲△واج = ۲△ واد

(ب) اگر و زاویہ ج اد کے اندر واقع ہو جیسا کہ شکل دوم میں دکھایا گیا ہے تو ہمیں ثابت کرنا چاہیئے کہ ۲△اوب - ۲△اوج = ۲△ اود

(کیونکہ ف اور ق کے معیار اثر و کے گرد مخالف سمتوں میں ہیں) حسب سابق △اوب = △ داب = △اج د

اس لئے ۲△اوب - ۲△اوج = ۲△اج د - ۲△ واج = ۲△ واد

**صورت دوم۔** فرض کرو کہ قوتیں ف اور ق متوازی ہیں۔

وسے واج لب قوتوں اور ان کے حاصل ح (= ف + ق) پر عمود کھینچو تا کہ ان سے بالترتیب ا، ب اور ج پر ملے۔

دفعہ ۳۱ کی رو سے ف × اج = ق × ج ب ......... (۱) (۴۷)

اس لئے ف اور ق کے معیار اثروں کا مجموعہ نقطہ و کے گرد

= ق × وب + ف × وا = ف (وج + ج ب) + ف (وج - اج)

= (ف + ق) × وج، مساوات (۱) سے

= حاصل کا معیار اثر و کے گرد۔

اِن صورتوں میں جبکہ نقطہ و کا کوئی اور مقام ہو یا قوتیں متوازی اور مخالف ہوں اس مسئلہ کا ثبوت طالب علم بہ آسانی فراہم کرسکتا ہے۔

۳۹ — اگر نقطہ و جس کے گرد معیار اثر لیئے گئے ہیں حاصل قوت کے خط عمل پر واقع ہو تو حاصل کا معیار اثر اس نقطہ کے گرد صریحاً صفر ہوگا۔ لہٰذا اس صورت میں نقطہ مذکور کے گرد ترکیبی قوتوں کے معیار اثروں کا جبری مجموعہ معدوم ہوجاتا ہے پس دو قوتوں کے معیار اثر اُن کے حاصل کے خطِ عمل پر کے کسی نقطہ کے گرد مساوی اور مختلف العلامت ہوتے ہیں۔

**۴۰ — معیار اثروں کا عام مسئلہ — اگر متعدد قوتیں ف، ق، م، س... ایک ہی مستوی میں ایک استوار جسم پر عمل کریں تو ان کے مستوی میں کسی نقطہ و کے گرد ان کے معیار اثروں کا جبری مجموعہ اس نقطہ کے گرد انکے حاصل کے معیار اثر کے مساوی ہوگا۔**

فرض کرو کہ ف۱ حاصل ہے ف اور ق کا

اور ف۲ حاصل ہے ف۱ اور م کا

اور ف۳ حاصل ہے ف۲ اور س کا

علیٰ ہٰذا القیاس یہاں تک کہ آخری حاصل ملجائے۔

تب ف۱ کا معیار اثر و کے گرد = ف اور ق کے معیار اثروں کے مجموعہ کے (دفعہ ۳۸)

نیز ف۲ کا معیار اثر و کے گرد = ف۱ اور م کے معیار اثروں کے مجموعہ کے

= ف۱ اور ق اور س کے معیار اثروں کے مجموعہ کے

اسی طرح سے ف۳ کا معیار اثر د کے گرد = ف۲ اور س کے معیار اثروں کے مجموعہ کے

= ف۱، ق، ۲ اور س کے معیار اثروں کا مجموعہ

علیٰ ہذا القیاس یہاں تک کہ سب قوتیں محسوب کر لی جائیں۔

پس آخری حاصل کا معیار اثر

= ترکیبی قوتوں کے معیار اثروں کا جبری مجموعہ۔

۴۱ — دفعہ ۴۹ کی مانند بآسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ قوتوں کی کسی تعداد کے معیار اثروں کا جبری مجموعہ ان کے حاصل کے خط عمل پر کے کسی نقطہ کے گرد صفر ہوتا ہے اور برعکس اس کے اگر قوتوں کی کسی تعداد کے معیار اثروں کا جبری مجموعہ کسی نقطہ کے گرد صفر ہو تو ان کا حاصل اس نقطہ میں سے گزرے گا جس کے گرد معیار اثر لئے گئے ہیں، یا ان کا حاصل صفر ہوگا اور اس صورت میں قوتیں متعادل ہونگی۔ (۲۸)

پس اس طرح ہم قوتوں کے نظام کے حاصل کے خط عمل پر متعدد نقطے معلوم کر سکتے ہیں۔ کیونکہ ہمیں صرف ایک ایسا نقطہ معلوم کرنا پڑیگا جس کے گرد قوتوں کے معیار اثروں کا جبری مجموعہ صفر ہو جائے۔ تب حاصل کو اس نقطہ میں سے گزرنا لازم ہوگا۔

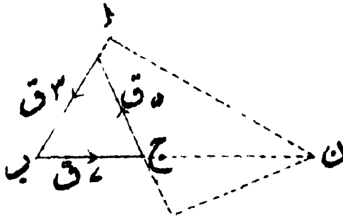
اگر ہمارے پاس متوازی قوتوں کا ایک نظام ہو تو حاصل قوت مقدار اور سمت دونوں کے لحاظ سے متعین ہو جاتی ہے جبکہ ان کے حاصل کے خط عمل کا ایک نقطہ معلوم ہو جائے۔

مثال — تین قوتیں جو ۳ ق، ۵ ق اور ۶ ق کے مساوی ہیں متساوی الاضلاع مثلث ا ب ج کے اضلاع ا ب، ب ج، ج ا کی سمتوں میں عمل کرتی ہیں۔ ان کے حاصل کی مقدار، سمت اور خط عمل دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مثلث کا ہر ضلع ا ہے، نیز فرض کرو کہ حاصل قوت ضلع ا ب ج سے ن پر ملتی ہے، تب قوتوں کے معیار اثر ن کے گرد معدوم ہو جاتے ہیں۔

∴ ۳ ق × (ن ج + ا) جب ۶۰° = ۵ ق × ن ج جب ۶۰°

ن ج = ۱۲/۴




ب ج کے عمود وار سمت میں قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ

= ۵ ق جب ۶۰° - ۲ ق جب ۶۰° = ق ۲√۳

نیز ب ج کی سمت میں قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ

= ۷ ق - ۵ ق جم ۶۰° - ۲ ق جم ۶۰° = ۳ ق

پس حاصل قوت = ق ۲√۳ اور ب ج کے ساتھ زاویہ مس ا ۳√۳/۲ یعنی ۳۰° بناتی ہے اور ن میں سے گزرتی ہے جہاں ج ن = ۳/۲ ب ج

# مثالیں

(۱) ۔ ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع کی سمتوں میں قوتیں جو بالترتیب ا ب، ب ج، ۲ ج ا کے متناسب ہیں عمل کرتی ہیں، ثابت کرو کہ ان کا حاصل بلحاظ مقدار اور سمت کے ج ا سے تعبیر ہوگا۔ اور اس کا خط عمل ب ج سے نقطہ لا پر ملے گا جہاں ج لا = ب ج

(۲) ا ب ج ایک مثلث ہے اور د، ع، ف اس کے اضلاع کے وسطی نقطے ہیں۔ قوتیں جو بالترتیب ا د، ۱/۲ ب ع اور ۱/۳ ج ف سے تعبیر ہوتی ہیں ا د اور ب ع کے نقطۂ تقاطع پر عمل کرتی ہیں، ثابت کرو کہ ان کا حاصل بلحاظ مقدار اور سمت کے ۱/۴ ا ج سے تعبیر ہوتا ہے اور اس کا خطِ عمل ب ج کو نسبت ۲ : ۱ سے تقسیم کرتا ہے۔

(۳) ۔ تین قوتیں ایک مثلث کے اضلاع کی سمتوں میں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر دو قوتوں کا مجموعہ تیسری قوت کے مساوی بلحاظ مقدار اور مقابل بلحاظ سمت ہو تو ان تین قوتوں کا حاصل مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔

(۴) ۔ ایک برقی تار بجلی کے کھمبے کے گرد ہو کر گزرتا ہے تار افق کے متوازی ہے اور کھمبے کے گرد لپٹے ہوئے سرے ایک دوسرے سے ۹۰° کا زاویہ بناتے ہیں کھمبا ایک تار سے

سہارے قایم ہے جو اس کے وسطی نقطہ سے بندھا ہے اور افق سے ۶۰° کا زاویہ بناتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اس تار کا تناؤ برقی تار کے تناؤ کا ۴ مرتبہ گنا ہے ۔

( ۵ ) — ایک رسی ہے جس کا طول دیا گیا ہے ۔ بتاؤ کہ اس کے ایک سرے کو ایک ستون کے قاعدہ سے کسقدر بلندی پر باندھا جائے کہ زمین پر کھڑا ہو ایک شخص ایک دی ہوئی قوت سے اس کے دوسرے سرے کو کھینچے تو ستون الٹ سکنے کا بڑے سے بڑا میلان رکھے ۔

( ۶ ) — ایک قوت کی مقدار معلوم ہے اور اس کے معیار اثر دو دئے ہوئے نقطوں ا اور ب کے گرد معلوم ہیں ۔ ہندسی عمل سے اس کا خط عمل معلوم کرو ۔

( ۷ ) — بلحاظ مقدار اور سمت دو قوتیں دی ہوئی ہیں مستوی کے ان تمام نقطوں کا طریق معلوم کرو جس کے گرد ان قوتوں کا معیار اثر مقدار اور سمت میں ایک ہی ہے ۔

( ۸ ) — اب ایک دائرہ کا قطر ہے اور ب ن اور ب ق ایک دوسرے پر علی القوائم دو وتر ہیں ۔ ثابت کرو کہ ان قوتوں کے معیار اثر جو ب ن اور ب ق سے تعبیر ہوتی ہیں ا کے گرد مساوی ہیں ۔

( ۹ ) — ایک شخص اپنے کندھے پر ایک چھڑی رکھے ہے اور چھڑی کے ایک سرے پر ایک گٹھا اٹھائے جا رہا ہے ۔ اگر اس کے ہاتھ اور کندھے کے درمیانی فاصلہ کو بدلا جائے تو بتاؤ کہ اس سے اس کے کندھے پر کے دباؤ میں کیا تبدیلی پیدا ہوتی ہے ۔

( ۱۰ ) — ایک سائیکل سوار کا وزن ۱۵۰ پونڈ ہے ۔ وہ اپنا تمام وزن سائیکل کے ایک پائے دان پر ڈال دیتا ہے جبکہ پائے دان افقی ہے اور سائیکل کو آگے بڑھنے سے کسی طرح روک دیا گیا ہے ۔ زنجیر کا تناؤ معلوم کرو جبکہ کرینک کا طول ۶ انچ ہو اور زنجیر کے پہیے کا نصف قطر ۴ انچ ہو ۔

( ۱۱ ) ایک خط تولنے کی ترازو ایک قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث ا ب ج کی شکل کے یکساں پترے پر مشتمل ہے جس کا وزن ۳ اونس ہے اس کو اس کے زاویہ قائمہ ج سے ایک ثابت نقطہ سے لٹکایا گیا ہے جس کے ساتھ ایک شاقولی ڈوری بھی لٹک رہی ہے ۔ اس کے ضلع اب پر ایک پیمانہ منقوش ہے جس پر نشانات ۱ اونس ۲ اونس وغیرہ ہیں ۔ کسی خط کا وزن معلوم کرنے کے لئے اس کو اس کے سرے ا پر لٹکاتے

ہیں اور جس مقام پر شاقولی ڈوری پیمانہ کو قطع کرتی ہے اس کو پیمانہ میں پڑھ لیتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا سے نشانات کے فاصلے سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

(۱۲) پتوں کا ایک تاش میز پر رکھا گیا ہے جس کا ہر پتہ اپنے سے نچلے پتہ سے طول کے رخ باہر نکلا ہوا ہے۔ اگر ہر پتہ اتنا باہر نکلا ہوا ہو جتنا کہ ممکن ہے تو ثابت کرو کہ یکے بعد دیگرے پتوں کے سروں کے درمیانی فاصلے ایک سلسلہ موسیقیہ بناتے ہیں۔

(۱۳) — ایک اسطوانہ کا طول ب ہے اور اس کے قاعدہ کا قطر ج ہے۔ اسطوانہ کا منہ کھلا ہے اور اسطوانہ ایک افقی سطح پر ٹکا ہوا ہے۔ ایک یکساں سلاخ جزءً اسطوانہ کے اندر ہے اور اس کے اوپر کے اور نیچے کے کناروں کو مس کرتی ہے۔ اگر اسطوانہ کا وزن سلاخ کے وزن کا ن گنا ہو تو سلاخ کا طول معلوم کرو جبکہ اسطوانہ الٹنے کے عین قریب ہو۔ (۳۰

## جفت

۴۳ — **تعریف** - دو مساوی مگر مخالف متوازی قوتیں جن کے خطوط عمل ایک ہی نہیں ہیں جفت بناتی ہیں۔ بعض مصنف جفت کی بجائے اصطلاح پیچیدگی استعمال کرتے ہیں اور اس اصطلاح جفت سے جفت کے معیار اثر کو تعبیر کرتے ہیں۔

جفت کی مثال کے لئے ملاحظہ ہوں وہ قوتیں جو ایک پیچ شکنجہ کے دستہ پر لگائی جاتی ہیں یا گھڑیال کو چابی دیتے وقت چابی پر جو قوتیں لگائی جاتی ہیں یا دروازے کو کھولنے کے لئے اس کے دستہ پر ہاتھ سے جو قوت لگائی جاتی ہے۔

جفت کے بازو سے وہ عمودی فاصلہ مراد ہوتا ہے جو اس کی دو قوتوں کے خطوط عمل کے درمیان ہو۔

جفت کے معیار اثر سے جفت کی ایک قوت اور جفت کے بازو کا حاصل ضرب مراد ہوتا ہے مثلاً جفت (ق، ق) کا بازو اب ہے اور اس کا معیار اثر ق × اب ہے۔

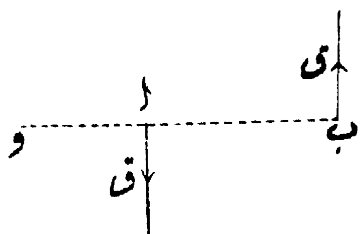
جفت کی سطح مستوی میں کسی نقطہ و سے جفت کی قوتوں کے خطوط عمل پر ایک عمودی خط و ا ب کھینچو جو ان قوتوں سے ا اور ب پر ملے۔

تب و کے گرد قوتوں کے معیار اثروں کا جبری مجموعہ

= ق × و ب - ق × و ا

= ق × ا ب

= جفت کا معیار اثر

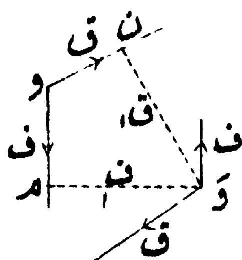



اس سے ظاہر ہے کہ خواہ نقطہ و کہیں لیا جائے اس کے گرد معیار اثر ہمیشہ وہی رہتا ہے۔

۴۳— اگر دو جفت ایک استوار جسم پر ایک ہی مستوی میں عمل کریں اور ان کے معیار اثر مساوی اور مخالف ہوں تو وہ ایک دوسرے کا توازن کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک جفت کی دو قوتیں (ف ، ف) ہیں جو بازو $ف_1$ کے سروں پر عمل کرتی ہیں اور دوسرے جفت کی قوتیں (ق، ق) ہیں جو بازو $ق_1$ کے سروں پر عمل کرتی ہیں۔

صورت اول— فرض کرو کہ ایک قوت ف ایک قوت ق سے کسی نقطہ و پر ملتی ہے اور دوسری دو قوتیں وَ پر ملتی ہیں۔




وَ سے اُن قوتوں پر جو وَ میں سے ہیں گزرتیں عمود وَم اور وَن کھینچو ان عمودوں کے طول صریحاً $ف_1$ اور $ق_1$ ہوں گے۔ (۳۱)

چونکہ جفتوں کے معیار اثر مقدار میں مساوی ہیں اس لئے

$$ف\,ف_1 = ق\,ق_1$$

لہٰذا دفعہ ۱۳ کی رو سے نقطہ دَ، قوتوں ف اور ق کے (جو دَ میں سے گزرتی ہیں) حاصل پر واقع ہوگا اس لئے د دَ حاصل کا خطِ عمل ہے۔

اسی طرح سے فَ اور قَ (جو دَ میں سے گزرتے ہیں) کے حاصل کا خطِ عمل دَ د ہے۔

نیز یہ دونوں حاصل مقداریں مساوی ہیں کیونکہ د پر عمل کرنے والی قوتیں دَ پر عمل کرنے والی قوتوں کے بالترتیب مساوی ہیں اور نیز اسی زاویہ پر عمل کرتی ہیں۔

**صورت دوم۔** فرض کرو کہ جفتوں کو بنانے والی قوتیں سب متوازی ہیں اور کوئی خطِ مستقیم جو ان کی سمتوں پر عمود وار ہے ان سے نقاط ا، ب، ج، د، پر ملتا ہے پس یہ دونوں حاصل ایک دوسرے کو معدوم کرتے ہیں اور اس لئے وہ چار قوتیں جن سے دو جفت بنتے ہیں۔ توازن میں ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اب چونکہ معیار اثر مساوی ہیں اس لئے

ف × ا ب = ق × ج د ............ (۱)

فرض کرو کہ ج پر عمل کرنے والی قوت ف اور ب پر عمل کرنے والی قوت ف کے حاصل کا نقطۂ عمل ل ہے۔ لہٰذا

ف × ب ل = ق × ج ل ..... ..... (۲) دفعہ ۳۱

ق ف
ا ج ل ب د
ف ق

(۲) کو (۱) میں سے تفریق کرنے سے

ف × ا ل = ق × ل د

پس ا پر عمل کرنے والی قوت ف اور د پر عمل کرنے والی قوت ق کے حاصل کا نقطۂ عمل بھی ل ہے۔

لیکن ان دونوں حاصلوں کی مقدار ف + ق ہے اور ان کی سمتیں متقابل ہیں اس لئے یہ تعادل میں ہیں۔ لہٰذا یہ دو جفت جن چار قوتوں پر مشتمل ہیں وہ باہم متوازن ہیں۔

۴۴ — چونکہ ایک ہی سطح مستوی کے دو جفت جن کے معیار اثر مساوی اور مخالف ہوں ایک دوسرے کا تعادل کرتے ہیں اس لئے اگر ہم ان جفتوں میں

سے ایک جفت کی قوتوں کی سمتوں کو بدل دیں تو ظاہر ہے کہ

**ایک ہی مستوی میں مساوی معیار اثروں والے دو جفت ایک دوسرے کے معادل ہوتے ہیں۔**

(۳۲) **۴۵ — اگر ایک استوار جسم پر ایک ہی سطح مستوی میں متعدد جفت عمل کریں تو یہ سب مل کر ایک جفت کے مساوی ہوتے ہیں جس کا معیار اثر جفتوں کے معیار اثروں کے جبریہ مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔**

فرض کرو کہ جفت ذیل کی قوتوں پر مشتمل ہیں، قوتوں (ف، ف) کا جفت جس کا بازو فا، قوتوں (ق، ق) کا جفت جس کا بازو قا ہے، قوتوں (س، س) کا جفت جس کا بازو را ہے، وغیرہ وغیرہ۔ جفت (ق، ق) کی بجائے ایک اور جفت لگاؤ جس کے اجزائے ترکیبی کا خط عمل وہی ہو جو قوتوں (ف، ف) کا ہے۔ آخرالذکر جفت کی ہر ایک قوت کی مقدار لا ہوگی جہاں لا × فا = ق × قا (دفعہ ۴۴) پس

$$\text{لا} = \text{ق} \times \frac{\text{قا}}{\text{فا}}$$

اسی طرح جفت (س، س) کو نکال کر اس کی بجائے جفت (س $\frac{\text{را}}{\text{فا}}$، س $\frac{\text{را}}{\text{فا}}$) رکھو جس کی قوتیں اسی خط میں عمل کرتی ہیں جس میں قوتیں (ف، ف) عمل کرتی ہیں۔ اسی طرح دوسرے جفتوں کے لیے۔

پس سب جفت مل کر ایک ایسے جفت کے مساوی ہیں جس کی ہر ایک قوت

ف + ق $\frac{\text{قا}}{\text{فا}}$ + س $\frac{\text{را}}{\text{فا}}$ + .... کے مساوی ہے اور جس کا بازو فا ہے

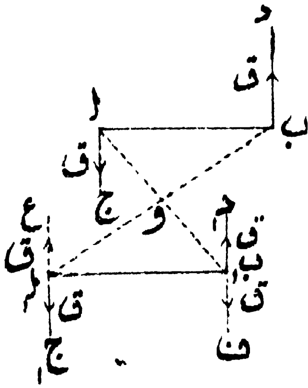
اس جفت کا معیار اثر ہے

ف فا + ق قا + س را ........

پس ابتدائی تمام جفت مل کر ایک جفت کے مساوی ہیں جس کا معیار اثران کے معیار اثروں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔
اگر سب ترکیبی جفتوں کی علامت ایک ہی نہ ہو تو بھی وہی ثبوت صادق آئیگا۔

۴۶ — کسی جفت کا اثر ایک استوار جسم پر وہی رہیگا اگر اس کو اس کی سطح مستوی کے متوازی کسی دوسری سطح مستوی میں منتقل کر دیا جائے اور اس کا بازو اپنے ابتدائی محل کے متوازی رہے۔

فرض کرو کہ جفت دو قوتوں (ق، ق) پر مشتمل ہے جس کا بازو اب ہے اور قوتوں کے خطِ عمل اج اور ب د ہیں۔




فرض کرو کہ اب کوئی خط ہے جو اب کے متوازی اور مساوی ہے۔ اج اور ب د بالترتیب اج اور ب د کے مساوی اور متوازی کھینچو۔
ا پر دو مساوی اور متقابل قوتیں ہر ایک ق کے مساوی لگاؤ جو اج کی سمت میں اور اس کے مقابل سمت اع میں عمل کریں۔
اسی طرح ب پر دو مساوی اور متقابل قوتیں ہر ایک ق کے مساوی لگاؤ جو ب د کی سمت میں اور اس کے متقابل سمت ب ف میں عمل کریں۔ (۴۴)
ان قوتوں کے داخل کرنے سے جسم کے توازن پر کوئی اثر نہیں پڑیگا۔
اب اور اب کو ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ و پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تب و، اب اور اب کا وسطی نقطہ ہوگا۔
اب ایک قوت ق، ا پر عمل کرتی ہے اور ایک قوت ق، ب پر

ب ف کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ اس لئے ان کا حاصل ۲ ق نقطہ و پر ا ج کے متوازی عمل کرتا ہے۔

اسی طرح ایک قوت ق نقطہ ب پر عمل کرتی ہے اور ایک اور قوت ق ا پر ا ع کی سمت میں عمل کرتی ہے، ان دونوں کا حاصل ۲ ق، و پر ب د کے متوازی عمل کرتا ہے۔

یہ دونوں حاصل مساوی اور متقابل ہیں اور اس لئے ایک دوسرے کا موازنہ کرتے ہیں اب ہمارے پاس صرف دو قوتیں بچتی ہیں، ایک قوت ق جو ا پر ا ج کی سمت میں عمل کرتی ہے اور ایک قوت ق، ب پر ب د کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ یہ قوتیں صریحاً ایک جفت بناتی ہیں جس کا بازو اور قوتیں ابتدائی جفت کے بازو اور قوتوں کے مساوی اور متوازی ہیں۔

نیز ا ج اور ب د کی سطح مستوی ا ج اور ب د کی سطح مستوی کے متوازی ہے اس لئے مسئلہ ثابت ہوا۔

نتیجہ صریح۔ دفعہ ۴ کے مسئلہ کی مدد سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ کسی جفت کی بجائے ہم کوئی اور جفت رکھ سکتے ہیں جو اوّل الذکر جفت کی سطح مستوی کے متوازی کسی سطح مستوی میں عمل کرے بشرطیکہ دونوں ان جفتوں کے معیار اثر مساوی ہوں۔

۷۴ — جفت کے محور سے ایک ایسا خط د ن مراد ہوتا ہے جو جفت کی سطح مستوی کے کسی نقطہ د میں سے اس سطح مستوی پر عمود وار کھینچا جائے اور جس کا طول جفت مذکور کے معیار اثر کے متناسب ہو۔ اب یہ معلوم کرنے کے لئے کہ د میں سے خط د ن کس سمت میں کھینچنا چاہیئے یعنی د ق کی سمت متعین کرنے کے لئے ذیل کی قرارداد یاد رکھنا چاہیئے۔

فرض کرو کہ جفت کی سطح مستوی میں ایک گھڑی پڑی ہے۔ اگر جفت کی وجہ سے جسم کی گردش گھڑی کی سوئیوں کی سمت میں ہو تو محور کو گھڑی کے بالائی رخ سے اوپر وار کھینچنا چاہیئے لیکن اگر جفت کی باعث جسم کی

حرکت سوئیوں کی سمت کے مخالف ہو تو محور گھڑی کی پشت میں سے نیچے دار کھینچنا چاہیے۔

دفعہ ۴۲ کی شکل میں وہ محور جو و لا کی مثبت سمت میں کھینچا جائے گا ماے کے مستوی میں اُس جفت کو تعبیر کرے گا جو جسم کو و ما سے و ے کی سمت میں گھمائے۔ برعکس ازاں وہ محور جو لا و ممدود کی سمت میں کھینچا جائے ماے کے مستوی میں اس جفت کو تعبیر کریگا جو جسم کو و ے سے و ما کی سمت میں گھمائے۔

پس محاور و لا، و ما، و ے کے گرد مثبت جفتوں کی گردش کی سمتیں گردونی ترتیب (ما ← ے ← ی ← لا) میں ہوتی ہیں۔

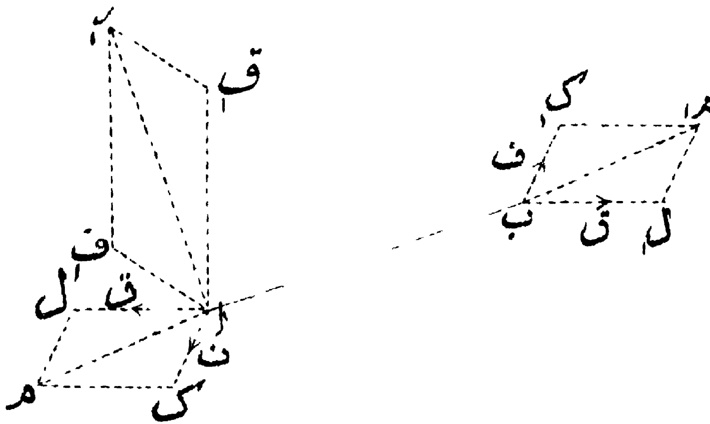
دفعہ ۴۴ سے ظاہر ہے کہ اگر کسی جفت کا معیار اثر اور اس کی سطح مستوی معلوم ہو تو اس کا اثر معلوم ہو سکتا ہے۔ یعنی جب کسی جفت کا معیار اثر اور اس کی سطح پر عماد کی سمت معلوم ہو یا جب کسی جفت کا محور بلحاظ مقدار اور سمت کے معلوم ہو تو جفت کا اثر معلوم ہو سکتا ہے۔

۴۸ — دو ایسے جفتوں کا حاصل معلوم کرو جن کے مستوی متوازی نہیں ہیں۔

فرض کرو کہ ان جفتوں کے مستوی خط ا ب پر ملتے ہیں۔

اب اگر ان جفتوں میں سے ہر دو کا بازو ا ب نہ ہو تو دونوں جفتوں کو ان کے مستویوں میں اس طرح تبدیل کرو کہ ہر ایک کا بازو ا ب ہو جائے لیکن ان کے معیار اثروں میں فرق نہ آئے (دیکھو دفعہ ۴۵)۔

فرض کرو کہ اس بازو کے ساتھ پہلے جفت کی قوتیں اک اور ب ک ہیں جن میں سے ہر ایک ف کے مساوی ہے اور دوسرے جفت کی ال اور ب ل ہیں جن میں سے ہر ایک ق کے مساوی ہے، متوازی الاضلاع اک م ل اور ب ک، م ل کی تکمیل کرو۔ تب ظاہر ہے کہ ا پر قوتیں ف اور ق ترکیب پاکر ایک قوت کے مساوی ہو جاتی ہیں جو ا م سے




تعبیر ہوتی ہے اور ب پر کی قوتیں ف اور ق ایک قوت ب م ہو جاتی ہیں جو ا م کے مساوی متوازی اور متقابل ہے۔

پس دو جفت مل کر ایک جفت بن جاتے ہیں۔

سطوح مستوی ک ا ب ک، اور ل ا ب ل، پر عمود ا ف، اور ا ق، کھینچو جو جفتوں کے محوروں کو تعبیر کریں، تب

ا ف، / ا ق، = جفت (ف، ف) کا معیار اثر / جفت (ق، ق) کا معیار اثر = ف × ا ب / ق × ا ب = ا ک / ا ل

پس ا ف، اور ا ق، بالترتیب ا ک اور ا ل پر عمود دار ہیں اور ان کے متناسب ہیں۔ اس لئے اگر ہم متوازی الاضلاع ا ق، م، ف، کی تکمیل کریں تو ا م، ا م پر عمود ہوگا اور اس کے متناسب ہوگا۔ تب

ا ف، / جفت (ف، ف) کا معیار اثر = ا ق، / جفت (ق، ق) کا معیار اثر = ا م، / جفت (ا م، ب م) کا معیار اثر

پس ا م، حاصل جفت کا محور ہے۔

لہٰذا دو معلومہ جفتوں کی ترکیب سے ایک جفت حاصل ہوتا ہے جس کا محور معلومہ جفتوں کے محور کو متوازی الاضلاع کے قانون کے مطابق ترکیب دینے

سے حاصل ہوتا ہے۔

۴۹ — اس طرح ہم نے دیکھا کہ جفتوں کی ترکیب کا قانون بھی قوتوں کی ترکیب کے قانون کے مماثل ہے بس وہ تمام مسائل جو قوتوں کی ترکیب اور تحلیل سے متعلق ہیں جفتوں کی ترکیب و تحلیل پر بھی صادق آتے ہیں۔

مثلاً (شکل دفعہ ۲۶) اگر ہمارے پاس لا، ما، ی محوروں کے گرد تین جفت ہوں جن کے معیار اثر ل، م، ن بالترتیب و ا، و ب، و ج سے تعبیر ہوتے ہوں تو وہ مل کر ایک جفت بن جاتے ہیں جس کا معیار اثر اس خط کے گرد جس کی سمتی جیوب التمام ( ل/گ ، م/گ ، ن/گ ) ہیں یہ ہوگا

$$گ = \sqrt{ل^2 + م^2 + ن^2}$$

برعکس اس کے اگر ایک خط وہ کے گرد جفت گ ہو اور وہ کے سمتی جیوب التمام (ل، م، ن) ہوں تو یہ جفت محوروں کے گرد بالترتیب تین جفتوں ل گ، م گ اور ن گ کے مساوی ہوگا۔

۵۰ — اب اگر استوار جسم پر مختلف سطوح مستوی میں متعدد جفت عمل کریں تو ہم ان سب جفتوں کو ایک جفت میں ترکیب دے سکتے ہیں۔

کسی نقطہ و کو مبدا قرار دو اور اس میں سے گزرتے ہوئے تین علی القوائم محور ولا، وما، وی، کھینچو۔ تب دفعہ ۴۶ کی رو سے کوئی ایک جفت جس کی سطح مستوی و میں سے نہ گزرتی ہو ایک ایسے معادل جفت میں منتقل کیا جا سکتا ہے جس کی سطح مستوی و میں سے گزرے اور ابتدائی جفت کی سطح مستوی کے متوازی ہو اور اس کا محور و میں سے گزرنے والا ایک خط ہو سکتا ہے جو اس سطح مستوی پر عمود وار ہو۔ اس جفت کو متوازی الاضلاع کے قانون کے مطابق حوالے کے محوروں کے گرد جفتوں میں تحویل کرو اور فرض کرو کہ یہ جفت $ل_1$، $م_1$، $ن_1$ ہیں۔ اسی طرح باقی دئے ہوئے جفتوں میں سے ہر ایک پر یہی عمل کرو پس حسب ذیل جفت حاصل ہوں گے

جفت $ل = ل_1 + ل_2 + ...... = \Sigma(ل)$ محور ولا کے گرد

$$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 + \cdots\cdots = \Sigma(\text{م}_1) \quad \text{محور و ما کے گرد،}$$

$$\text{اور ن} = \text{ن}_1 + \text{ن}_2 + \cdots\cdots = \Sigma(\text{ن}_1) \quad \text{محور و ی کے گرد}$$

(۴۶) یہ جفت ترکیب پاکر ایک واحد جفت بن جاتے ہیں جس کا معیار اثر

$$\text{گ} = \sqrt{\text{ل}^2 + \text{م}^2 + \text{ن}^2}$$

ہے اور اُس کے محور کی سمتی جیوب التمام $\frac{\text{ل}}{\text{گ}}$ ، $\frac{\text{م}}{\text{گ}}$ ، $\frac{\text{ن}}{\text{گ}}$ ہیں۔

۵۱ — اگر ایک واحد قوت اور ایک جفت کسی استوار جسم پر ایک ہی سطح مستوی میں عمل کریں تو ان سے توازن پیدا نہیں ہو سکتا بلکہ یہ دونوں مل کر ایک واحد قوت کے معادل ہوتے ہیں جس کا خط عمل ابتدائی قوت کے خط عمل کے متوازی ہوتا ہے۔

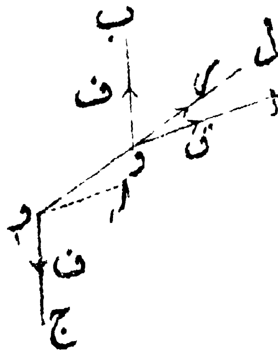
فرض کرو کہ جفت دو مساوی قوتوں (ف، ف) پر مشتمل ہے جس کے خط عمل و ب اور و₁ ج ہیں۔ نیز واحد قوت ق ہے۔

اگر ق جفت کی قوت کے متوازی نہ ہو تو اس کے خطِ عمل کو بڑھاؤ حتیٰ کہ یہ جفت کی ایک قوت سے و پر جا ملے۔ تب ف اور ق جو و پر عمل کرتے ہیں ایک واحد قوت ر کے معادل ہیں جو و ا اور و ب کے درمیان ایک سمت و ل میں عمل کرتی ہے۔

اب ل و کو (اگر ضرورت ہو تو پیچھے کی طرف) اتنا خارج کرو کہ یہ جفت کی دوسری قوت سے و₁ پر جا ملے۔ اب ر کے نقطۂ عمل کو و₁ پر منتقل کردو اور و₁ ا₁، و ا کے متوازی کھینچو۔

تب قوت ر کو دو قوتوں ق اور ف میں تحلیل کیا جا سکتا ہے جن میں سے پہلی و₁ ا₁ کی سمت میں عمل کرتی ہے اور دوسری و₁ ج کی مخالف سمت میں۔ موخر الذکر قوت ف، جفت کی دوسری قوت ف کے ساتھ مل کر جو و₁ ج کی سمت

میں عمل کرتی ہے متعادل ہو جاتی ہے
پس ہمارے پاس ہمارے
نظام کے حاصل کے طور پر
صرف ایک قوت ق بچتی ہے
جو اپنی ابتدائی سمت و ا کے
متوازی و ا کی سمت میں
عمل کرتی ہے۔




اگر ق جفت کی قوتوں ف
کے متوازی ہو تو دفعہ ۱۳ کی رو سے
ظاہر ہے کہ ان کا حاصل ف کے
متوازی اور ق کے مساوی ہوگا۔

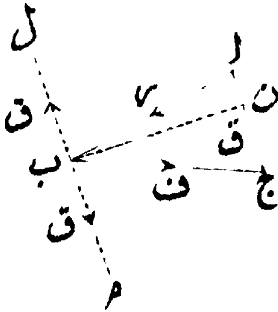
۵۲- اگر تین قوتیں ایک استوار جسم پر عمل کریں اور بلحاظ مقدار، سمت اور خطِ عمل بالترتیب ایک مثلث کے اضلاع سے تعبیر ہو سکیں تو وہ باہم مل کر ایک جفت کے مساوی ہوتی ہیں جس کا معیار اثر مثلث کے رقبہ کا دو چند ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج ہے اور قوتیں ف، ق، ہ بالترتیب مثلث کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب سے تعبیر ہوتی ہیں۔ (۳۷)

ب میں سے ضلع ا ج کے متوازی خط ل ب م کھینچو اور ب پر ق کے مساوی اور متقابل دو قوتیں ب ل اور ب م کی سمت میں لگاؤ۔ تب قوتوں کے مثلث کی رو سے (دفعہ ۲۱) قوتیں ف، ہ اور ق (جو خطِ مستقیم ب ل میں عمل کرتی ہے) متعادل ہیں۔

پس ہمارے پاس صرف دو قوتیں بچتی ہیں جن میں سے ہر ایک ق کے مساوی ہے اور جن میں سے ایک ج ا کی سمت میں عمل کرتی ہے اور دوسری ب م کی سمت میں ظاہر ہے کہ ان سے ایک جفت بنتا ہے جس کا معیار اثر ق × ب ن

ہے جو ج ا × ب ن کے یعنی مثلث ا ب ج کے رقبہ سے کے دوچند کے مساوی ہے۔




نتیجہ صریح - اسی طرح سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اگر ایک استوار جسم پر ایک سطح مستوی میں عمل کرنے والی قوتیں بلحاظ مقدار سمت اور خط عمل کے ایک کثیر الاضلاع کے ضلعوں سے تعبیر ہو سکیں تو وہ ایک جفت کے معادل ہونگی جس کا معیار اثر مذکورہ کثیر الاضلاع کے رقبہ کا دوچند ہوگا۔

## ۵۳ — ایک جفت اور ایک قوت جو اس کی سطح مستوی میں واقع ہو تعادل پیدا نہیں کر سکتے

فرض کرو کہ قوت ق جفت کی سطح مستوی سے و پر ملتی ہے۔ اگر ضرورت ہو تو حسب دفعہ (۴۴) جفت کو ایک ایسے معادل جفت میں تحویل کرو جس کی ایک قوت و میں سے گزرتی ہو۔ تب ق اور یہ قوت ف مل کر ایک قوت بن جائیگی جو و پر عمل کرے گی اور جفت کی دوسری قوت ف سے کہیں نہیں ملیگی، گویا تعادل پیدا نہیں ہوگا۔

---

۴۸

# تیسرا باب

## ہم مستوی قوتوں کے زیر عمل استوار جسم کا توازن

۵۴ — باب ہذا میں ہم ایسے استوار جسم کے تعادل پر بحث کرینگے جس پر قوتیں ایک ہی مستوی میں عمل کرتی ہیں۔

ذیل کے مسئلہ کی مدد سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اگر قوتیں تین ہوں تو جسم کے توازن کی شرائط واحد ذرہ کے توازن کی شرائط میں تحویل ہو جاتی ہیں۔

اگر تین ہم مستوی قوتوں کے زیر عمل کوئی استوار جسم تعادل میں رہے تو تین قوتیں لازمی طور پر ایک دوسرے سے ایک نقطہ پر ملینگی یا باہم متوازی ہونگی۔

اگر سب قوتیں متوازی نہ ہوں تو ان میں سے کم از کم دو ایک نقطہ و پر ملیں گی اوران کا حاصل ایک قوت ہوگی جو و میں سے گذریگی۔ لیکن چونکہ قوتیں ف، ق، ر تعادل میں ہیں اس لئے ان کا حاصل ر کے ساتھ متوازن ہوگا۔ نیز دو قوتیں متوازن نہیں ہو سکتیں جب تک کہ ان کا خطِ عمل ایک نہ ہو۔

اس لئے ر کا خطِ عمل لازمی طور پر و میں سے گزریگا۔

مسئلہ ماقبل کی مدد سے تین مستوی قوتوں کے تعادل کی شرطیں آسانی سے حاصل ہو سکتی ہیں۔ کیونکہ اس صورت میں لازمی طور پر تین قوتیں ایک نقطہ پر ملتی ہیں۔ اس لئے لامی کا مسئلہ استعمال کرنے سے یا قوتوں کو دو علی القوائم سمتوں میں تحلیل کرنے سے یا ترسیمی عمل سے ہم مطلوبہ شرائط حاصل کرسکتے ہیں۔

**۵۵ — مثلثی مسئلے ۔** علم مثلث کے دو مسئلے ایسے ہیں جو سکونیات کے سوالوں کو حل کرنے میں اکثر اوقات بہت مفید ثابت ہوتے ہیں ۔ یہ مسئلے حسب ذیل ہیں :-

اگر ایک مثلث اب ج کے قاعدہ اب پر کوئی نقطہ ف ہو اور اگر ج ف، اب کو دو حصوں م، ن میں اور زاویہ ج کو دو حصوں عہ اور بہ میں تقسیم کرے اور اگر زاویہ ج ف ب، طہ ہو تو

(م + ن) مم طہ = م مم طہ − ن مم بہ ....... (۱)

(م + ن) مم طہ = ن مم ا − م مم ب ...... (۲)

کیونکہ م/ن = اف/ف ب = (اف/ف ج) × (ف ج/ف ب) = (جب اج ف/جب ف اج) ۴۹

× (جب ف ب ج/جب ف ج ب) = (جب عہ/جب(طہ − عہ)) × (جب(طہ + بہ)/جب بہ) = (مم بہ + مم طہ)/(مم عہ − مم طہ)

∴ م مم عہ − ن مم بہ = (م + ن) مم طہ

نیز م/ن = (جب اج ف/جب ف اج) × (جب ف ب ج/جب ف ج ب)

= (جب(طہ − ا)/جب ا) × (جب ب/جب(طہ + ب))

= (مم ا − مم طہ)/(مم ب + مم طہ)

∴ (م + ن) مم طہ

= ن مم ا − م مم ب،

**۵۶ — مثال ۱ ۔** ایک شہتیر کو اس کا مرکز ثقل دو حصوں لا اور میں تقسیم کرتا ہے ۔ شہتیر ایک چکنے

کرّہ کے اندر رکھا گیا ہے، ثابت کرو کہ اگر تعادل کے محل میں اس کا میلان افق کے ساتھ طہ ہو اور اس کے محاذی کرہ کے مرکز پر ۲ عہ زاویہ بنے

$$\text{تو}\quad \text{مس طہ} = \frac{\text{بَ} - \text{اَ}}{\text{بَ} + \text{اَ}}\ \text{مس عہ}$$

اس صورت میں شہتیر کے سروں پر کے دونوں تعامل ر اور س کرہ کے مرکز میں سے گزرتے ہیں۔ اسلئے سلاخ کا مرکز ثقل ث، مہ کے انتصاباً نیچے واقع ہوگا۔ فرض کرو کہ مہ ث، اَ میں سے گزرنیوالے افقی خط سے ن پر ملتا ہے۔
مد، ا ب پر عمود کھینچو۔
تب ∠ د ا مد = ∠ ب مد = عہ
اور ∠ د مہ ث = ۹۰ - ∠ د ث مہ
= ∠ د ا ن = طہ
تب دفعہ ۵۵ کے دوسرے ربط کی رو سے

اَ + بَ ہم مہ ث ب = بَ ہم مہ ا ب - اَ ہم مہ ب ا

یعنی (اَ + بَ) مس طہ = (بَ - اَ) مس عہ

نیز لامی کے مسئلہ کی رو سے

$$\frac{\text{ر}}{\text{جب ا مہ ب}} = \frac{\text{س}}{\text{جب ا مہ ث}} = \frac{\text{و}}{\text{جب ب مہ ث}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{ر}}{\text{جب(عہ+طہ)}} = \frac{\text{س}}{\text{جب(عہ-طہ)}} = \frac{\text{و}}{\text{جب ۲ عہ}}$$

اس سے تعامل معلوم ہوجاتے ہیں۔

**مشق ۲** - ایک وزنی یکساں سلاخ جسکا طول ۲ ا ہے ایک ثابت چکنے نصف کروی پیالہ کے اندر اس طرح ساکن ہے کہ اس کا کچھ حصہ

پیالہ کے باہر ہے پیالہ کا نصف قطر ر ہے۔ پیالہ کا کنارہ متوازی الافق ہے اور سلاخ کا ایک نقطہ کنارہ کو مس کرتا ہے، اگر سلاخ کا میلان افق کے ساتھ طہ ہو تو ثابت کرو کہ

۲ ر جم ۲ طہ = ا جم طہ

۴۰ شکل میں نصف کرہ کی وہ انتصابی تراش دکھائی گئی ہے جو سلاخ میں سے گزرتی ہے، اب سلاخ ہے اور ث اس کا مرکز ثقل ہے اور ج وہ نقطہ ہے جہاں سلاخ پیالہ کے کنارے سے ملتی ہے۔

ا پر کا تعامل کرہ کے مرکز م میں سے گزرتا ہے کیونکہ ا م ہی ایک ایسا خط ہے جو ا میں سے گزرتا ہے اور پیالہ کی سطح پر عمود ہے۔

نیز ج پر کا تعامل سلاخ پر عمود وار ہے۔ کیونکہ یہی ایک سمت ہے جو سلاخ اور پیالہ کے کنارے دونوں پر عمود وار ہے۔

یہ دونوں تعامل ایک دوسرے سے نقطہ د پر ملتے ہیں جو اس ہندسی کرہ پر واقع ہے جس کا ایک جزو زیر بحث پیالہ ہے۔ اس لئے سلاخ کے وسطی نقطہ ث میں سے گزرنے والا انتصابی خط لازماً د میں سے گزریگا

ا میں سے اع افق کے متوازی کھینچو جو د ث سے ع پر ملے اور م ج کو ملاؤ۔

تب ∠ م ا ج = ∠ م ج ا = ∠ ج ا ع = طہ

∴ ا جم طہ = اع = اد جم ۲ طہ = ۲ ر جم ۲ طہ

نیز لامی کے مسئلہ کی رو سے اگر ر اور س بالترتیب ا اور ج پر کے تعامل ہوں

تو
$$\frac{ر}{\text{جب طہ}} = \frac{س}{\text{جب ادگ}} = \frac{و}{\text{جب ادج}}$$

یعنی
$$\frac{ر}{\text{جب طہ}} = \frac{س}{\text{جم ۲ طہ}} = \frac{و}{\text{جم طہ}}$$

# مثالیں

۱ـ ایک مجوف کرہ سے جس کا نصف قطر ا ہے ایک پیالہ بنایا گیا ہے اور پیالہ کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ کرہ کا ہر نصف قطر جو پیالہ کے کنارہ تک کھینچا جائے سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے، نیز مرکز کو پیالہ کے کسی نقطہ ا کے ساتھ ملانے والا نصف قطر سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ بہ بناتا ہے۔ اگر ایک چکنی یکساں سلاخ اس طرح متعادل رہے کہ اس کا ایک سرا ا پر ہو اور سلاخ پر کا ایک نقطہ پیالہ کے کنارہ سے مس کرے تو ثابت کرو کہ سلاخ کا طول ہے

$$\text{۴ ا جب بہ قط} \frac{\text{عہ - بہ}}{۲}$$

۲ـ ایک اسطوانہ کا نصف قطر ر ہے اور اس کے محور کو افق کے متوازی اس طرح ثابت کر دیا ہے کہ اس کا ایک تکوینی خط ایک انتصابی دیوار سے تماس رکھتا ہے۔ ایک چپٹا یکساں شہتیر جس کا طول ۲ ل اور وزن و ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سرا دیوار کے ساتھ لگا ہوا ہے اور دوسرا اسطوانہ پر ہے، اگر شہتیر سمت انتصابی کے ساتھ °۴۵ کا زاویہ بنائے اور رگڑ نہ ہو تو

ثابت کرو کہ $\frac{ل}{ر} = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{\sqrt{۱۰}}$، نیز دیوار پر دباؤ $\frac{۱}{۲}$ و ہوگا اور اسطوانہ کا تعامل $\frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$ و ہوگا۔

۳ — نصف قطر ر کا ایک نصف کروی پیالہ ایک چکنی افقی میز پر پڑا ہے ۴۱
پیالہ کے اندر ایک سلاخ ہے جس کا کچھ حصہ پیالہ سے باہر ہے اگر اس کا وزن پیالہ
کے وزن کے مساوی اور طول ۲ ل ہو تو ثابت کرو کہ تعادل کا محل مساواتِ
ذیل سے حاصل ہوتا ہے

ل جب (عا + با) = ر جب عا = ۲ ر جم (عا + ۲ با)

جہاں افق کے ساتھ نصف کرہ کے قاعدہ کا میلان عا ہے اور سلاخ
کے اُس حصہ کے محاذی جو پیالہ کے اندر ہے نصف کرہ کے مرکز پہ زاویہ
۲ با بنتا ہے۔

۴ — ایک چکنی سلاخ کا طول ۲ ا ہے، اس کا ایک سرا ایک سطح مائل
پر ٹکا ہوا ہے جو افق کے ساتھ زاویہ عا بناتی ہے۔ سلاخ کو دوسری جانب
ایک افقی پٹڑی سہارے ہوئے ہے جو سطح مائل کے متوازی ہے اور اس
سے فاصلہ ج پر ہے ثابت کرو کہ سلاخ اور سطح مائل کا درمیانی زاویہ طا ذیل
کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

ج جب عا = ا جب² طا جم (طا - عا)

۵ — ایک ٹھوس مخروط کا ارتفاع ف ہے اور نصف راسی زاویہ عا
ہے، اس کو ایک چکنی انتصابی دیوار کے ساتھ اس طرح لگا کر رکھا گیا ہے کہ
اس کا مستوی قاعدہ دیوار کو مس کرتا ہے۔ اسے ایک ڈوری سہارے ہوئے
ہے جس کا ایک سرا مخروط کے راس کے ساتھ بندھا ہے اور دوسرا دیوار کے
کسی نقطہ کے ساتھ۔ ثابت کرو کہ ڈوری کا طول زیادہ سے زیادہ ر $\sqrt{1 + \frac{16}{9} \text{مس}^2 \text{عا}}$
ہو سکتا ہے۔

۶ — ایک مخروط کا ارتفاع ف ہے اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر ر ہے،
اس کو ایک رسی کے ذریعے جس کا ایک سرا اس کے راس کے ساتھ اور
دوسرا سرا اس کے قاعدہ کے کسی نقطہ کے ساتھ بندھا ہے ایک چکنی
کھونٹی پر لٹکایا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ اگر حالتِ تعادل میں مخروط کا محور متوازی الافق ہو تو اس کا طول $\sqrt{ف^2 + ۴ ر^2}$ ہونا چاہئے۔

۷ — دو مساوی مستدیر قرص ہیں جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر ر ہے۔ ان کو دو ایسی انتصابی سطوح مستوی کے اندر جن کا درمیانی زاویہ ۲ عما ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ ان کے چپٹے رخ سطوح مذکورہ کے کونہ کے محاذی ہیں اور یہ ایک دوسرے سے اس نقطہ پر مس کرتے ہیں جو سطوح مستوی کے درمیانی زاویہ کے ناصف پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اس چھوٹے سے چھوٹے قرص کا نصف قطر جو مذکورہ بالا قرصوں کو علیحدہ کئے بغیر ان کے اندر لگایا جا سکتا ہے ر (قطع عما - ۱) ہے۔

۸ — ایک تصویر کی چوکھٹ مستطیل شکل کی ہے، اسے ایک چکنی انتصابی دیوار کے ساتھ دو متوازی ڈوریوں کے ذریعہ جو اس کی پشت کے بالاترین کنارے پر کے دو نقطوں کے ساتھ اور دوسری طرف دیوار کے دو نقطوں کے ساتھ بندھی ہیں لٹکایا گیا ہے۔ رسیوں کا طول چوکھٹ کے ارتفاع کے مساوی ہے۔ اگر چوکھٹ کا مرکزِ ثقل تصویر کے مرکزِ ثقل پر منطبق ہو تو تصویر حالتِ تعادل میں دیوار کے ساتھ $مس^{-1} \frac{ب}{۳ ا}$ زاویہ بنائے گی جہاں ا تصویر کا ارتفاع ہے اور ب اس کی موٹائی ہے۔

۹ — ایک تصویر کو ایک دیوار کے ساتھ اس طرح لٹکانا مقصود ہے کہ یہ دیوار کے ساتھ کوئی خاص زاویہ عما بنائے اور سہارنے والی ڈوری دیوار کے ایک ایسے نقطہ کے ساتھ بندھی ہو جو تصویر کے خطِ پائیں سے ف بلندی پر ہے۔ ہندسی عمل سے دریافت کرو کہ ڈوری کو تصویر کی پشت پر کے کس نقطہ پر باندھنا چاہئے۔ نیز ڈوری کا طول معلوم کرو۔

**۵۷ — اگر ایک استوار جسم پر ایک مستوی سطح میں قوتوں کا ایک نظام**

عمل کرے تو یہ سب قوتیں ایک واحد قوت میں یا ایک واحد جفت میں تحویل ہو جاتی ہیں۔

قوتوں کے متوازی الاضلاع کی رُو سے کوئی دو قوتیں جن کے خط عمل ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں ایک واحد قوت میں ترکیب پا سکتی ہیں، ۴۲
نیز دفعہ ۵۱ کی رو سے دو متوازی قوتیں ایک واحد قوت میں ترکیب پا سکتی ہیں بشرطیکہ یہ مساوی اور غیر موافق نہ ہوں۔

پہلے نظام معلومہ کی تمام متوازی قوتوں کو یا متوازی قوتوں کے مختلف جٹوں کو ترکیب دیکر قوتیں بنا لو اب اس حاصل شدہ نظام میں کوئی دو قوتیں لو جو جفت نہ بناتی ہوں اور اُن کا حاصل $R_1$ معلوم کرو، پھر $R_1$ اور باقی ماندہ قوتوں میں سے کسی مناسب قوت کا حاصل $R_2$ معلوم کرو۔ پھر $R_2$ اور کسی اور قوت کا حاصل معلوم کرو، علیٰ ہذا القیاس تا وقتیکہ سب قوتیں ختم ہو جائیں۔

بالآخر ہمارے پاس ایک واحد قوت رہ جائے گی یا دو مساوی متوازی غیر موافق قوتیں بچینگی جو ایک جفت بنائیں گی۔

**۵۸ ۔ اگر قوتوں کا ایک نظام ایک اُستوار جسم پر ایک سطح مستوی میں عمل کرے اور اُنکے معیار اثروں کا جبریہ مجموعہ سطح مستوی پر کے تین نقطوں میں سے ہر نقطہ کے گرد (جو ایک خط مستقیم میں واقع نہ ہوں) جداگانہ صفر ہو تو قوتوں کا یہ نظام توازن میں ہوگا۔**

دفعہ ماقبل کی رُو سے ایک سطح مستوی میں عمل کرنے والی قوتوں کو ترکیب دینے پر وہ واحد قوت یا ایک جفت میں تحویل ہو جاتی ہیں۔

موجودہ صورت میں قوتوں کا حاصل جفت نہیں ہو سکتا کیونکہ اگر جفت ہو تو قوتوں کے معیار اثروں کا مجموعہ سطح پر کے کسی نقطہ کے گرد دفعہ ۴۲ کی رُو سے کوئی مستقل (جو صفر نہ ہو) ہونا چاہیئے اور یہ ہمارے

مفروضہ کے خلاف ہے۔

پس نظام زیر بحث ایک جفت میں تحویل نہیں ہو سکتا۔ اس لئے یا تو یہ نظام تعادل میں ہوگا اور یا ایک واحد قوت ف میں تحویل ہو سکیگا اب فرض کرو کہ وہ نقطے جن کے گرد معیار اثر لئے گئے ہیں ا، ب، ج ہیں، چونکہ دفعہ ۴۰ سے قوتوں کے کسی نظام کے معیار اثروں کا جبری مجموعہ ان کے حاصل کے معیار اثر کے مساوی ہوتا ہے اس لئے حاصل قوت ف کو یا صفر ہونا چاہیئے یا ا میں سے گزرنا چاہیئے۔

اسی طرح چونکہ ف کا معیار اثر ب کے گرد بھی صفر ہے اسلئے ف صفر ہے یا ب میں سے گزرتا ہے۔ گویا ف صفر ہے یا خط اب پر عمل کرتا ہے۔

بالآخر چونکہ ف کا معیار اثر ج کے گرد بھی صفر ہے اس لئے ف صفر ہے یا ج میں سے گزرتا ہے۔

لیکن چونکہ ا، ب، ج ایک خط مستقیم میں واقع نہیں ہیں اسلئے یہ ناممکن ہے کہ ف، خط اب میں عمل کرے اور ج میں سے بھی گزرے۔

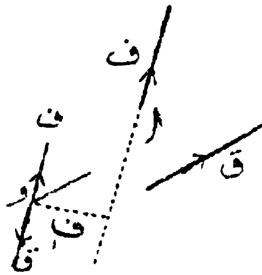
اس لئے امکان صرف یہی رہ جاتا ہے کہ ف صفر ہے یعنی قوتیں تعادل میں ہیں۔

۴۳ نظام اس صورت میں بھی تعادل میں ہوگا اگر (۱) معیار اثروں کا مجموعہ دو نقطوں ا اور ب میں سے ہر ایک کے گرد صفر ہو اور اگر (۲) اب کی سمت میں قوتوں کے اجزاے تحلیلی کا مجموعہ صفر ہو۔ ظاہر ہے کہ شرط (۱) پوری ہو تو حاصل دفعہ ماقبل کی رو سے یا صفر ہوگا یا اب میں سے گزریگا نیز شرط (۲) کے پورا ہونے کی وجہ سے اب کی سمت میں کوئی حاصل عمل نہیں کرتا۔ پس حاصل قوت صفر ہے۔ نیز دفعہ ماقبل کے مطابق اس نظام کا حاصل جفت بھی نہیں ہے اس لئے نظام توازن میں ہے۔

## ۵۹ - ایک استوار جسم پر مستوی سطح میں عمل کرنے والی قوتوں کا

نظام جسم کے کسی اختیاری نقطہ پر عمل کرنیوالی ایک قوت اور ایک جفت کے معادل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ نظام کی کوئی قوت ف ہے جو جسم کے کسی نقطہ ا پر عمل کرتی ہے اور و کوئی اختیاری نقطہ ہے۔ و پر دو مساوی اور متقابل قوتیں لگاؤ جن میں سے ہر ایک ف کے مساوی ہو اور فرض کرو کہ اُن کا خطِ عمل ف کے خطِ عمل کے متوازی ہے۔ اِن سے جسم کی حالتِ تعادل پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔




ا پر کی قوت ف اور و پر کی متوازی اور متقابل قوت ف مل کر ایک جفت بناتی ہیں جسکا معیارِ اثر ف ف ہے۔ جہاں ف عمود ہے و سے ابتدائی قوت ف کے خطِ عمل پر۔

پس ا پر عمل کرنے والی قوت ف مماثل ہے و پر اس سمت میں عمل کرنے والی ایک قوت ف کے مع ایک جفت کے جس کا معیارِ اثر ف ف ہے۔

اسی طرح سے ب پر عمل کرنے والی ایک اور قوت ق مساوی ہے و پر اسی سمت میں عمل کرنے والی ایک قوت ق کے مع ایک جفت کے جسکا معیارِ اثر ق ق ہے جہاں ق نقطہ و سے ق کے خطِ عمل پر عمود ہے۔

اسی طرح ہر ایک قوت کے لئے۔

پس قوتوں کا ابتدائی نظام قوتوں ف، ق، ر ۔۔۔۔ کے مساوی ہے

جو وِیرانِ کی ابتدائی سمتوں کے متوازی عمل کرتی ہیں معہ اتنے ہی جفتوں کے جتنی کہ قوتیں ہیں۔
و پر کی یہ قوتیں ترکیب پاکر ایک واحد حاصل قوت کے مساوی ہو جاتی ہیں اور جفت ترکیب پاکر ایک واحد جفت بن جاتے ہیں جس کا معیار اثر
ف ف + ق ق + ........ کے مساوی ہے۔

۶۰۔ فرض کرو کہ دفعہ ماقبل کی قوتیں تعادل میں ہیں۔ دفعہ ۵۱ کی رو سے ایک جفت اور ایک قوت تعادل پیدا نہیں کرسکتے جب تک کہ ان میں سے ہر ایک جداگانہ صفر نہ ہو۔
چونکہ ف، ف ........ کا حاصل تعادل کے لئے لازماً صفر ہوگا
اس لئے دفعہ ۲۸ کی رو سے اِن کے اجزائے تحلیلی کا مجموعہ دونوں میں علیحدہ علیحدہ صفر ہونا چاہئے۔
نیز معیار اثر ف ف + ق ق + ........ صفر ہونا چاہئے یعنی کسی اختیاری نقطے و کے گرد قوتوں کے معیار اثروں کا جبری مجموعہ صفر ہونا چاہئے
پہلی شرط سے یہ لازم آتا ہے کہ مجموعی طور پر جسم میں کوئی حرکت نہیں ہے
دوسری شرط سے یہ واضح ہوتا ہے کہ کسی نقطہ کے گرد جسم گردش نہیں کر رہا ہے۔
اوپر کے تین روابطِ سکون مع اُن تمام ہندسی روابط کے جو کسی نظام کے حصوں کے درمیان موجود ہوں عام طور پر نظام کے تعادل کو جس پر ایک ہی مستوی میں قوتیں عمل کر رہی ہیں متعین کرنے کے لئے کافی ہوتے ہیں۔
اکثر اوقات قوتوں کو مناسب سمتوں میں تحویل کرنے سے مساواتوں میں بہت سادگی پیدا ہو جاتی ہے۔ بالعموم افقی اور انتصابی سمتیں عمل تحویل کے لئے موزوں ہوتی ہیں۔
نیز جس نقطہ کے گرد معیار اثر لئے جائیں اسکا مقام بھی اہمیت رکھتا ہے۔
معیار اثر لینے کے لئے ایسا نقطہ منتخب کرنا چاہئے کہ معیار اثر کی مساوات میں کم سے کم قوتیں رہ جائیں یعنی جس نقطہ میں سے زیادہ سے زیادہ قوتیں

گزرتی ہوں ۔

۶۱ ۔ یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ گذشتہ دفعہ میں دی ہوئی شرطیں قوتوں کے کسی نظام کے تعادل کے لئے کافی ہیں، اب ثابت کیا جائیگا کہ یہ شرطیں ضروری بھی ہیں۔

فرض کرو کہ ہمیں صرف یہ معلوم ہے کہ پہلی دو شرطیں پوری ہوتی ہیں۔ تب ممکن ہے کہ قوتوں کا نظام ایک جفت میں تحویل ہوتا ہو کیونکہ جفت کی قوتیں مساوی اور متوازی و متقابل ہونے کی وجہ سے ہر سمت میں ان کا جزو تحلیلی صفر ہوگا۔ اس لئے کسی تیسری سمت میں تحلیل کرنے سے ہمیں کوئی نئی شرط نہیں ملے گی۔ اس صورت میں قوتیں متعادل نہیں ہونگی تا وقتیکہ معیار اثر کے بارے میں تیسری شرط بھی پوری نہ ہو۔

اب فرض کرو کہ ہمیں صرف یہ معلوم ہے کہ قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ ایک خاص سمت میں معدوم ہو جاتا ہے اور نیز ایک معلوم نقطہ کے گرد قوتوں کا معیار اثر صفر ہے۔ اس صورت میں ممکن ہے کہ نظام ایک واحد قوت میں تحویل ہو جائے جسکی سمت دئے ہوئے نقطہ میں سے دئے ہوئے خط پر عمود وار ہو کیونکہ ایسی قوت دونوں شرائط کو پورا کرے گی۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ کسی دوسرے خط کی سمت میں قوتوں کے اجزائے ترکیبی کے مجموعہ کا صفر ہونا بھی کیوں لازمی ہے۔

۶۲ ۔ کسی سکونی مسئلہ کو حل کرنیکے لئے طالب علم کو حسب ذیل عمل کرنا چاہئے۔

(۱) حسب شرائط شکل کھینچو

(۲) جسم یا اجسام پر جو قوتیں عمل کر رہی ہوں اُن سب پر نشان لگاؤ، نیز اس امر کا بھی خیال رکھو کہ جب ایک جسم دوسرے کو مس کر رہا ہو تو نامعلوم تعامل کو فرض کیا جائے اور ہر سہارنے والی رسی کے تناؤ پر بھی نشان لگایا جائے نیز جب ایک جسم کسی دوسرے جسم کے ساتھ یا کسی ثابت نقطہ کے ساتھ ۴۵

وصل کیا ہوا ہو تو نامعلوم تعامل فرض کیا جائے۔

(۳) سوال کے ہر ایک جسم یا اجسام کے جٹ پر جو قوتیں عمل کر رہی ہیں اِن کو دو آسان علی القوائم سمتوں میں تحلیل کر کے اجزائے تحلیلی کے مجموعوں کو صفر رکھو۔ عموماً افقی اور انتصابی سمتوں میں تحلیل کرنا سہولت بخش ہوتا ہے

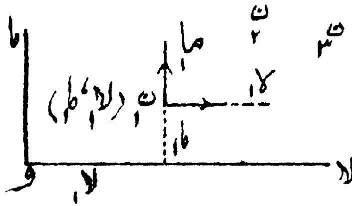
(۴) نیز کسی موزوں نقطہ کے گرد قوتوں کے معیار اثروں کو صفر رکھو۔

(۵) شکل میں طولوں اور زاویوں کے درمیان جو روابط ہوں ان کو لکھ لو

## ۶۳۔ کسی اساسی نقطہ و کے لحاظ سے ہم مستوی قوتوں کے ایک نظام کی حاصل قوت اور جفت کا دریافت کرنا۔

و میں سے کوئی دو علی القوائم محور و لا اور و ما کھینچو۔

فرض کرو کہ نقطہ ن۱ (لا۱، ما۱) پر ایک قوت ف۱ عمل کرتی ہے جسکے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی لا۱، ما۱ ہیں۔




تب قوت لا۱ جو ن۱ پر عمل کرتی ہے معادل ہے و پر عمل کرنے والی متوازی قوت لا۱ کے مع ایک جفت لا۱ ما۱ کے۔

اسی طرح ن۱ پر عمل کرنے والی قوت ما۱ مساوی ہے و پر عمل کرنے والی متوازی قوت ما۱ کے مع ایک جفت لا۱ ما۱ ↺ کے (دیکھو دفعہ ۵۹)

پس ن۱ پر کی قوت ف۱ معادل ہے محور و لا اور و ما کے ساتھ عمل کرنے والی دو قوتوں لا۱ اور ما۱ کے مع ایک جفت لا۱ ما۱ − ما۱ لا۱ ↺ کے۔

اسی طرح دوسرے نقطوں ن۲، ن۳، .... پر عمل کرنیوالی قوتوں کیلئے

پس قوتوں کا کل نظام مماثل ہے و لا، و ما کے ساتھ عمل کرنیوالے دو اجزائے ترکیبی لا اور ما کے اور نقطہ و کے گرد ایک جفت گ کے

جہاں $لا = لا_۱ + لا_۲ + لا_۳ + \cdots = \Sigma لا_۱$

$ما = ما_۱ + ما_۲ + ما_۳ + \cdots = \Sigma ما_۱$

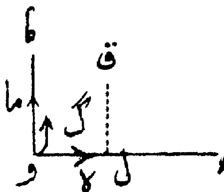
اور $گ = (لا_۱ ما_۱ - ما_۱ لا_۱) + (لا_۲ ما_۲ - ما_۲ لا_۲) + \cdots = \Sigma (لا_۱ ما_۱ - ما_۱ لا_۱)$

لا اور ما ترکیب پاکر ایک واحد قوت ح کے مساوی ہو جاتے ہیں جو و پر عمل کرتی ہے۔

## ۶۴ — ایک مستوی میں عمل کرنیوالی قوتوں کے نظام کے حاصل کے خط عمل کی مساوات۔

حسب دفعہ ماقبل نظام زیر بحث کو کسی محوروں و لا اور و ما کے ساتھ عمل کرنے والے دو اجزائے ترکیبی لا اور ما میں اور نقطہ و کے گرد ایک جفت گ میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔

۴۶ فرض کرو کہ کوئی نقطہ ق (ھ، ک) دئے ہوئے نظام کے حاصل کے خط عمل پر واقع ہے۔ دفعہ ۶۰ کی رو سے اس نقطہ کے گرد قوتوں کے نظام کا معیار اثر قوتوں کے حاصل کے معیار اثر کے مساوی ہے اور بنا علیہ صفر ہے۔




اب نظام کا معیار اثر ق کے گرد

$= گ + لا \times ل ق - ما \times و ل$

$= گ - ھ ما + ک لا = ۰$

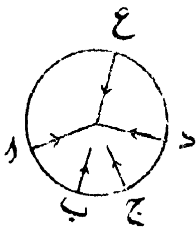
اس لئے (ھ، ک) کا طریق یعنی حاصل کا خط عمل خط مستقیم

گ - لا ما + ما لا = ، ............ ہے -

## ۶۵ - چکنے قبضوں سے وصل کئے ہوئے اجسام -

جب دو جسم قبضہ کے ذریعہ باہم وصل کئے ہوئے ہوں تو بالعموم ایسا ہوتا ہے کہ ایک جسم کا گول سرا دوسرے جسم کے تیار کردہ کھوکھلے خول کے اندر ڈھیلے طور پر پھنسا ہوتا ہے جس کی مثال گولہ اور گھر جوڑ (Ball-and-sockets) ہے یا ایسے ہوتا ہے کہ ایک گول سوئی یا کوئی واصل شئے ہر ایک جسم کے ایک سوراخ میں سے گزرتی ہے جس کی مثال دروازہ کا قبضہ ہے -

دونوں صورتوں میں اگر جسم چکنے ہوں تو قبضہ کے مقام پر ہر ایک جسم پر جو تعامل ہوتا ہے وہ ایک واحد قوت پر مشتمل ہوتا ہے - ساتھ کی شکل میں دو اجسام کو وصل کرنے والے جوڑ کی ایک تراش دکھائی گئی ہے اگر جوڑ چکنا ہو تو اس کے سب نقطوں پر کے تعامل سوئی کے مرکز میں سے گزرینگے اور اس لئے ان سب کا حاصل ایک واحد قوت ہوگی جو مرکز ۵ میں سے گزریگی نیز ایک جسم پر قبضہ کا تعامل دوسرے جسم پر قبضے کے تعامل کے متساوی اور متقابل ہوتا ہے - کیونکہ ان تعاملوں کے مساوی اور متقابل قوتیں سوئی یا دیگر واسطۂ وصل کو تعادل کی حالت میں رکھتی ہیں ظاہر ہے کہ سوئی کا وزن نظر انداز ہو سکتا ہے -




چکنے قبضوں سے متعلق سوالوں کے حل کرنے میں قبضہ پر کے تعامل کی مقدار اور خط عمل دونوں نامعلوم ہوتے ہیں - اس لئے بالعموم سہولت بخش ہوتا ہے کہ کسی چکنے قبضہ کا جو تعامل جسم پر ہو اس کو دو علی الغوائیم سمتوں میں

قبضہ کا تعامل اِن کے مساوی لیکن متقابل اجزائے ترکیبی پر مشتمل ہوگا۔

اب جسم پر عمل کرنے والی قوتیں مع قبضہ کے تعاملوں کے تعادل میں ہیں اور دفعہ ۵۲ کے تعادل کی عام شرطیں قابلِ اطلاق ہوں گی۔

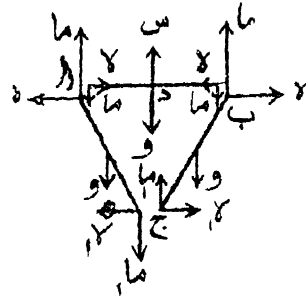
نیز اس غرض کے لئے کہ ہر ایک جسم پر تعامل کے اجزائے ترکیبی کی سمتوں کے متعلق غلطی واقع نہ ہو یہ سہولت بخش ہوتا ہے کہ سلاخوں کو بڑھا کر ملایا نہ جائے بلکہ اُن کے درمیان کچھ جگہ خالی چھوڑ دی جائے جیسا کہ ذیل کی مثال میں کیا گیا ہے۔

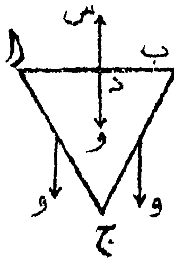
۶۶ — مثال ۔ تین مساوی یکساں سلاخیں جن میں سے ہر ایک کا وزن و ہے چکنے قبضوں کے ذریعہ ایک دوسرے سے اس طرح وصل کی گئی ہیں کہ اِن سے ایک مساوی الاضلاع مثلث بنتا ہے۔ اگر اس نظام کو ایک سلاخ کے وسطی نقطہ سے لٹکایا جائے تو ثابت کرو کہ سب سے نچلے زاویہ پر تعامل $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ و ہوگا اور باقی ہر ایک زاویہ پر و $\frac{\sqrt{۱۳}}{\sqrt{۱۲}}$ ہوگا۔

فرض کرو کہ سلاخوں سے مثلث ا ب ج بنتا ہے اور ضلع ا ب کا وسطی نقطہ د ہے جس سے جسم کو لٹکایا گیا ہے۔

فرض کرو کہ سلاخ ا ب کے نقطہ ا پر قبضہ کا تعامل دو اجزائے ترکیبی پر مشتمل ہے جو بالترتیب م۱ اور ک۱ کے مساوی ہیں اور انتصابی اور افقی سمتوں میں عمل کرتے ہیں۔ پس اِس قبضہ کا تعامل ا ج پر اِن کے مساوی اور متقابل اجزائے ترکیبی پر مشتمل ہے۔ چونکہ کل نظام د میں سے گزرنے والے انتصابی خط کے لحاظ سے متشاکل ہے اس لئے ا ب کے نقطہ ب پر بھی تعامل دونوں م۱ اور ک۱ پر مشتمل ہوگا جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

فرض کرو کہ ب ج کے نقطہ ج پر قبضہ کا تعامل انتصابی اور افقی سمتوں میں م۲ اور ک۲ ہے جہاں م۲ اوپر کی طرف اور ک۲ دائیں طرف عمل کرتا ہے۔




اسلئے ج ا کے نقطہ ج پر اسی قبضہ پر کا تعامل اِن اجزائے ترکیبی کے مساوی اور متقابل اجزائے ترکیبی پر مشتمل ہے جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے۔
اب ا ب کے لئے انتصابی سمت میں تحلیل کرنے سے

س = و + ۲ ما . . . . . . . . . (۱)

جہاں س نقطہ د پر کی میخ کا انتصابی تعامل ہے۔ ج ب کے لئے اُفقی اور انتصابی سمت میں تحلیل کرنے سے اور ج کے گرد معیار اثر لینے سے

لا + لا۱ = ۰ . . . . . . . . . . . (۲)

و = ما + ما۱ . . . . . . . . . . (۳)

اور و × ا جم ۶۰° + لا × ۲ ا جب ۶۰° = ما × ۲ ا جم ۶۰° (۴)

ج ا کے لئے انتصاباً تحلیل کرنے سے

و = ما − ما۱ . . . . . (۵)

اِن مساواتوں کو حل کرنے سے

لا۱ = − $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ و، ما۱ = ۰، ما = و، لا = $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ و اور س = ۳ و

اِس لئے ب پر قبضہ کا تعامل قوت $\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$ (یعنی و $\sqrt{\frac{۱۳}{۱۲}}$ )

(۴۸) کے مساوی ہے اور افق کے ساتھ زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ یعنی مس$^{-1}$ $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ بناتا ہے

نیز ج پر قبضہ کا تعامل ایک افقی قوت $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ و کے مساوی ہے۔

یہ ہم پہلے ہی سے دیکھ سکتے تھے کہ ج پر کا تعامل متوازی الافق ہونا چاہئیے کیونکہ کل نظام خط ج د کے گرد متشاکل ہے اور تاوقتیکہ جزو ترکیبی ہما معدوم نہ ہو جائے ج پر کا تعامل تشاکل کی شرائط کو پورا نہیں کر سکتا۔

# مثالیں

۱۔ ایک پرکار کی ساقوں کے درمیان زاویہ ۲ عہ بنتا ہے، ساقیں یکساں سلاخوں کی بنی ہوئی ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن و ہے۔ پرکار دو میخوں پر جو ایک افقی خط میں ہیں اس طرح قائم ہے کہ اس کا قبضہ نیچے کی طرف اور اس کی ساقوں کے وسطی نقطے میخوں سے مس کرتے ہیں۔ پرکار کی ساقوں کے درمیان زاویہ ۲ عہ قائم رکھنے کے لئے اس کے اوپر کے سروں کے درمیان ایک ہلکی سلاخ رکھ دی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ اس سلاخ پر کا دباؤ اور قبضہ پر کا تعامل ہر ایک ½ و مم عہ کے مساوی ہے۔

۲۔ ایک دروازہ جس کا وزن ۱۰۰ پونڈ ہے دو قبضوں کے ذریعہ جن کا درمیانی فاصلہ ۳ فٹ ہے تھاما گیا ہے اور قبضوں میں سے گزرنے والے انتصابی خط کے گرد گھوم سکتا ہے دروازہ کا مرکز ثقل خط انتصابی سے ۴ فٹ کے فاصلہ پر ہے۔ یہ فرض کر کے کہ دروازہ کے پورے وزن کو صرف نیچے والا قبضہ سہارے ہوئے ہے ہر ایک قبضہ پر کا تعامل دریافت کرو۔

۳۔ ایک پھاٹک کا وزن و ہے اس کے اندر دو نقطوں ج اور د پر دو میخیں ہیں جن کے باہر کے سرے دو افقی شکل کے ہیں۔ ان حلقوں میں سے ا اور ب پر ـــ کی شکل کی کھونٹیاں گزرتی ہیں جو دوسری طرف پھاٹک کے کھمبے میں گڑی ہوئی ہیں اور جن کے گرد پھاٹک گھوم سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ج د، ا ب سے ذرا بڑا ہو تو اوپر کے قبضہ پر دباؤ $\frac{و\sqrt{ا^2+ب^2}}{ب}$ ہوگا لیکن اگر ذرا چھوٹا ہو تو دباؤ $\frac{و\,ل}{ب}$ ہوگا جہاں ۲ ل پھاٹک کا طول ہے

اور د ب = ج د

۴۔ ایک مربع تختہ ایک دیوار کے ساتھ ایک رسی کے ذریعہ جو اس کے اوپر کے کنارہ کے دونوں سروں کے ساتھ بندھی ہے ایک چکنی کھونٹی سے لٹک رہا ہے۔ اگر رسّی کا طول تختہ کے وتر سے کم ہو تو تعادل کے تین محل معلوم کرو۔

۵۔ ایک مربع کا ضلع ۲ ا ہے۔ یہ دو چکنی کھونٹیوں پر جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں اس طرح ساکن ہے کہ یہ انتصابی مستوی میں ہے اگر کھونٹیوں کا درمیانی فاصلہ ج ہو تو ثابت کرو کہ حالت تعادل میں اس کا ایک کنارہ افق کے ساتھ ۴۵° یا جب⁻¹ (ا² − ج²)/ج² زاویہ بناتا ہے۔

۶۔ ایک مساوی الساقین مثلثی پتر افقی خط میں دو چکنی کھونٹیوں کے سہارے انتصابی مستوی میں اس طرح لٹک رہا ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے۔ ثابت کرو کہ اگر قاعدہ سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ جب⁻¹ (جم² عہا) بنائے تو یہ محل تعادل ہوگا۔ اس میں ۲ عہا پتر کے راسی زاویہ ہے اور قاعدہ کا طول کھونٹیوں کے درمیانی فاصلہ کا تین گنا ہے۔

۷۔ ایک منشور جس کی عمودی تراش مساوی الاضلاع مثلث ہے دو مستوی مائل سطحوں پر جو افق کے ساتھ عہا اور بہا زاوے بناتی ہیں اس طرح ساکن ہے کہ اس کے دو کنارے افق کے متوازی ہیں۔ اگر ان کناروں میں سے گزرنے والا مستوی سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ طہا بنائے تو ثابت کرو کہ (۴۹)

سں طہا = [۲√۳ جب عہا جب بہا + جب (عہا + بہا)] / [√۳ جب (عہا − بہا)]

۸۔ ایک مثلث تین سلاخوں سے بنا ہوا ہے اور متوازی الافق محل میں ثابت کر دیا گیا ہے، ایک متجانس کرہ اس پر ٹکا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک سلاخ پر کا تعامل اس کے طول کے متناسب ہے۔

۹۔ قطع ناقص کی شکل کا ایک مستوی پتر ہے، اس کے مزدوج قطروں کے جوڑوں کے سروں پر اسی مستوی سطح میں بیرونی عماد کی سمت میں قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ہر ایک مزدوج قطر کے سرے پر عمل کرنے والی قوت اس مزدوج قطر کے طول کے متناسب ہو تو تعادل ہوگا۔

۱۰۔ ایک لکڑی کی سیڑھی کی شکل ہندسہ ۸ کی ہے اسکو ایک افقی سطح پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کی ہر ایک ساق سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے، اور اسے ایک رسی جو اس کی ساقوں کے وسطی نقطوں کو ملاتی ہے سہارے ہوئے ہے۔ اگر رگڑ نہ ہو تو ثابت کرو کہ جب ایک وزن و ایک ایسے قدم پر رکھا جائے جس کا ارتفاع فرش سے سیڑھی کے طول کا $\frac{1}{ن}$ ہو تو رستی کے تناؤ میں $\frac{1}{ن}$ و مس عہ کا اضافہ ہو جائیگا۔

۱۱۔ ایک ہی موٹائی کی تین یکساں سلاخیں ا ب، ب ج، ج د ہیں جن کے طول بالترتیب ل، ۲ ل، ل ہیں، ان کو ب اور ج پر چکنے قبضوں کے ذریعے وصل کیا گیا ہے۔ یہ سلاخیں ایک چکنے کرہ پر جس کا نصف قطر ۲ ل ہے اس طرح ساکن ہیں کہ ب ج کا وسطی نقطہ اور سرے ا اور د کرہ سے مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ب ج کے وسطی نقطے پر کا دباؤ سلاخوں کے وزن کے $\frac{۹}{۱۱}$ کے مساوی ہے۔

۱۲۔ تین یکساں سلاخوں ا ب، ب ج، ج د ہیں ان کے وزن سلاخوں کے طولوں اَ، بَ، جَ کے متناسب ہیں۔ ان کو ب اور ج پر ملایا گیا ہے اور دو میخوں ف اور ق پر افقی محل میں رکھا گیا ہے۔ جوڑوں ب اور ج پر کے تعامل دریافت کرو اور ثابت کرو کہ میخوں کا درمیانی فاصلہ

$$\frac{اَ^۲}{۲ اَ + بَ} + بَ + \frac{جَ^۲}{۲ جَ + بَ} \quad \text{ہے۔}$$

۱۳۔ ا ب اور ا ج ایک ہی مادہ کی یکساں سلاخیں ہیں جن کا طول ا ہے ان کو ا پر چکنے قبضہ کے ذریعہ وصل کیا گیا ہے۔ د ب، د ایک

اور بے وزن سلاخ ہے جس کا طول ب ہے، اس کا ایک سرا چکنے قبضہ کے ذریعہ ب کے ساتھ وصل کیا ہوا ہے اور دوسرا سرا د ایک چکنے حلقہ کے ساتھ پیوستہ ہے جو اج پر پھسلتا ہے۔ اس نظام کو ایک چھوٹی چکنی میخ پر جو نقطۂ ا پر ہے لٹکایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ سلاخ اج سمت انتصابی کے ساتھ یہ زاویہ بناتی ہے

$$مس^{-1}\frac{ب}{\sqrt{ا^2+ر^2-ب^2}}$$

۱۴۔ چار مساوی یکساں سلاخوں کو جوڑنے سے ایک مربع شکل ابجد بنائی گئی ہے اور اسے جوڑ ا سے لٹکایا گیا ہے اور جسم کی شکل مربع رکھنے کے لئے اج کو رسی سے جوڑ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ چار سلاخوں کے وزن کے نصف کے مساوی ہے، نیز ب یا د پر کے تعامل کی سمت اور مقدار دریافت کرو۔

۱۵۔ تین یکساں سلاخیں اب، ب ج، ج د ہیں جو ب اور ج پر وصل کی ہوئی ہیں اور جن کے طول بالترتیب ۲ ج، ۲ ب، ۲ ج ہیں۔ یہ سلاخیں ایک چکنے مکافی قوس پر جس کا محور انتصابی ہے اور راس اوپر کی طرف ہے متشاکل طور پر ساکن ہیں۔ سب سلاخیں مکافی کو مس کرتی ہیں۔ اگر ہر ایک مائل سلاخ کا وزن و ہو تو ثابت کرو کہ مکافی کا تعامل ان میں سے کسی ایک پر $و\frac{ر^2 ج}{(ر^2+ب^2)ب}$ ہے جہاں ۴ر مکافی کا وتر تماس ہے۔

۱۶۔ ایک تار قطع ناقص کے ایک ایسے ربع کی شکل کا ہے جو صدری محوروں سے منقطع ہو۔ اس کے سروں کے ساتھ دو مساوی اوزان باندھ کر اسے ایک چکنی میخ پر ساکن کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ میخ کے ساتھ نقطۂ تماس کا خروج المرکزی زاویہ ۴۵° اور ۶۰° کے درمیان ہے۔

۱۷۔ دو مساوی چکنے کرے ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن و اور نصف قطر ر ہے۔ ان کو ایک اسطوانہ کے اندر ڈالا گیا ہے۔ اسطوانے کے دونوں سرے کھلے ہیں اور وہ ایک افقی سطح پر رکھا ہوا ہے۔ اسطوانہ کا نصف قطر ر

(۲ ر) ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اسطوانہ کا وزن ۲ و (۱ - $\frac{ل}{ر}$) سے کم ہوگا تو اسطوانہ الٹ جائیگا۔

۱۸ - ایک الٹنے والا برتن اندر سے کروی شکل کا ہے۔ یہ ایک ایسے محور کے گرد جو کرہ کے مرکز سے نیچے ج فاصلہ پر اور برتن کے مرکز ثقل سے اوپر ا فاصلہ پر ہے گھوم سکتا ہے۔ اس کے اندر پیندہ پر ایک وزنی گولہ رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ الٹ جائیگا اگر گولہ کا وزن برتن کے وزن کے $\frac{ا}{ج}$ گنا سے زیادہ ہو۔

۱۹ - ایک مستدیر قرص کا وزن و اور نصف قطر ا ہے۔ اسکو تین انتصابی رسیوں کے ذریعہ جو اس کے محیط پر متشاکلاً بندھی ہیں اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ قرص متوازی الافق ہے ہر ایک رسی کا طول ب ہے۔ ثابت کرو کہ اس کو زاویہ طہ میں سے گھما ہوا رکھنے کے لئے افقی جفت ہوگا

$$\frac{و ا^2 \text{ جب } طہ}{\sqrt{ب^2 - ۴ ا^2 \text{ جب}^2 \frac{طہ}{۲}}}$$

۶۷ - **اچل توازن** - اگر ایک جسم کے دئے ہوئے نقطوں پر ایک مستوی میں متعدد قوتیں عمل کریں اور جسم تعادل میں ہو تو بالعموم ایسا نہیں ہوتا کہ جب ان قوتوں کو ان کے نقاطِ عمل کے گرد کسی زاویہ میں (سب کے لئے مساوی) سے گھما دیا جائے تو بھی جسم تعادل میں رہے۔ اگر ایسا ہو یعنی گردش کے بعد بھی جسم تعادل میں رہے تو توازن کو اچل توازن کہتے ہیں۔

۶۸ - ہم مستوی قوتوں کے ایک نظام کی ہر ایک قوت کو اس کے نقطۂ عمل گرد مساوی زاویہ میں سے گھما دیا جائے تو ان کا حاصل جسم کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزریگا۔

فرض کرو کہ اس ہم مستوی نظام کی کوئی قوت ف۱ ہے جو جسم کے کسی نقطۂ (لا۱، ما۱) پر عمل کرتی ہے اور اس کی سمت عمل محور لا کے ساتھ زاویہ طہ۱ بناتی ہے، نیز فرض کرو کہ محوروں کے متوازی اس کے اجزائے ترکیبی لا۱، ما۱ ہیں۔ اسی طرح دیگر قوتوں کے لئے۔

اب فرض کرو کہ کل نظام کے اجزائے ترکیبی محوروں و لا اور و ما کی سمت میں بالترتیب لا اور ما ہیں اور مبدا و کے گرد ان قوتوں کا معیار اثر گ ہے۔ تب

لا = Σ ف۱ جم طہ۱

ما = Σ ف۱ جب طہ۱

اور گ = Σ ف۱ (لا۱ جب طہ۱ - ما۱ جم طہ۱)

دفعہ ۶۴ کی مانند نظام کے حاصل کے خط عمل کی مساوات ہے

گ + ما لا - لا ما = ۰ ....... (۱)

اب سب قوتوں کو ان کے نقاط عمل کے گرد ایک ہی زاویہ عہ میں سے گھما دو۔ ایسا کرنے سے طہ۱، طہ۱ + عہ ہو جائیگا۔ لہٰذا

ف۱ جم طہ۱ ہو جائیگا ف۱ جم طہ۱ جم عہ - ف۱ جب طہ۱ جب عہ

ف۱ جب طہ۱ ہو جائیگا ف۱ جب طہ۱ جم عہ + ف۱ جم طہ۱ جب عہ

اور ف۱ (لا۱ جب طہ۱ - ما۱ جم طہ۱)

ہو جائیگا ف۱ {لا۱ (جب طہ۱ جم عہ + جم طہ۱ جب عہ)

- ما۱ (جم طہ۱ جم عہ - جب طہ۱ جب عہ)}

یعنی جم عہ × ف۱ (لا۱ جب طہ۱ - ما۱ جم طہ۱)

+ جب عہ × ف۱ (لا۱ جم طہ۱ + ما۱ جب طہ۱)

پس لا ہو جاتا ہے لا جم عہ - ما جب عہ

اور ما ہو جاتا ہے لا جب عہ + ما جم عہ

اور گ ہو جاتا ہے گ جم عہ + ص جب عہ

جہاں ص = Σ (لا لا۱ + ما ما۱)، اس کو نظام کی سکت کہتے ہیں۔

تب نظام کے لئے حاصل کے خط عمل کی مساوات ہو جاتی ہے

گ جم عہ + ص جب عہ + ہا (لا جم عہ - ما جب عہ)

- لا (لا جب عہ + ما جم عہ) = ۰

یعنی جم عہ [گ + ہا لا - لا ما] + جب عہ [ص - ہا ما - لا لا] = ۰

.......(۲)

عہ کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو خط مستقیم جو مساوات (۲) سے تعبیر ہوتا ہے ہمیشہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے جو خطوطِ مستقیم

گ + ہا لا - لا ما = ۰

ص - ہا ما - لا لا = ۰

کا نقطۂ تقاطع ہے یعنی جس کے محدد

$$\frac{\text{گ ما + ص لا}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} \quad ، \quad \frac{\text{ص ما - گ لا}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$$

نیز اس نقطہ کو اچل مرکز کہتے ہیں۔

۵۲ ۶۹ — فرض کرو کہ ہٹاؤ سے پہلے قوتیں تعادل میں تھیں۔ تب

لا = ۰ ، ما = ۰ ، گ = ۰

تب ہٹاؤ کے بعد بھی وہ تعادل میں ہونگی اگر

لا جم عہ - ما جب عہ = ۰ ،

لا جب عہ + ما جم عہ = ۰

اور گ جم عہ + ص جب عہ = ۰

پس اگر قوتوں کو کسی زاویہ میں سے گھمانے کے بعد

ص = ۰ یعنی اگر $\sum$ (لا لا$_1$ + ما ہا$_1$) = ۰

تو ہٹاؤ کے بعد بھی قوتیں متعادل رہیں گی۔ پس تعادل کے اچل ہونے کی شرط ص = ۰ ہے۔

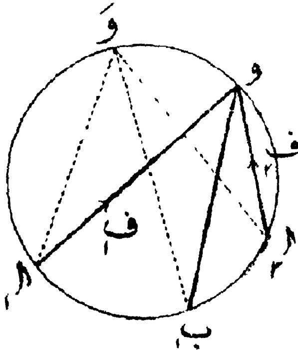
اِس سے یہ بھی نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ایک متعادل نظام کی ہر ایک قوت کو ایک ہی زاویہ عا میں سے گھمایا جائے تو گھمانے کے بعد یہ سب قوتیں ایک جفت کے مساوی ہوتی ہیں جس کا معیار اثر صفر جب عا ہوتا ہے

۷۰ — پانچویں باب میں ہم دیکھیں گے کہ مقدار لا ا لا ا اُس کام کے مساوی ہے جو قوت لا ا کرتی اگر اس کے نقطۂ عمل کو مبدا سے نقطہ (لا ا ، ما ا) تک متحرک کیا جاتا۔ اور لا ا لا ا + ما ا ما ا اُس کام کے مساوی ہے جو قوت ف ا کرتی اگر اس کے نقطۂ عمل کو مبدا سے نقطہ (لا ا ، ما ا) تک متحرک کیا جاتا۔

پس نظام کی سکت اس کام کو تعبیر کرتی ہے جو تمام قوتیں کرتیں اگر انکے نقاطِ عمل کو مبدأ سے اپنے اصلی مقامات تک متحرک کیا جاتا۔

۷۱ — ہندسی طور پر یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ اگر قوتوں کے نظام کو ایک ہی زاویہ عا میں سے گھما دیا جائے تو اُن کا حاصل ہمیشہ ایک خاص نقطہ میں سے گزرتا ہے خواہ عا کچھ ہی ہو۔

فرض کرو کہ دو قوتیں ف ا اور ف ۲ بالترتیب ا ۱ اور ا ۲ پر عمل کرتی ہیں اور ان کے خطِ عمل و پر ملتے ہیں نیز فرض کرو کہ اُن کے حاصل کی سمت و ب ہے جو و ، ا ۱ ، ا ۲ میں سے گزرنے والے دائرہ سے ب پر ملتی ہے۔




اب ف کو زاویہ عا میں سے گھما کر محل ا ۱ وَ میں لے آؤ جو دائرہ کو وَ پر قطع کرتا ہے تب صریحاً و ا ۲ وَ = و ا ۱ وَ = عا یعنی ف ۲ کا نیا محل ا ۲ وَ ہوگا جبکہ

اسے بھی زاویہ $ع_1$ میں سے گھمایا جائے۔

نیز $\angle ب_1 و ا_2 = \angle ب_1 و ا_1$ یعنی $و ب_1$ نئی قوتوں $ف_1$ اور $ف_2$ کے حاصل کا نیا محل ہے جو $ا'_1$ اور $ا'_2$ کے ساتھ عمل کرتی ہیں۔

پس نقطہ $ب_1$ وہ نقطہ ہے جس میں سے $ف_1$ اور $ف_2$ کا ۵۲
حاصل گزرتا ہے خواہ زاویہ $ع_1$ جس میں سے قوتیں نقاط $ا_1$، $ا_2$ کے گرد گھمائی گئی ہیں کچھ ہی ہو۔

نیز زاویہ $و ب_1 و' =$ زاویہ $و ا_1 و' = ع_1$ یعنی حاصل بھی اسی زاویہ میں سے گھوما ہے جس میں سے کہ ترکیبی قوتیں گھومی ہیں۔

اسی طرح سے دیئے ہوئے نظام میں سے کوئی اور قوت $ف_3$ لینے سے جو $ا_3$ پر عمل کرتی ہو ہم ایک اور نقطہ $ب_2$ ایسا معلوم کر سکتے ہیں جس میں سے $ف_3$ اور $ف_1$، $ف_2$ کے حاصل (جو $ب_1$ پر عمل کرتا ہے) کا حاصل گزرتا ہے۔ یعنی $ب_2$ وہ نقطہ ہے جس میں $ف_1$، $ف_2$ اور $ف_3$ کا حاصل ہمیشہ گزرتا ہے۔

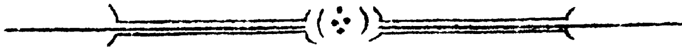
اسی طرح بالتسلسل ترکیب دینے سے تاوقتیکہ کل قوتیں صرف نہ ہو جائیں ہم ایک ایسا نقطہ معلوم کر سکتے ہیں جس میں سے سب قوتوں کا حاصل ہمیشہ گزرتا ہے خواہ ان قوتوں کو کسی بھی مستقل زاویہ میں سے گھمایا جائے۔

اگر قوتیں $ف_1$ اور $ف_2$ متوازی ہوں تو نقطہ $و$ لاتناہی پر چلا جاتا ہے اور دائرہ $ا_1$ اور $ا_2$ میں سے گزرنے والا خطِ مستقیم بن جاتا ہے۔ نیز نقطہ $ب_1$ وہ نقطہ ہے جہاں پر متوازی قوتوں $ف_1$، $ف_2$ کا حاصل $ا_1 ا_2$ سے ملتا ہے اس صورت میں بمطابق دفعہ ۳۱ ذیل کے ربط سے $ب_1$ کا مقام معلوم ہو سکتا ہے

$$ف_1 \times ا_1 ب_1 = ف_2 \times ب_1 ا_2$$

مثال ۔ ثابت کرو کہ تین ہم مستوی قوتیں ف$_1$، ف$_2$، ف$_3$ جو نقاط ا$_1$، ا$_2$، ا$_3$ پر عمل کرتی ہیں اپل تعادل میں ہونگی اگر وہ ایک ایسے نقطہ و پر ملیں جو ا$_1$ ا$_2$ ا$_3$ کے محیط پر واقع ہو اور اگر

ف$_1$ : ف$_2$ : ف$_3$ = ا$_2$ا$_3$ : ا$_3$ا$_1$ : ا$_1$ا$_2$



۵۴

# چوتھا باب

## رگڑ

۷۲ — دفعہ ۱۴ میں ہم نے چکنے اجسام کی تعریف یہ کی تھی کہ اگر ایسے اجسام ایک دوسرے کو مس کریں تو نقطۂ تماس پر انکے درمیان تعامل دونوں اسطحوں پر عمود وار ہوتا ہے اور اس لئے ایک جسم کے دوسرے جسم پر پھسلنے میں کوئی قوت مزاحم نہیں ہوتی۔ اگر ایک کامل چکنے جسم کو ایک کامل چکنی سطح مائل پر رکھا جائے تو جسم اور سطح مستوی کے درمیان کوئی عمل ایسا نہیں ہوتا جو سطح مائل پر جسم مذکور کے پھسلنے میں مزاحم ہو اس لئے جسم ساکن نہیں رہے گا تاوقتیکہ کوئی بیرونی قوت اوسکو پھسلنے سے نہ روکے۔

عملی طور پر کوئی جسم ایسا نہیں ہے جو کامل چکنا ہو۔ مس کرنیوالے ہر دو جسموں کے درمیان کوئی نہ کوئی قوت ضرور ہوتی ہے جو ایک جسم کو دوسرے جسم پر پھسلنے سے روکتی ہے۔ اس قسم کی قوت کو رگڑ کی قوت کہتے ہیں۔

رگڑ کی تعریف۔ اگر دو جسم ایک دوسرے کو مس کرتے ہوں تو ان جسموں کی اُس خاصیت کو رگڑ کہتے ہیں جسکی وجہ سے انکے نقطۂ تماس پر انکے درمیان ایک ایسی قوت عمل کرتی ہے جو

ایک جسم کو دوسرے جسم پر پھسلنے سے روکتی ہے۔ نیز نقطہ تماس
پر عمل کرنیوالی متذکرہ بالا قوت کو رگڑ کی قوت یا قوت فرک کہتے ہیں۔

۷۳ ـــ رگڑ ایک ایسی قوت ہے جس کی ہمیشہ حسب ضرورت
مناسب مقدار عمل میں آتی ہے۔ اس سے ہماری یہ مراد ہے کہ
حرکت کو روکنے کے لئے جس قدر قوت عین کافی ہو سکتی ہے صرف
اسقدر ہی قوت عمل میں آتی ہے۔

ایک وزنی تختی کو ایک افقی میز پر اس طرح رکھو کہ تختی کی مستوی
سطح میز سے مس کرے۔ اب اگر ہم ایک ڈوری کو تختی کے کسی نقطہ کے
ساتھ باندھ کر تختی کو ایسی افقی سمت میں کھینچیں جو تختی کے مرکز ثقل میں سے
گزرے تو ہمیں تختی کو پھسلانے میں کچھ مزاحمت محسوس ہوگی۔ یہ مزاحمت
عین اس قوت کے مساوی ہے جو ہم تختی پر لگاتے ہیں۔ اب اگر ہم تختی
کو کھینچنا چھوڑ دیں تو رگڑ کی قوت کا عمل بھی ختم ہو جائیگا کیونکہ ظاہر ہے کہ
اگر رگڑ کی قوت عمل کرنا بند نہ کرے تو تختی حرکت کرنا شروع کرے گی۔

لیکن یہ واضح رہے کہ دو جسموں کے درمیان رگڑ کی جو مقدار عمل ۵۵
کرسکتی ہے وہ غیر محدود نہیں ہے۔ اگر ہم اس قوت کو جو تختی پر لگائی گئی ہے
بتدریج بڑھائیں تو ہم دیکھینگے کہ بالآخر رگڑ کی قوت ہماری قوت پر غالب
آنے کے لئے کافی نہیں ہوگی اور جسم حرکت کرنا شروع کر دیگا۔

۷۴ ـــ زندگی کے تمام عملی مسائل میں رگڑ کی قوت بہت اہمیت رکھتی
ہے۔ اگر ہمارے جوتوں اور زمین کے درمیان رگڑ نہ ہو تو زمین پر چلنا ناممکن
ہو جائے۔ اگر سیڑھی کے پائیں اور زمین کے درمیان رگڑ نہ ہو تو سیڑھی
مائل محل میں قائم نہ رہ سکے تاوقتیکہ اس کو اس محل میں کسی خارجی قوت کی
مدد سے کھڑا نہ رکھا جائے۔ رگڑ کے بغیر پیچ اور کیلیں لکڑی کے اندر

رہ سکیں اور نہ ہی ریل گاڑی کا انجن ریل کو کھینچ سکے۔

## ۷۵۔ رگڑ کے کلئے حسب ذیل ہیں۔

کلیہ ۱۔ جب دو جسم ایک دوسرے کو مس کرتے ہوں تو نقطۂ تماس پر ان میں سے ایک پر رگڑ کی سمت اس سمت کے متقابل ہوتی ہے جس میں یہ نقطۂ تماس حرکت کرنا شروع کرنیوالا ہو۔

کلیہ ۲۔ جب اجسام تعادل میں ہوں تو رگڑ کی مقدار اتنی ہوتی ہے جتنی کہ حرکت کو روکنے کے لئے عین کافی ہو۔

اوپر کے کلئے عام طور پر درست رہتے ہیں۔ لیکن رگڑ کی زیادہ مقدار جو عمل کرتی ہے محدود ہوتی ہے اور بعض اوقات توازن عین ٹوٹنے کو ہوتا ہے اور اکثر حرکت پیدا ہو جاتی ہے۔

**انتہائی رگڑ کی تعریف**۔ جب ایک جسم دوسرے جسم پر عین پھسلنے کو ہو تو اس صورت میں توازن کو انتہائی توازن کہتے ہیں۔ اور اسوقت رگڑ کی قوت جو عمل کرتی ہے انتہائی رگڑ کہلاتی ہے۔

انتہائی رگڑ کی سمت کلیۂ اول کے تحت ہوتی ہے اس کی مقدار ذیل کے تین کلیوں سے حاصل ہوتی ہے۔

کلیہ ۳۔ انتہائی رگڑ کی مقدار عمادی تعامل کے ساتھ ہمیشہ ایک مستقل نسبت رکھتی ہے اور یہ نسبت صرف اُن اشیاء پر منحصر ہوتی ہے جن سے اجسام بنائے گئے ہیں۔

کلیہ ۴۔ انتہائی رگڑ مس کرنے والی سطحوں کی وسعت اور شکل پر منحصر نہیں ہوتی تاوقتیکہ عمادی تعامل نہ بدلے۔

کلیہ ۵۔ جب حرکت جاری ہو جائے اور ایک جسم دوسرے جسم پر پھسلنا شروع کردے تو رگڑ کی سمت حرکت کی سمت کے متقابل ہوتی ہے۔ اس کی مقدار رفتار پر منحصر نہیں ہوتی لیکن رگڑ کو عمادی تعامل کے ساتھ جو نسبت ہوتی ہے وہ دوران حرکت میں اس نسبت سے قدرے کم ہوتی ہے جو حالت سکون میں انتہائی (۵۶) رگڑ کو تعامل کے ساتھ ہوا کرتی ہے جب جسم عین حرکت کرنے کو ہو۔

اوپر کے کلیے محض تجربہ پر مبنی ہیں اور اس لئے ان کو کسی طرح بھی قطعی طور پر صحیح تصور نہیں کیا جا سکتا اگرچہ معمولی حالات میں ان سے معتدبہ حد تک صحیح نتائج ماخوذ ہوتے ہیں۔

مثلاً اگر ایک جسم کو دوسرے جسم پر اتنے زور سے دبایا جائے کہ مس کرنے والی سطحیں ٹوٹنے کے عین قریب ہوں تو کلیہ ۲ صحیح نہیں رہتا اور رگڑ کے بڑھنے کی شرح عمادی تعامل کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو جاتی ہے۔

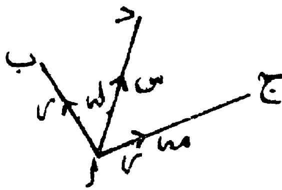
۶۷۔ رگڑ کی قدر۔ انتہائی رگڑ کو عمادی دباؤ کے ساتھ جو مستقل نسبت ہوتی ہے اس کو رگڑ کی قدر کہتے ہیں اور اس کو عام طور پر مہ سے تعبیر کرتے ہیں۔ پس اگر عین اس وقت جبکہ تعادل ٹوٹنے والا ہو قوت فرک ق ہو اور عمادی تعامل ر ہو تو $\frac{ق}{ر}$ = مہ

اور اس لئے ق = مہ ر

مہ کی قیمتیں اشیائے کے مختلف جوڑوں کے لئے مختلف ہوتی ہیں۔ تاہم کوئی ایسی اشیا نہیں ہیں جن کے لئے رگڑ کی قدر اتنی زیادہ ہو کہ ایک کے مساوی ہو جائے۔

رگڑ کا زاویہ۔ جب تعادل انتہائی ہو تو اس وقت انتہائی رگڑ اور عمادی تعامل کو ترکیب دینے سے جو واحد قوت حاصل ہوتی ہے اسکے اور عماد کے درمیانی زاویہ کو رگڑ کا زاویہ کہتے ہیں اور واحد حاصل قوت کو حاصل تعامل کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ ا دو جسموں کا نقطۂ تماس ہے اور ا ب اور ا ج بالترتیب عمادی قوت ر اور رگڑ مہ ر کی سمتیں ہیں۔ نیز فرض کرو کہ حاصل تعامل س کی سمت ا د ہے۔




پس ∠ ب ا د رگڑ کا زاویہ ہے۔ فرض کرو کہ یہ زاویہ لہ ہے۔

تب س جم لہ = ر

اور س جب لہ = مہ ر

پس $س = \sqrt{1 + مہ^2} \times ر$

اور مس لہ = مہ

اس سے ظاہر ہے کہ رگڑ کی قدر رگڑ کے زاویہ کے مماس کے مساوی ہوتی ہے۔

چونکہ رگڑ کی بڑی سے بڑی قیمت مہ ر ہو سکتی ہے۔ اسلئے اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ بڑے سے بڑا زاویہ جو حاصل تعامل کی سمت

عماد کی ساتھ بنا سکتی ہے وہ لہ یعنی مس$^{-1}$ مہ ہوتا ہے۔

پس اگر دو جسم ایک دوسرے کو مس کرتے ہوں اور مشترک عماد کو محور اور (۵۶)
نقطہ تماس کو راس مان کر ایک مخروطہ بنایا جائے جس کا نصف راسی زاویہ مس$^{-1}$ مہ ہو تو یہ ممکن ہے کہ حاصل تعامل کی سمت اس مخروطہ کے اندر یا عین اس کے اوپر واقع ہو لیکن اس کی سمت اس مخروطہ کے باہر واقع نہیں ہوسکتی۔

اس مخروطہ کو **رگڑ کا مخروط** کہتے ہیں۔

۷۷ــ ذیل کی جدول میں چند اشیا کے لئے رگڑ کی قدریں اور رگڑ کے زاویے بتائے گئے ہیں۔ یہ جدول پروفیسر رینکن کی کتاب مشینری اینڈ ملورک سے لی گئی ہے۔

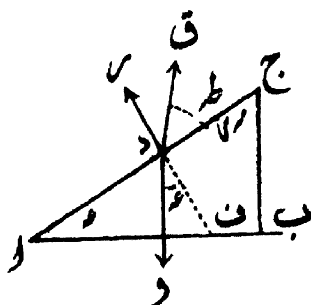
| نام اشیا | مہ | لہ |
|---|---|---|
| لکڑی لکڑی پر (خشک) | ۲۵ء تا ۵ء | ۱۴° تا ۲۶ ½° |
| لکڑی لکڑی پر (صابن لگائی ہوئی) | ۰۴ء سے ۲ء | ۲° تا ۱۱ ½° |
| دھاتیں دھاتوں پر (خشک) | ۱۵ء تا ۲ء | ۸ ½° تا ۱۱ ½° |
| دھاتیں دھاتوں پر (نمدار) | ۳ء | ۱۶ ½° |
| چمڑا دھاتوں پر (خشک) | ۵۶ء | ۲۹ ½° |
| ” ” (نمدار) | ۳۶ء | ۲۰ ½° |
| ” ” (مچرب) | ۱۵ء | ۸ ½° |

## ۷۸ــ کھردری مستوی سطح مائل پر تعادل۔

ایک جسم ایک کھردری مائل مستوی سطح پر رکھا گیا ہے جو افق کے ساتھ رگڑ کے زاویہ سے بڑا زاویہ بناتی ہے اور خط میلان اعظم اور اس جسم میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی میں اس پر ایک قوت عمل کرتی ہے جو اس کو تھامے ہوئے ہے، قوت کے حدود دریافت کرو۔

فرض کرو کہ سطح مائل کا میلان افق کے ساتھ عہ ہے، جسم کا وزن

و ہے اور ر انتصابی تعامل ہے۔




اگر قوت ق سطح مائل کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے جبکہ جسم سطح مائل سے نیچے کی طرف حرکت کرنے کو ہو تو رگڑ اوپر کی طرف عمل کرے گی اور تعادل کی مساواتیں ہونگی

ق جم طہ + مہ ر = و جب عہ ..... (۱)

ق جب طہ + ر = و جم عہ ..... (۲)

اس لئے ق = و (جب عہ − مہ جم عہ)/(جم طہ − مہ جب طہ) = و جب (عہ − لہ)/جم (طہ + لہ) ..... (۳)

اب ر آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے۔

جب جسم سطح مائل پر اوپر کی طرف عین حرکت کرنیکو ہو تو رگڑ مہ ر سطح مائل کے نیچے کی طرف عمل کرتی ہے پس مہ کی علامت بدلنے سے (۵۸)

ق۱ = و جب (عہ + لہ)/جم (طہ − لہ) ..................... (۴)

ق اور ق۱ کے درمیان قوت کی کسی قیمت کے لئے جسم تعادل میں رہیگا لیکن یہ تعادل انتہائی نہ ہوگا یعنی جسم کسی سمت میں عین حرکت کرنے کو نہ ہوگا۔

جسم کو سطح مائل پر اوپر کی طرف عین حرکت دینے کے لئے قوت چھوٹی سے چھوٹی اس وقت ہوگی جب (۴) کم سے کم ہو۔

یعنی جب جم (طہ − لہ) = ۱ یعنی جب طہ = لہ

پس جسم کو سطح مائل پر اوپر کی طرف لیجانا ہو تو کم سے کم قوت اُس سمت میں لگانی چاہیئے جو سطح مائل کے ساتھ رگڑ کے زاویہ کے مساوی زاویہ بناتی ہو -

(۳) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ق صفر ہوگا اگر لہ = عہ یعنی اگر سطح مائل افق کے ساتھ ایسا زاویہ بناتی ہو جو رگڑ کے زاویہ کے مساوی ہو تو جسم سطح مائل پر متعادل رہے گا لیکن یہ تعادل انتہائی ہوگا اور جسم عین نیچے پھسلنے کو ہوگا - اس خاصیت کی وجہ سے رگڑ کے زاویہ کو بعض اوقات ٹھہراؤ کا زاویہ کہتے ہیں -

اس نتیجہ کی مدد سے بھی دو اشیا کے درمیان رگڑ کی قدر تجربہ سے معلوم ہو سکتی ہے - فرض کرو کہ سطح مائل ایک شے کی بنی ہوئی ہے اور جسم ایک تختی ہے جسکا ایک رخ افقی ہے اور جو کسی دوسری شے کی بنی ہوئی ہے - اگر سطح مائل کے زاویۂ میلان کو بتدریج بڑھایا جائے حتیٰ کہ تختی عین پھسلنی شروع ہو جائے تو میلان کے زاویہ کا مماس رگڑ کی قدر ہوگی - اس طریقہ سے دفعہ ۵۲ کے کلیوں کی تصدیق ہو سکتی ہے - پہلے پہل کولوم (Coulomb) نے یہ طریقہ ۱۷۸۵ء میں استعمال کیا تھا -

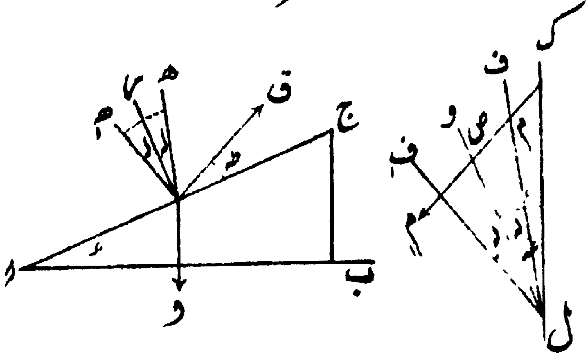
۵۷ - دفعۂ ماقبل کے نتائج ہندسی عمل سے بھی مستنبط ہو سکتے ہیں - کوئی انتصابی خط ک ل کھینچو جو کسی موزون پیمانہ کے موافق و کو تعبیر کرے -

(مثلاً ایک انچ = ایک پونڈ یا ایک انچ = ۱۰ پونڈ)

ل و کو عمادی تعامل کی سمت کے متوازی کھینچو، و ل ف، و ل ف۱ دو مساوی زاوئے بناؤ جن میں سے ہر ایک رگڑ کے زاویہ لہ کے مساوی ہو جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے - تب ل ف، ل ف۱ بلحاظ سمت متوازی ہونگے د ھ اور د ھ۱ کے جن میں د پر تعامل کی قوت بالترتیب عمل کرتی ہے جب کہ جسم سطح مائل پر نیچے کی طرف یا اوپر کی طرف عین حرکت کرنے والا ہو -

اب ایک خط ک م م۱ ایسا کھینچو جو سہارنے والی قوت ق کے متوازی ہو اور ل ف، ل ف۱ سے م اور م۱ پر ملے، اب صریحاً ک ل م اور ک ل م۱ تعادل کے دو انتہائی محلوں کے لئے قوتوں کے مثلث ہیں - پس اسی پیمانہ پر جس کی بموجب ک ل وزن و کو تعبیر کرتا ہے ک م اور ک م۱

(۵۹) دفعہ ماقبل کی قوتوں ق اور ق۱ کو تعبیر کرتے ہیں ۔




صریحاً ول ک = ر اور سمت انتصابی کا درمیانی زاویہ = ع

پس ∠م ل ک = ع − لہ اور ∠م۱ ل ک = ع + لہ

اسی طرح ∠ک ص و = وہ زاویہ جو ر اور ق کے درمیاں ہے = ۹۰ − طہ، پس

∠ک ص ل = ۹۰ + طہ ، ∠ک م ل = ۹۰ + طہ − لہ

اور ∠ک م۱ ل = ۹۰ + طہ + لہ اس لئے

$$\frac{\text{ق}}{\text{و}} = \frac{\text{ک م}}{\text{ک ل}} = \frac{\text{جب ک ل م}}{\text{جب ک م ل}} = \frac{\text{جب (ع − لہ)}}{\text{جب (۹۰ + طہ + لہ)}} = \frac{\text{جب (ع − لہ)}}{\text{جم (طہ + لہ)}}$$

اور
$$\frac{\text{ق}_1}{\text{و}} = \frac{\text{ک م}_1}{\text{ک ل}} = \frac{\text{جب ک ل م}_1}{\text{جب ک م}_1\text{ ل}} = \frac{\text{جب (ع + لہ)}}{\text{جب (۹۰ + طہ − لہ)}} = \frac{\text{جب (ع + لہ)}}{\text{جم (طہ − لہ)}} .$$

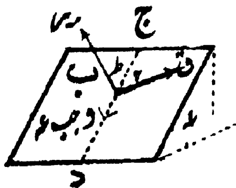
یہ ظاہر ہے کہ ک م کم سے کم اُس وقت ہوگا جب اسے ل ف۱ پر عمود ار کھینچا جائے یعنی جب ق، حاصل تعامل کی سمت د ھ۱ کے ساتھ زاویہ قائمہ بنائے اور اس لئے سطح مائل کے ساتھ زاویہ لہ بنائے ۔

۸۰ — ایک ذرہ کو ایک کھردری مائل سطح پر رکھا گیا ہے جس کا میلان افق کے ساتھ عہ ہے۔ ذرہ پر ایک قوت ق سطح مستوی کے متوازی اس سمت میں عمل کرتی ہے جو سطح مائل پر کے میلان اعظم کے خط کے ساتھ زاویہ بہ بناتی ہے۔ اگر رگڑ کی قدر مہ ہو اور تعادل انتہائی ہو تو معلوم کرو کہ جسم کس سمت میں حرکت کرنا شروع کرے گا۔

فرض کرو کہ ذرہ کا وزن و ہے اور اس پر عمادی تعامل ر ہے۔ سطح مائل پر عمود وار قوتیں صفر ہونی چاہئیں۔

∴ ر = و جم عہ ..........(۱)

وزن کا دوسرا جزو ترکیبی و جب عہ ہوگا جو میلان اعظم کی سمت میں نیچے کی طرف عمل کرے گا۔




فرض کرو کہ رگڑ مہ ر سمت اب میں عمل کرتی ہے جو میلان اعظم کی سمت کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے پس ذرہ ب ا مدودہ کی سمت میں حرکت کرنا شروع کرے گا۔ (۶۰)

چونکہ سطح مائل کے متوازی عمل کرنے والی قوتیں تعادل میں ہیں اس لئے لامی کے مسئلہ کی رو سے

$$\frac{\text{مہ ر}}{\text{جب بہ}} = \frac{\text{و جب عہ}}{\text{جب (طہ + بہ)}} = \frac{\text{ق}}{\text{جب طہ}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

(۱) اور (۲) سے س اور و کو ساقط کرنے سے

$$\text{جم عہ} = \frac{\text{س}}{\text{و}} = \frac{\text{جب عہ جب بہ}}{\text{مہ جب (طہ + بہ)}}$$

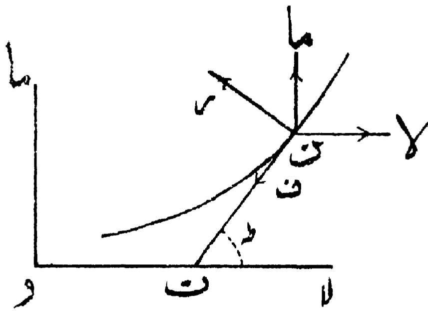
$$\text{لہذا جب (طہ + بہ)} = \frac{\text{مس عہ جب بہ}}{\text{مہ}} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

جس سے طہ حاصل ہو جاتا ہے۔

۱۸ — ایک معلومہ کھردرے منحنی پر دی ہوئی قوتوں کے زیرِ عمل ذرّہ کا تعادل۔

فرض کرو کہ منحنی مستوی ہے اور ذرّہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی بالترتیب لا اور ما ہیں۔

فرض کرو کہ عمادی تعامل س ہے اور مماس ن ت کی سمت میں جو محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے رگڑ کی قوت ف ہے، تب مماس اور عماد کی سمت میں تحلیل کرنے سے




$$\text{لا جم طہ + ما جب طہ = ف} \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\text{لا جب طہ - ما جم طہ = س} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اگر رگڑ کی قدر مہ ہو تو ذرہ تعادل میں رہے گا جب کہ ف، مہ س سے

بڑا یا - مہ ں سے چھوٹا نہ ہو یعنی جبکہ لا جم طہ + ما جب طہ کی عددی قیمت بالحاظ علامت

مہ (لا جب طہ - ما جم طہ)

سے کم ہو یا اس کے مساوی ہو

یعنی جب، (لا + ما س طہ)$^2$ ≷ مہ$^2$ (لا س طہ - ما)$^2$

یعنی جب، (لا + ما $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$)$^2$ ≷ مہ$^2$ (لا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ - ما)$^2$

جہاں $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ معلوم منحنی کی مساوات سے معلوم کیا جاتا ہے۔

۸۲ — اگر منحنی مستوی نہ ہو اور کسی نقطہ ن پر اس کے مماس کی سمتی جیوب التمام (ل م، ن) ہوں، تب چونکہ کھردرے منحنی پر کے کسی نقطہ پر حاصل تعامل عماد کے ساتھ لہ سے بڑا زاویہ نہیں بنا سکتا گویا مماس کے ساتھ $\frac{\pi}{2}$ - لہ سے چھوٹا زاویہ نہیں بنا سکتا اس لئے ذرہ تعادل میں رہے گا اگر وہ زاویہ جو حاصل قوت مماس کے ساتھ بناتی ہے $\frac{\pi}{2}$ - لہ کے مساوی ہو یا اس سے بڑا ہو (۶)

یعنی اگر جم$^{-1}$ $\left(\frac{\text{ل لا + م ما + ن ے}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ے}^2}}\right)$ ≷ $\frac{\pi}{2}$ - لہ

یعنی اگر $\frac{\text{ل لا + م ما + ن ے}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ے}^2}}$ ≷ جب لہ

یعنی اگر $\frac{(\text{ل لا + م ما + ن ے})^2}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ے}^2}$ ≷ $\frac{\text{مہ}^2}{1 + \text{مہ}^2}$

کیونکہ مس لہ = مہ

۸۳ — اگر ایک ذرہ ایک کھردری سطح پر ساکن ہو جس کی مساوات

فہ (لا، ما، ی) = ۰ ہے اور ذرہ پر جو قوتیں عمل کر رہی ہوں اُن کے اجزائے تحلیلی لا، ما، ے ہوں تو تعادل کی مساواتیں آسانی سے معلوم ہو سکتی ہیں کیونکہ اس صورت میں کسی نقطہ (لا، ا، ی) پر سطح کے عماد کی سمتی جیوب التمام

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}\ ،\ \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ا}}\ \text{اور}\ \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}}$$

کے متناسب ہوتے ہیں۔

ذرہ تعادل میں ہوگا اگر وہ زاویہ جو حاصل تعامل عماد کے ساتھ بناتا ہے لا سے بڑا نہ ہو۔

یعنی اگر جم $\dfrac{\text{لا}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \text{ما}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ا}} + \text{ے}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}}}{\sqrt{\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ے}^2}\,\sqrt{\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}\right)^2+\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ا}}\right)^2+\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}}\right)^2}} \gtreqless \text{جم}\ \text{ل}$

یعنی اگر $\dfrac{\left(\text{لا}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \text{ما}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ا}} + \text{ے}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}}\right)^2}{\left(\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ے}^2\right)\left\{\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\right)^2+\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ا}}\right)^2+\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}}\right)^2\right\}} \gtreqless \text{جم}^2\text{ل}$

$$\gtreqless \frac{1}{1+\text{مہ}^2}$$

# مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ کم سے کم قوت جو کسی وزن و کو کھردری افقی سطح پر کھینچ سکتی ہے وجب فہ ہوتی ہے جہاں فہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

۲۔ بتاؤ کہ ایک وزنی گاڑی کے ساتھ رسّے باندھ کر کس سمت میں کھینچا جائے کہ گاڑی کو کم سے کم قوت کے ساتھ ایک پہاڑی پر کھینچ کر لے جائیں۔

۳۔ ایک کھردری سطح مائل پر جو افق کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتی ہے اور جس کی رگڑ کی قدر مہ = $\frac{1}{\text{۲}}$ ہے ایک وزن و رکھا گیا ہے۔ وزن کے ساتھ ایک رسی بندھی ہے جو سطح مائل کی چوٹی ا پر ایک چکنے حلقے میں سے گزرتی ہے اور ایک وزن

ف کو سہارے ہوئے ہے جو انتصابا لٹک رہا ہے اگر = ۳ ف اور رسی ا ج کا بڑے سے بڑا میلان سطح مائل کے میلان اعظم کے خط کے ساتھ ط ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم ط} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

نیز وہ سمت معلوم کرو جس میں وزن و حرکت کرنا شروع کرے گا۔

(۶۳ ۴ — ایک وزن و ایک کھردری سطح مائل پر پڑا ہے جس کا زاویہ میلان افق کے ساتھ عہ ہے اور رگڑ کی قدر ۳ مس عہ ہے۔ ثابت کرو کہ سطح مائل کے متوازی کم از کم افقی قوت جو جسم کو حرکت دے سکتی ہے $\sqrt{3}$ و جب عہ ہے اور جسم ایک ایسی سمت میں حرکت کرنا شروع کرے گا جو سطح مائل کے میلان اعظم کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتی ہے۔

۵ — ایک کھردری سطح مائل کا زاویہ میلان عہ ہے، اس پر ایک وزنی ذرہ رکھا گیا ہے اور اس کو ایک تنی ہوئی بے وزن رسی ان کے ذریعے مائل مستوی میں ایک ثابت نقطہ ا سے ملایا گیا ہے۔ اگر میلان اعظم کا خط اب ہو اور زاویہ ن ا ب، ط کے مساوی ہو جبکہ ذرہ عین حرکت کرنے والا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب ط} = \text{مہ مم عہ}$$

مہ مم عہ کے ایک سے بڑا ہونے کی صورت میں جواب کی تشریح کرو۔

۶ — دو وزنوں ا اور ب کو ایک رسی کے ذریعے ملایا گیا ہے اور ان کو ایک افقی میز پر جس کی رگڑ کی قدر مہ ہے رکھا گیا ہے۔ ایک قوت ق جو مہ (ا + ب) سے چھوٹی ہے ا پر ب ا کی سمت میں لگائی گئی ہے اور اس کی سمت کو افقی سطح مستوی میں بتدریج زاویہ ط میں سے گھمایا گیا ہے۔ اگر ق > مہ $(ا^2 + ب^2)^{\frac{1}{2}}$ تو ثابت کرو کہ ا اور ب دونوں پھسلیں گے جبکہ

$$\text{جم ط} = \frac{\text{مہ}^2(ب^2 - ا^2) + ق^2}{2\,\text{مہ}\,ب\,ق}$$

لیکن اگر قوت ق، مہ $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ سے کم مگر مہ ا سے زیادہ ہو تو صرف ا پھسلے گا جب کہ

$$\text{جب ط} = \frac{\text{مہ}\,ا}{ق}$$

۷ ــــ ایک خط تدویر کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی اور راس نیچے وار ہے ثابت کرو کہ ذرہ اس کے کسی نقطہ پر ساکن رہ سکتا ہے جسکی بلندی راس سے ۲ ا جیب۲ صد سے زیادہ نہ ہو جہاں صد رگڑ کا زاویہ ہے اور ا خط تدویر کے تکوینی دائرہ کا نصف قطر ہے۔

۸ ــــ ایک ذرہ محور ی کے متوازی ایک مستقل قوت کے زیر عمل سطح لا ما ی = ج$^3$ پر ساکن ہے اگر رگڑ کی قدر مہ ہو تو ثابت کرو کہ مخروط $\frac{1}{لا^2} + \frac{1}{ما^2} = \frac{مہ^2}{ی^2}$ اور دی ہوئی سطح کا منحنی تقاطع، سطح کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کردے گا جن میں سے ایک پر توازن ممکن ہے اور دوسرے پر ممکن نہیں ہے۔

۹ ــــ ناقص نما $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} + \frac{ی^2}{ج^2} = ۱$ کی سطح کھردری ہے اور اس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ لا کا محور انتصابی ہے ثابت کرو کہ کوئی وزنی ذرہ، اس ناقص کے اس حصہ میں جو ناقص نما اور اسطوانہ $ما^2 ج^2 (مہ^2 ب^2 + ا^2) + ی^2 ب^4 (مہ^2 ج^2 + ا^2) = مہ^2 ب^4 ج^4$ کے منحنی تقاطع کے اوپر واقع ہے کہیں بھی متعادل رہ سکتا ہے۔ جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے۔

۱۰ ــــ مکافی نما $\frac{لا^2}{ا} + \frac{ما^2}{ب} = ۲ی$ کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور راس اوپر وار ہے اگر رگڑ کی قدر مہ ہو تو ثابت کرو کہ ایک ذرہ مکافی نما کے اس حصہ میں جو مکافی نما اور اسطوانہ $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = مہ^2$ کے منحنی تقاطع کے اوپر واقع ہے کہیں بھی متعادل رہے گا۔

۱۱ ــــ ایک قائم زائد کو اس کے ایک انتصابی متقارب کے گرد گھمانے سے ایک سطح حاصل کی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ اس سطح اور ایک خاص مستدیر اسطوانہ کے خط تقاطع کے پرے کے حصہ میں کسی مقام پر ایک ذرہ متعادل رہ سکتا ہے۔ (۶۳)

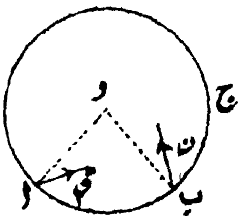
۱۲ ــــ ایک کھردرا گردشی مکافی نما ہے جس کا وتر خاص ۴ ا ہے اور رگڑ کی قدر مہ ہے۔ یہ یکساں زاوئی رفتار ــہ کے ساتھ اپنے محور کے گرد جو انتصابی ہے گھومتا ہے۔

اگر سہ > ما $\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{۲ا}}}$ مم $\frac{\text{ب}}{\text{۲}}$ یا < ما $\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{۲ا}}}$ مس $\frac{\text{ب}}{\text{۲}}$ تو ثابت کرو کہ ذرہ ایک خاص منطقہ کے سوائے ہر مقام پر متعادل رہے گا، لیکن اگر زاوی رفتار ان انتہائی قیمتوں کے اندر واقع ہو تو ذرہ ہر مقام پر متعادل رہیگا۔

[اس سوال کو حل کرنے کے لئے فرض کرسکتے ہیں کہ سطح ساکن ہے اور ذرہ پر ایک مزید مرکزی قوت م سہ۲ ما عمل کرتی ہے جس کی سمت ذرہ سے مکافی نما کے محور پر کھینچے ہوئے عمود کے باہر کی طرف ہے]

۸۴ — کھردرے جوڑ یا قبضے۔ دفعہ ۶۵ کی شکل میں اگر رگڑ کو بھی ملحوظ رکھا جائے تو ا پر کا حاصل تعامل، ا پر کے عماد کی سمت میں نہیں ہوگا۔ اس صورت میں ا پر کا تعامل ق، مرکز و میں سے گذرنے والی ایک متوازی قوت ق معہ ایک جفت کے مساوی ہوگا جس کا معیار اثر قوت اور اُس عمود کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا جو و سے ق کی سمت پر کھینچا جائے۔ اسی طرح تماس کے دیگر نقطوں کے لئے۔ پس حاصل تعامل و میں سے گزرنے والی چند قوتوں اور چند جفتوں کے مساوی ہوتا ہے یہ ترکیب پاکر و میں سے گزرنے والی ایک واحد قوت اور ایک واحد جفت کے مساوی ہوتے ہیں۔ پس جب کسی جوڑ میں رگڑ عمل کرے اور ایک سے زیادہ نقطوں پر تماس ہو تو دفعہ ۶۵ کی نامعلوم قوتوں یا قوتوں کے نامعلوم اجزائے ترکیبی کو فرض کرلینے کے علاوہ ایک نامعلوم جفت کو بھی فرض کرنا چاہیئے۔

جب جوڑ کھردرا ہو لیکن تماس صرف ایک ہی نقطہ پر واقع ہو جیسا کہ ساتھ کی شکل میں ا پر دکھایا گیا ہے تو چکنے جوڑ کی طرح ہم فرض کرسکتے ہیں کہ تعامل ایک واحد قوت پر مشتمل ہے جو ا میں سے گزرتی ہے۔




۸۵ — رگڑ کے کلیوں کی توضیح کے لئے ہم چند مثالیں ذیل میں درج کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک یکساں سلاخ انتہائی تعادل کے محل میں ایک کھردرے کرے کے اندر پڑی ہے۔ اگر کرے کے مرکز پر سلاخ کے محاذی زاویہ ۲ عہ بنے اور اگر رگڑ کا زاویہ لہ ہو تو ثابت کرو کہ افق کے ساتھ سلاخ کے میلان کا زاویہ ہوگا

$$مس^{-1} \left\{ \frac{جب ۲ لہ}{۲ جم (عہ + لہ) جم (عہ - لہ)} \right\}$$

فرض کرو کہ اب ایک سلاخ ہے، ث اس کا وسطی نقطہ ہے اور د کرہ کا مرکز ہے، تب (۶۴)

$$\angle ث د ا = \angle ث د ب = عہ$$

ا اور ب میں سے خطوط اج اور ب ج کھینچو جو ا اور ب کو کرہ کے مرکز سے ملانے والے خطوط کے ساتھ زاویہ لہ بنائیں، تب دفعہ ۷۶ کی رو سے یہ خطوط ا اور ب پر کے حاصل تعاملوں م اور س کی سمتیں ہیں۔

چونکہ یہ تعامل اور سلاخ کا وزن سلاخ کو تعادل کی حالت میں رکھتے ہیں اس لئے ث میں سے گزرنے والا انتصابی خط ج میں سے گزرے گا۔

ا میں سے ایک افقی خط اد کھینچو جو ج ث سے د پر ملے۔

فرض کرو کہ زاویہ ث اد = طہ

تب زاویہ ج ا ث = $\angle$ د ا ث - لہ = ۹۰ - عہ - لہ

اور زاویہ ج ب ث = $\angle$ د ب ث + لہ = ۹۰ - عہ + لہ

پس دفعہ ۵۵ کے مسئلہ ۲ سے حاصل ہوتا ہے

۲ مس طہ = مس (عہ + لہ) - مس (عہ - لہ)

$$= \frac{جب ۲ لہ}{جم (عہ + لہ) جم (عہ - لہ)} \qquad (۱)$$

یا اس طرح : دفعہ ۶۰ کی شرائط کو استعمال کرنے سے بھی مطلوبہ حل حاصل ہو سکتا ہے۔
قوتوں کو سلاخ کے متوازی تحلیل کرنے سے

ما جب (عہ + لہ) ـ س جب (عہ ـ لہ) = و جب طہ ............ (۲)

سلاخ کے عمود وار تحلیل کرنے سے

ما جم (عہ + لہ) + س جم (عہ ـ لہ) = و جم طہ ............ (۳)

ا کے گرد معیار اثر لینے سے

۲ س جم (عہ ـ لہ) = و جم طہ ............ (۴)

مساواتوں (۳) اور (۴) سے

ما جم (عہ + لہ) = س جم (عہ ـ لہ) = ½ و جم طہ

ما اور س کی یہ قیمتیں (۲) میں درج کرنے سے

مس (عہ + لہ) ـ مس (عہ ـ لہ) = ۲ مس طہ

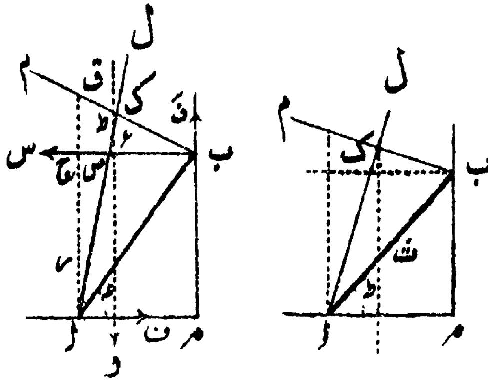
**مثال ۲**۔ ایک شہتیر ا ب اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سرا ا ایک کھردرے افقی فرش پر ہے اور دوسرا سرا ب ایک کھردری انتصابی دیوار کو مس کرتا ہے۔ ا ب میں سے گزرنے والا انتصابی مستوی دیوار پر عمود وار ہے اگر شہتیر کا زاویہ میلان افق کے ساتھ دیا ہوا ہو تو شہتیر کے توازن پر بحث کرو۔

فرض کرو کہ ا پر کا عمادی تعامل اور رگڑ بالترتیب ما اور ف ہیں اور ب پر کا عمادی تعامل اور رگڑ بالترتیب س اور فَ ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

دو سمتوں میں تحلیل کرنے اور کسی نقطہ کے گرد معیار اثر لینے سے ہمیں چار نامعلوم

مقداروں م، س، ف اور فَ میں صرف تین مساواتیں ملتی ہیں۔اس لئے یہ مقداریں معلوم نہیں ہوسکتیں۔

یہ امر واقعہ علم ہندسہ سے بھی ظاہر ہے۔دو خط ا ل اور ب م ایسے کھینچو جو عمادوں ا ج اور ب ج سے بالترتیب زاویے لہ اور لَہ بنائیں جہاں لہ اور لَہ، ا اور ب پر رگڑ کے زاویے ہیں، اب فرض کرو کہ شہتیر کے مرکز ثقل ث میں سے گزرنے والا انتصابی خط ان سے ع اور ط پر ملتا ہے۔ تب تاوقتیکہ ط فضا ق ا ل کے اندر اور ع فضا ج ب م کے اندر ہے جیسا کہ شکل میں ہے یعنی تاوقتیکہ ث میں سے گزرنے والا انتصابی خط فضا ج ق ک ص کو کاٹے ہم ع اور ط کے اندر کوئی نقطہ ن ایسا لے سکتے ہیں کہ ا اور ب پر کے حاصل تعاملوں کی سمتیں ا ن اور ب ن ہوں اور شہتیر تعادل میں رہے۔اگر ن نقطہ ع پر منطبق ہو تو ا پر تعادل انتہائی (۶۵)




ہوگا لیکن ب پر نہیں اور اگر ن، ط پر منطبق ہو تو تعادل ب پر انتہائی ہوگا لیکن ا پر نہیں۔ اور ان دو انتہائی محلوں کے اندر قوتوں کی کوئی سی ترتیب ہوسکتی ہے۔

اگر ث میں سے گزرنے والا انتصابی خط ک کے دائیں جانب واقع ہو تو

اس پر ہیں کوئی نقطہ ن ایسا نہیں مل سکتا کہ ا ن ایک ساتھ ا پر رگڑ کے مخروط اور نیز ب ن
ب پر رگڑ کے مخروط کے اندر ہو اس لئے تعادل ناممکن ہوگا۔
اگر شہتیر ایسے محل میں ہو کہ اس کا تعادل انتہائی ہو اور بنا بریں علیہ شہتیر نیچے پھسلنے کے
عین قریب ہو تو نقطے ع اور ط ک پر منطبق ہو جائیں گے جو ا ل اور ب م کا نقطۂ
تقاطع ہے، اگر ا ث = ا، اور ث ب = ب، تو دفعہ ۵۵ کی مسئلہ کی رو سے

$$( ا_{1} + ب_{1} ) \text{ مم ک ث ب} = ا_{1} \text{ مم ا ک ث} - ب_{1} \text{ مم ث ک ب}$$

یعنی $( ا_{1} + ب_{1} ) \text{ مس ط} = ا_{1} \text{ مم ل} - ب_{1} \text{ مس ل}$

یعنی $\text{ط} = \text{مس}^{-1} \left\{ \frac{ا_{1} - ب_{1} \text{ مس}^{2} \text{ل}}{\text{مس ل} ( ا_{1} + ب_{1} )} \right\}$

**مثال ۳۔** ناقص کی شکل کا ایک یکساں وزنی تار ہے جس کے محور ۲ ا اور ۲ ب ہیں۔
اس کو ایک چھوٹی کھردری کھونٹی پر لٹکایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ تار اپنے ہر مقام پر کھونٹی
کے اوپر متعادل رہ سکتا ہو تو رگڑ کی قدر $\frac{ا^{2} - ب^{2}}{۲ ا ب}$ سے کم نہیں ہو سکتی۔

فرض کرو کہ تار انتہائی تعادل میں ہے جبکہ نقطۂ تماس ن ہے۔
فرض کرو کہ ن ل محور اعظم پر عمود ہے، نیز ن ث عماد ہے اور ج مرکز ہے
ن پر کا حاصل تعامل جو ن پر کے عماد کے ساتھ زاویہ ل بناتا ہے وزن کو عین متوازن (۶۷)
کرے گا اس لئے ج ن انتصابی ہوگا اور زاویہ ج ن ث = ل
اگر ن کا خروج المرکزی زاویہ ط ہو تو

$$\text{مس ن ج ث} = \frac{ب}{ا} \text{ مس ط}$$

اور $\text{مس ن ث ل} = \frac{\text{ن ل}}{\text{ث ل}} = ب \text{ جب ط} \div \left( \frac{ب^{2}}{ا} \times \text{ج ل} \right) = \frac{ا}{ب} \text{ مس ط}$

اور $\text{مس ل} = \text{مس ج ن ث} = \text{مس} ( \text{ن ث ل} - \text{ن ج ل} ) = \frac{\frac{ا}{ب} - \frac{ب}{ا}}{۱ + \text{مس}^{2} \text{ط}} \text{ مس ط}$

$= \frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{2\,\text{ا}\,\text{ب}}$ جب ۲ ط

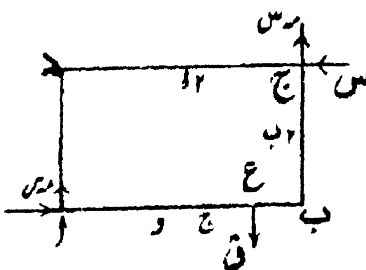
اس لئے جب ۲ ط = $\frac{2\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{مہ}}{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$ سے تعادل کا انتہائی محل حاصل ہوتا ہے۔

اگر $\frac{2\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{مہ}}{\text{ا}^2 - \text{ب}^2} > 1$ تو ط کی کوئی حقیقی قیمت نہیں ہوتی یعنی تعادل کا کوئی انتہائی محل نہیں ہے۔ اس لئے تار کھونٹی کے اوپر کسی نقطہ پر متعادل رہ سکتا ہے۔

مثال ۴۔ ایک میز کے خانہ کے دستے اس کی طرفوں سے متساوی الفصل ہیں۔ اور ایک دوسرے سے ۲ ج کے فاصلہ پر ہیں، خانہ کے پہلوؤں میں رگڑ کی قدر مہ ہو اور پیندا چکنا ہو تو ثابت کرو کہ صرف ایک دستہ کو سیدھا باہر کی طرف کھینچنے سے خانہ باہر نہیں نکل سکتا تاوقتیکہ خانہ کا طول سامنے کے رخ سے پشت تک ۲ مہ ج سے زیادہ نہ ہو۔

فرض کرو کہ خانہ ا ب ج د ہے اور اس کا طول ا ب اور گہرائی ب ج بالترتیب ۲ ا اور ۲ ب کے مساوی ہیں۔ اگر ب کے قریب کا دستہ ع ہو تو ع پر باہر کی طرف قوت لگا کر کھینچنے کا یہ نتیجہ ہوگا کہ خانہ کے کونے ج اور ا میز کے ساتھ جم جائیں گے اور اس طرح پہلوؤں اد اور ب ج پر دباؤ مقامات ا اور ج پر بالترتیب س اور س ہونگے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے

جسم کی حرکت میں زیادہ سے زیادہ مزاحمت اس وقت ہوگی جب کہ ا اور ج پر رگڑ کی قوتیں مہ س اور مہ س کے مساوی ہوں۔ ا ب کے متوازی تحلیل کرنے سے



ر = س .......................... (۱)

ا کے گرد معیار اثر لینے سے ق (ا + ج) = مہ ر × ۲ ا + س × ۲ ب ..... (۲)

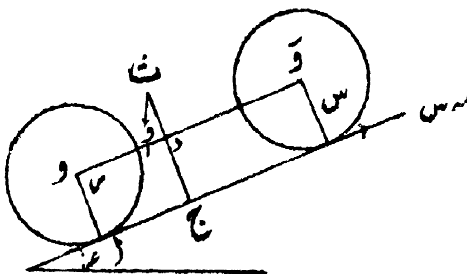
نیز اگر دا کی سمت میں حرکت ہو سکے تو لازمی طور پر

ق > مہ (ر + س) یعنی > مہ (ا + ج)/(مہ ا + ب) ق

یعنی (ب - مہ ج) ق > ۰

چونکہ ق صفر نہیں ہے اس لئے ضروری ہے کہ ب > مہ ج
اس صورت میں ق کی مقدار کا نتیجہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا یعنی
اگر ب > مہ ج
تو ق خواہ کتنا ہی کم ہو خانہ باہر کھنچ آئے گا لیکن اگر ب < مہ ج ہے تو ق خواہ کتنا ہی بڑا کیوں نہ ہو خانہ باہر نہ کھنچے گا۔

(۶۸) **مثال ۵** —— ایک بائیسکل کے پہیوں کے سب سے نچلے نقطوں کو ملانے والے خط کا طول ۲ ا ہے اور سیکل کا مرکز ثقل اس خط کے اوپر ف ارتفاع پر اور اس کے وسطی نقطہ سے فاصلہ لا پر آگے کی طرف واقع ہے۔ اگر دُھرے کی رگڑ کا لحاظ نہ کیا جائے تو بتاؤ کہ اس سطح مائل کی بڑی سے بڑی ڈھال کیا ہو سکتی ہے جس پر بائیسکل بغیر پھسلے ٹھہر سکے جبکہ بالترتیب اس کے اگلے یا پچھلے پہیہ کو بریک لگا دیا جائے




جب پچھلے پہیہ کو بریک ہو تو اس پر رگڑ مہ س کے مساوی ہو گی۔ اگر مرکز ثقل ث ہو تو

د وَ = ا + لا ،

د و = ا - لا ،

ج ث = ف

سطح مائل کے متوازی اور اس پر عمود وار سمت میں تحلیل کرنے سے اور ث کے گرد معیار اثر لینے سے

مہ س = و جب عہ . . . . . . (۱)

ر + س = و جم عہ . . . . . . (۲)

س (مہ ف + ا + لا) = ر (ا - لا) . . . . . (۳)

(۲) اور (۳) سے س (مہ ف + ۲ ا) = (ا - لا) و جم عہ

اس لیے (۱) سے مس عہ = مہ (ا - لا) / (مہ ف + ۲ ا) . . . (۴)

اگر اگلے پہیہ کو بریک ہو تو اپر رگڑ مہ ر کے مساوی ہوگی اور اگر اس صورت میں سطح مائل کی ڈھال بہ ہو تو اسی طرح

مہ ر = و جب بہ

ر + س = و جم بہ

اور ر {ا - لا - مہ ف} = س (ا + لا)

اس لیے حسب سابق مس بہ = مہ (ا + لا) / (۲ ا - مہ ف) . . . (۵)

ظاہر ہے کہ بہ بڑا ہے عہ سے یعنی جب اگلے پہیہ کو بریک لگا ہو تو بائیسکل زیادہ بڑے میلان والی سطح مستوی پر ٹھہر سکتی ہے بہ نسبت اس صورت کے جبکہ پچھلے پہیہ کو لگا ہو۔

**مثال ۶** — ایک چپٹا وزنی مستدیر قرص ایک کھردری سطح مستوی پر پڑا ہے اور اپنے محیط کی ایک سوئی کے گرد بلا تکلف گھوم سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ کسی محل میں ساکن رہ سکتا ہے جبکہ رگڑ کی قدر ۹π مس عہ / ۳۲ سے بڑی ہو جہاں عہ سطح مائل کا میلان ہے افق کے ساتھ۔ یہاں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ قرص کا وزن اس کے رقبہ پر یکساں منقسم ہے۔

فرض کرو کہ قرص کا تعادل انتہائی ہے جبکہ اس کا قطر و ا جو سوئی و میں سے گزرتا ہے خط میلان اعظم کے ساتھ زاویہ فہ بناتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ قرص کا وزن فی اکائی رقبہ و ہے اور اس کا نصف قطر ا ہے۔ اس لیے اس کا کل وزن π ا² و ہے

(۶۸) اگر قرص پر کوئی نقطہ ن ایسا ہو کہ و ن = ر اور < ا و ن = ط تو ن کے گرد رقبہ کا عنصر ر مف ط × مف ر کے مساوی ہوگا۔ پس اس عنصر پر رگڑ کی قوت (مہ و ر مف ط مف ر × جم عہ) ہے اور ن پر و ن کے عمود وار سمت میں عمل کرتی ہے کیونکہ اگر ن حرکت کرے تو وہ و ن پر عمود وار حرکت کریگا۔ اس لئے و کے گرد معیار اخذ لینے سے

$$\pi\, ا^2\, و\, جب\, عہ \times ا\, جب\, فہ = \int_{ب}^{۲ ا\, جم\, ط} \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{+\frac{\pi}{۲}} مہ\, و\, ر\, فر\, ط\, فر\, ر\, جم\, عہ \times ر$$

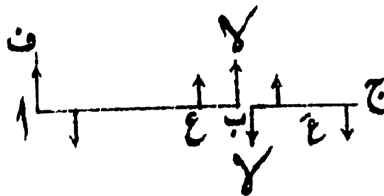
$$= مہ\, و\, جم\, عہ \times \frac{۸ ا^3}{۳} \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{+\frac{\pi}{۲}} جم^3 ط\, فر\, ط = \frac{۳۲ ا^3}{۹}\, مہ\, و\, جم\, عہ$$

$$\therefore\ جب\, فہ = \frac{۳۲\, مہ}{۹\pi\, مس\, عہ}$$

اس سے تعادل کا انتہائی محل حاصل ہوتا ہے۔ اگر ۳۲ مہ > ۹ π مس ع تو انتہائی محل نہیں ہوتا یعنی قرص ہر مقام پر متعادل رہیگا۔

مثال ۷ — دو یکساں سلاخیں ا ب اور ب ج ہیں جن کے وزن بالترتیب و اور وَ ہیں ان کو ب پر وصل کرکے ایک کھردرے میز پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ دونوں سلاخیں ایک ہی خط مستقیم میں ہوں۔ اسرے پر ایک بتدریج بڑھتی ہوئی قوت ف سلاخوں پر عمود وار عمل کرتی ہے۔ بتاؤ کہ تعادل کس طرح ٹوٹیگا۔

فرض کرو کہ جب تعادل عین ٹوٹنے کو ہو تو سلاخ ا ب اپنے ایک نقطہ ع کے گرد گھومنے کو اور سلاخ ب ج نقطہ عَ کے گرد گھومنے کو ہوتی ہے۔




جہاں

ا ع = لا، ب عَ = ما اور ا ب = ا اور ب ج = ب

تب ا ع اور ع ب پر رگڑ کی قوتیں متقابل سمتوں میں ہونگی جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح ب عَ اور عَ ج کے لئے۔

فرض کرو کہ ب پر کا تعامل لا ہے جو صریحاً ہر ایک سلاخ پر عمود وار ہے۔ ا ع پر رگڑ مہ و $\frac{\text{لا}}{\text{و}}$ ہے اور ع سے $\frac{\text{لا}}{۲}$ فاصلہ پر عمل کرتی ہے۔ اس لئے ع ب پر رگڑ مہ و $\frac{\text{و} - \text{لا}}{\text{و}}$ ہے اور ع سے $\frac{\text{و} - \text{لا}}{۲}$ فاصلہ پر عمل کرتی ہے۔

سلاخ ا ب پر عمود وار تحلیل کرنے سے اور ع کے گرد معیار اثر لینے سے

$$\text{ف} + \text{لا} = \text{مہ و}\frac{\text{لا}}{\text{و}} - \text{مہ و}\frac{\text{و} - \text{لا}}{\text{و}} = \frac{\text{مہ و}}{\text{و}}(۲\text{لا} - \text{و}) \quad \dots\dots (۱)$$

$$\text{اور ف لا} - \text{لا}(\text{و} - \text{لا}) = \text{مہ و}\frac{\text{لا}}{\text{و}} \times \frac{\text{لا}}{۲} + \text{مہ و}\frac{\text{و} - \text{لا}}{\text{و}} \times \frac{\text{و} - \text{لا}}{۲}$$

$$= \frac{\text{مہ و}}{\text{و}}\left[\text{لا}^۲ - \text{و لا} + \frac{\text{و}^۲}{۲}\right] \quad \dots\dots (۲)$$

اسی طرح ب ج کے لئے

$$\text{لا} = \frac{\text{مہ وَ}}{\text{ب}} \times (۲\text{ا} - \text{ب}) \quad \dots\dots (۲)$$

$$\text{اور لا ا} = \frac{\text{مہ وَ}}{\text{ب}}\left[\text{ا}^۲ - \text{ا ب} + \frac{\text{ب}^۲}{۲}\right] \quad \dots\dots (۳)$$

(۳) اور (۴) سے حاصل ہوتا ہے $\text{ا} = \frac{\text{ب}}{۲\sqrt{۲}}$ اور $\text{لا} = \text{مہ وَ}(\sqrt{۲} - ۱)$ نیز (۱) اور (۲) سے

$$\frac{\text{مہ و}}{\text{و}}\left[\text{لا}^۲ - \frac{\text{و}^۲}{۲}\right] = \text{لا ا} = \text{مہ وَ}(\sqrt{۲} - ۱)\,\text{ا} \quad (۹۹)$$

$$\therefore \text{لا}^۲ = \frac{\text{و}^۲}{۲}\left[۱ + \frac{۲\text{وَ}}{\text{و}}(\sqrt{۲} - ۱)\right]$$

اور ف، (۱) سے نکل جاتا ہے۔

مذکورہ بالا عمل درست رہیگا جب تک کہ لا < و یعنی $\frac{۲ و َ}{و}$ (۱-۲√۲) ≤ ۱

اگر $\frac{۲ و َ}{و}$ (۱-۲√۲) > ۱ یعنی لا > و تو اوپر کا حل درست نہیں ہے اور

اب کے مختلف نقطوں پر رگڑ کی قوتیں سب کی سب ایک ہی سمت میں عمل کرتی ہیں۔

اس صورت میں آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ ف = لا = $\frac{مہ و}{۲}$ یعنی اس صورت میں لا کم ہے مہ و َ (۱-۲√۲) سے جو اوپر کے مطابق وہ قوت ہے جو ب ج کو حرکت دینے کے لئے درکار ہے۔ اس لئے دوسری سلاخ عین حرکت کرنے کے قریب نہیں ہے بلکہ صرف ا ب حرکت کرنے کے قریب ہے۔

# مثالیں

(۱) ایک یکساں سلاخ م ن کے سرے دو ثابت سیدھی کھردری نالیوں و ا اور و ب کے اندر ہیں جو ایک ہی انتصابی سطح مستوی میں واقع ہیں اور افق کے ساتھ عہ اور بہ زاویے بناتی ہیں ثابت کرو کہ جب سرا م، ا و کی سمت میں عین پھسلنے کو ہو تو م ن افق کے ساتھ جو زاویہ بناتا ہے اس کا ماس

$$\frac{\text{جب}\ (\text{عہ} - \text{بہ} - ۲\ \text{لہ})}{۲\ \text{جب}\ (\text{بہ} + \text{لہ})\ \text{جب}\ (\text{عہ} - \text{لہ})}$$ ہوگا جہاں لہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

(۲) ایک انتصابی مستطیلی شہتیر کا وزن و ہے اور اس کا نچلا سرا ایک چکنے فرش پر ٹکا کر شہتیر اس طرح مقید ہے کہ یہ صرف اپنی سمت میں حرکت کر سکتا ہے۔ اگر اس کے نیچے معلومہ ڈھال کی ایک چکنی سطح مائل ایک ایسی قوت سے ڈھکیل دی جائے جو سطح مائل کے پشت پر عمل کرتی ہے اور افق کے متوازی ہے تو اس قوت کی مقدار معلوم کرو۔

اگر صرف فرش اور سطح مائل کے درمیان رگڑ ہو لیکن کسی اور جگہ رگڑ نہ ہو تو بتاؤ کہ مہ کی کم سے کم قیمت کیا ہونی چاہیئے کہ سطح مائل کو چھوڑ دینے پر وہ شہتیر کے نیچے ٹک جائے اور شہتیر کے وزن سے باہر نہ نکل پڑے۔

(۳) ایک وزنی سلاخ جس کا طول ۲ ا ہے ایک کھردری میخ پر پڑی ہے اور اس کا

اور اس کا ایک سرا ایک کھردری انتصابی دیوار پر جھکا ہوا ٹکا ہے۔ اگر دیوار سے میخ کا فاصلہ ج ہو اور دیوار اور میخ پر ایک پر رگڑ کا زاویہ لہ ہو تو ثابت کرو کہ دیوار اور سلاخ کا نقطۂ تماس میخ سے اوپر ہونے کی صورت میں سلاخ نیچے کی طرف عین پھسلنے کو ہو گی جبکہ

$جب^3 ط = \frac{ج}{ا} جم^2 لہ$ جہاں ط سلاخ کا میلان ہے دیوار کے ساتھ۔

اگر سلاخ اور دیوار کا نقطۂ تماس میخ سے نیچے ہو تو ثابت کرو کہ سلاخ نیچے کی طرف عین پھسلنے کو ہو گی جبکہ

$$جب^2 ط \, جب (ط + ۲ لہ) = \frac{ج}{ا} جم^2 لہ$$

اور اوپر کی طرف عین پھسلنے کو ہو گی جبکہ $جب^2 ط \, جب (ط - ۲ لہ) = \frac{ج}{ا} جم^2 لہ$۔

(۷۰) (۴) ایک یکساں شہتیر کا طول ۲ ف ہے اس کا ایک سرا ایک کھردری افقی سطحِ مستوی پر ہے اور دوسری جانب شہتیر ایک کھردری دیوار کے اوپر کے کنارے پر ٹکا ہوا ہے جس کی بلندی ف ہے۔ شہتیر میں سے گزرنے والا انتصابی مستوی دیوار پر عمود وار ہے۔ اگر شہتیر ہر میلان پر جو ہندسی طور پر ممکن ہو متعادل رہ سکے اور دیوار اور فرش مساوی طور پر کھردرے ہوں تو بتاؤ کہ شہتیر اور دیوار یا شہتیر اور زمین کا رگڑ کا زاویہ

$\frac{1}{2} جب^{-1} \frac{4}{3\sqrt{3}}$ سے کم نہیں ہو سکتا۔

(۵) ۲ ا طول کی دو مساوی یکساں سلاخیں چکنے طور پر ایک سرے پر ایک قبضہ کے ذریعہ وصل کی ہوئی ہیں اور ج نصف قطر کے ایک کھردرے کرہ پر متشاکلاً ساکن ہیں۔ تعادل کا انتہائی محل معلوم کرو۔ اور ثابت کرو کہ اگر رگڑ کی قدر $\frac{ج}{ا}$ ہو تو سمت انتصابی کے ساتھ ہر ایک سلاخ کا انتہائی میلان $مس^{-1} \sqrt{\frac{ج}{ا}}$ ہے۔

(۶) اگر ایک پرکار ایک چکنے افقی اسطوانہ پر جس کا نصف قطر ج ہے آڑی پڑی ہو تو ثابت کرو کہ جوڑ پر رگڑ کا جفت جو اس کی ساقین کو پھسلنے سے روکتا ہے

$$د (ج \, قم \, ع \, قم \, ع - ا \, جب \, ع)$$

ہے جہاں ؤ ہر ایک ساق کا وزن ہے ، ۲ عہ ساقین کا درمیانی زاویہ ہے اور جوڑ سے ساق کے مرکز ثقل کا فاصلہ ا ہے ۔

(۷) ایک سلاخ ایک کھردری سطح مائل پر پڑی ہے سطح مائل کا افق کے ساتھ میلان عہ ، رگڑ کے زاویہ لہ سے بڑا ہے سلاخ اپنے ایک سرے کے گرد بلا تکلف گھوم سکتی ہے ۔ ثابت کرو کہ تعادل کے لئے خط میلان اعظم اور سلاخ کا درمیانی زاویہ زیادہ سے زیادہ جب⁻¹ (مس لہ مم عہ) ہے ۔

(۸) ۔ ثابت کرو کہ ایک معمولی میز کا خانہ اس کے ایک دستہ پر قوت لگانے سے اندر نہیں دھکیلا جاسکتا تاوقتیکہ اس کو کسی اور طرح سے پہلے فاصلہ ۲ مہ ج میں سے اندر نہ دھکیلا جائے جہاں ۲ ج دستوں کا درمیانی فاصلہ ہے اور مہ رگڑ کی قدر ہے ۔

(۹) اگر آئینہ دار کھڑکی کی ایک ڈوری ٹوٹ جائے تو بتاؤ کہ چوکھٹ کی رگڑ کی قدر کم سے کم کیا ہونی چاہیئے کہ دوسرا وزن کھڑکی کو سنبھالے رکھے ۔

(۱۰) ایک نصف کروی خول ایک ایسی کھردری سطح مستوی پر پڑا ہے جسکے رگڑ کا زاویہ لہ ہے ، ثابت کرو کہ مستدیر کنارہ کی سطح مستوی کا میلان افق کے ساتھ جب⁻¹ (۲ جب لہ) سے زیادہ نہیں ہو سکتا ۔

[ مرکز ثقل اُس نصف قطر کی تنصیف کرتا ہے جو خول کے قاعدہ پر عمود وار ہے ۔ ]

(۱۱) ایک ٹھوس متجانس نصف کرہ ایک کھردری افقی سطح مستوی اور ایک چکنی انتصابی دیوار سے ٹکا ہوا ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر رگڑ کی قدر ۳/۸ سے بڑی ہو تو نصف کرہ ہر محل میں متعادل رہ سکتا ہے لیکن اگر رگڑ کی قدر ۳/۸ سے کم ہو تو نصف کرہ کا قاعدہ سمت انتصابی کے ساتھ کم سے کم زاویہ جم⁻¹ ۸مہ/۳ بنا سکتا ہے ۔

(۱۷) اگر دیوار کھردری ہو اور رگڑ کی قدر مہ ہو تو ثابت کرو کہ یہ زاویہ جم⁻¹ [ ۸مہ/۳ ( ۱ + مہ / (۱ + مہ مہ) ) ] ہے

[ نصف کرہ کا مرکز ثقل اُس نصف قطر کو جو قاعدہ پر عمود وار ہے نسبت ۳ : ۵ میں تقسیم کرتا ہے ]

(۱۲) اگر نصف کرہ حالت تعادل میں اس طرح ساکن ہو کہ اس کی منحنی سطح ایک کھردری سطح مائل کو جو افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے مس کرتی ہے تو ثابت کرو کہ نصف کرہ کی مستوی سطح کا میلان افق کے ساتھ جب⁻¹ (۸/۳ جب عہ) ہے بشرطیکہ عہ کم ہو جب⁻¹ ۳/۸ سے

اور نیز کم ہو رگڑ کے زاویہ سے۔
(۱۳) ایک یکساں نصف کرہ کا نصف قطر ا ہے اور وزن و ہے یہ اپنی کروی سطح کے بل ایک افقی سطح مستوی پر پڑا ہے اور وزن وَ کا ایک کھردا ذرہ اس کی مستوی سطح پر پڑا ہے۔ ثابت کرو کہ مستوی رخ کے مرکز سے ذرہ کا فاصلہ $\frac{۳ و مہ ا}{۸ وَ}$ سے زیادہ نہیں ہوسکتا جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے۔
(۱۴) ایک کرہ جس کا نصف قطر ا ہے اور جس کا مرکز ثقل اس کے مرکز سے فاصلہ ج پر واقع ہے ایک ایسی کھردری سطح مستوی پر انتہائی تعادل کی حالت میں ساکن ہے جو افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اس کو زاویہ

$$۲ جم^{-۱}\left(\frac{ا جب عہ}{ج}\right)$$

میں سے گھما دیا جائے تو بھی یہ انتہائی تعادل کی حالت میں رہے گا۔
(۱۵) ایک یکساں مستطیلی تختہ جس کے اضلاع ۲ ا اور ۲ ب ہیں ایک ہی افقی خط میں کی دو کھردری میخوں پر جن کا درمیانی فاصلہ ف ہے انتہائی تعادل کی حالت میں ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ افق کے ساتھ ضلع ۲ ا کا میلان طہ مساوات

$$ف جم لہ جم (لہ + ۲ طہ) = ا جم طہ - ب جب طہ$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں لہ رگڑ کا زاویہ ہے۔
(۱۶) ایک استوار چوکھٹ معین کی شکل کی ہے جس کا ہر ضلع ا ہے اور حادہ زاویہ عہ ہے یہ چوکھٹ ایک کھردری میخ پر ساکن ہے جس کی رگڑ کی قدر مہ ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل کے لئے نقطۂ تماس کے دو انتہائی مقامات کا درمیانی فاصلہ ا مہ جب عہ ہے۔
(۱۷) ایک لڑکا جس کا وزن و ہے یخ کے ایک تختہ پر کھڑا ہے اور اپنے ہاتھوں سے ایک کرسی کے چکنے انتصابی ضلع کو دھکیلتا ہے اگر کرسی کا وزن ن و ہو اور کرسی اور یخ کے درمیان اور نیز لڑکے اور یخ کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہو تو ثابت کرو کہ لڑکا اپنے جسم کو اس قدر جھکا سکتا ہے کہ افق کی طرف $مم^{-۱}$ ۲ مہ ن سے بڑا زاویہ بنائے یا $مم^{-۱}$ ۲ مہ سے بڑا زاویہ بنانے بموجب اس کے کہ لڑکا کرسی سے یا کرسی

لڑکے سے زیادہ وزندار ہو۔

(۱۸) ایک یکساں وزنی سلاخ ایک کھردرے افقی میز پر پڑی ہے اور اس کو ایک رسی کے ذریعہ جو اس کے کسی نقطہ کے ساتھ بندھی ہے ایک ایسی سمت میں کھینچا گیا ہے جو اس کے طول پر عمود وار ہے۔ بتاؤ کہ یہ کس نقطہ کے گرد گھومنا شروع کرے گی۔

ثابت کرو کہ اُن قوتوں کی نسبت $\sqrt{2}+1 : 1$ ہے جو سلاخ کو گھمانے کے لئے ضروری ہوں جبکہ ایک قوت کو سلاخ کے مرکز پر اور دوسری کو سلاخ کے سرے پر اس کے طول پر عمود وار لگایا جائے۔

(۱۹) ایک یکساں کھردرا شہتیر اب دو اور شہتیروں پر افق کے متوازی پڑا ہے اور ان کو نقاط ا اور ج پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ کم سے کم افقی قوت جو نقطہ ب پر اب کے عمود وار سمت میں لگانی پڑے تاکہ شہتیر کو ہلانے کے لئے عین کافی ہو (۴۲)

قوتوں $\frac{1}{2}$ مہ و اور مہ و $\frac{ب_1 - ا_1}{٢ا_1 - ب_1}$ میں سے چھوٹی قوت ہوگی۔ جہاں $٢ا_1 =$ اب اور $ب_1 =$ اج ، نیز و شہتیر کا وزن ہے اور مہ رگڑ کی قدر ہے۔

(۲۰) ایک یکساں کھردرا شہتیر اب جس کا طول $٢ا_1$ ہے دو مساوی اور مساوی طور پر کھردرے گولوں پر افق کے متوازی پڑا ہے۔ گولوں کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ $ب_1$ ہے اور شہتیر گولوں کو ج اور د پر مس کرتا ہے۔

ثابت کرو کہ اگر $ب_1$ بڑا ہو $\frac{٣ا_1}{٢}$ سے تو شہتیر کا ایک ایسا محل معلوم ہو سکتا ہے کہ ب پر قوت ق شہتیر کی سمت پر عمود وار لگانے سے شہتیر ج اور د دونوں نقطوں پر بیک وقت حرکت کرنے کو ہوگا۔

(۲۱) ایک یکساں تختہ جس کا طول ٢ ا ہے اور وزن و ہے ایک کھردرے افقی اسطوانہ پر اس طرح پڑا ہے کہ اس کا وسطی نقطہ اسطوانہ کو مس کرتا ہے اور اسطوانہ کا محور تختہ کے عمود وار ہے۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا وزن جو تختہ کے ایک سرے پر لگایا جا سکتا ہے تاکہ اسطوانہ سے نہ پھسلنے پائے $\frac{ب_1 \, له}{ا - ب_1 \, له}$ و ہے جہاں $ب_1$ اسطوانہ کا نصف قطر

ہے اور لہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

(۲۲) ایک قطع ناقص کو جس کا خروج المرکز ز ہے اور ماسکے س اور سَ ہیں اس کے محور اعظم کے گرد گھمانے سے ایک سطح حاصل کی گئی ہے۔ اس سطح پر ایک کھردرا ذرہ ن رکھا گیا ہے جن پر دو قوتیں ماسکوں کی طرف عمل کرتی ہیں اور بالترتیب ن س اور ن سَ کے متناسب ہیں۔ ثابت کرو کہ ذرہ سطح پر کسی جگہ ساکن رہ سکتا ہے اگر رگڑ کی قدر

$$> \frac{ز^{۲}}{۲\sqrt{۱ - ز^{۲}}}$$

(۲۳) ایک مستدیر قرص جس کا وزن و ہے ایک کھردرے میز پر انتصابی مستوی میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کا نقطہ ا میز کو مس کرتا ہے ایک شخص اس کو نقطہ ب پر اپنی انگلی سے دباتا ہے۔ اگر خط اب سمت راس کے ساتھ زاویہ عہ بنائے اور اگر ا اور ب پر رگڑ کے زاویے بالترتیب لہ اور لَہ ہوں تو ثابت کرو کہ اگر عہ > لَہ سے تو قرص میز پر فوراً لڑکنا شروع کریگا خواہ ب پر کا دباؤ کتنا ہی کم کیوں نہ ہو اور اگر لَہ > عہ > لہ تو قرص ا پر پھسلے گا جبکہ ب پر عمادی دباؤ و جم عہ جب لہ قم (عہ - لہ) ڈالا جائے اور اگر عہ، لہ اور لَہ دونوں سے کم ہو تو ب پر کوئی قوت اس کو ہلا نہ سکیگی۔

(۲۴) دو یکساں شہتیروں اج اور ب ج کو ج پر ایک چکنے قبضہ کے ذریعہ وصل کیا گیا ہے اور ان کو ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کے دونوں نچلے سرے ایک کھردری افقی سطح مستوی پر ساکن رہیں۔ اگر تعادل کو توڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ لمبے شہتیر کا سرا پھسلے گا اور چھوٹا شہتیر گھومیگا۔

(۲۵) ثابت کرو کہ کم سے کم قوت جو ایک وزنی یکساں کرے کی سطح پر لگانی چاہیئے تاکہ یہ ایک کھردری انتصابی دیوار کے مقابل متعادل رہ سکے و جم لہ یا

و س لہ [مس لہ - $\sqrt{مس^{۲} لہ - ۱}$] ہوگی جبکہ لہ < جم$^{-۱}$ $\frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$ یا

لہ > جم$^{-۱}$ $\frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$ سے کرہ کا وزن و ہے اور لہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

(۷۴) (۲۶) ثابت کرو کہ دو اسطوانی کندے جن کے نصف قطر مساوی ہیں لیکن جن کے وزن و اور وَ مختلف ہیں (جہاں وَ > و) ایک سطح مائل پر اس طرح ساکن رہ سکتے

ہیں کہ ان کے محور متوازی الافق رہیں اور زیادہ وزنی کندا اوپر ہو بشرطیکہ رگڑ کی قدر مہ (جو تماس کے دونوں خطوں پر مساوی ہے) $\frac{و + وَ}{وَ - و}$ سے زیادہ ہو اور سطح مائل کا میلان

$$> \text{مس}^{-1} \frac{۲ مہ وَ}{(مہ + ۱)(وَ + و)}$$

اگر سطح مائل کے میلان کو بتدریج بڑھایا جائے تو بتاؤ کہ تعادل کس طرح ٹوٹیگا۔

(۲۷) ایک تختۂ سیاہ بردار کے اگلے اور پچھلے پیر سمت انتصابی کے ساتھ بالترتیب ۳۰° کے زاویہ بناتے ہیں۔ ہر ایک یکساں ہے اور ہر ایک کا وزن و ہے۔ ایک سیاہ تختہ جس کا وزن و ہے اگلے پیروں کے اوپر نصف کو ڈھکے ہوئے ہے اور استاد تختہ کے وسطی نقطہ کو عماداً ایک ایسی قوت سے دباتا ہے جو تختہ کے وزن کے $\frac{۳}{۴}$ کے مساوی ہے اگر پیروں اور فرش کے درمیان رگڑ کی قدر مہ، $\frac{۱}{۲}$ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ پچھلے پیروں کے پھسلنے سے تعادل ٹوٹے گا۔

(۲۸) ا، ب، ج طول کی تین یکساں سلاخوں کو استوار طور پر جوڑنے سے ایک مثلث ا ب ج بنایا گیا ہے۔ مثلث کو ایک کھردری میخ پر اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ ضلع ب ج اس میخ سے مس کرتا ہے۔ اس سلاخ کے اُس حصہ کی حدود معلوم کرو جس کے ہر نقطہ پر مثلث متعادل رہ سکے۔ نیز بتاؤ کہ اگر

$$مہ > \frac{ا (ا + ب + ج)}{ب (ب + ج)} \text{ قم ج} + \text{مس} \frac{ج + ب}{۲}$$

جہاں ج > ب تو مثلث ہر محل میں متعادل رہے گا۔

(۲۹) ایک مکمل طور پر کھردری سطح مستوی افق کے ساتھ ع زاویہ بناتی ہے ثابت کرو کہ اس ناقص کا خروج المرکز جو اس سطح مائل پر ساکن رہ سکتا ہے کم سے کم

$$\sqrt{\frac{۲ \text{ جب } ع}{۱ + \text{جب } ع}}$$ ہونا چاہیئے۔

(۳۰) قطع ناقص کی شکل کا ایک اسطوانہ ایک کھردری انتصابی سطح اور ایک اتنی ہی کھردری افقی سطح کے درمیان ساکن ہے۔ اسطوانہ کا محور افقی ہے اور ناقص کا محورِ اعظم افق کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ رگڑ کی قدر

$\dfrac{\sqrt{\text{ا} + ۲\,\text{ز}^{۲} - \text{ز}^{۴}} - \text{ا}}{۲ - \text{ز}^{۲}}$ ہے، جہاں ز ناقص کا خروج المرکز ہے۔

(۳۱) تین مساوی اسطوانی سلاخیں اُسی نصف قطر کی ایک چوتھی سلاخ کے گرد متشاکلاً رکھی گئی ہیں اور پھر اس گٹھے کو دو مساوی لچکدار رسیوں سے گھیر لیا گیا ہے جو سروں کے لحاظ سے تشاکل میں ہیں۔ اگر ہر ایک رسی کا طول (بغیر کھچاؤ کے) ہر ایک سلاخ کے محیط کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اندرونی سلاخ کو کھینچنے کے لیے

$\dfrac{۴۵\,\text{مہ}\,\text{لہ}}{۱۱}$ قوت درکار ہوگی جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے اور لہ لچک کا مقیاس۔

(۳۲) نصف قطر ا کے تین مساوی کُرے ایک افقی سطح پر پڑے ہیں اور ایک دوسرے (۴۱)
کو مس کرتے ہیں۔ ان کُروں کے اوپر ایک اور کرہ رکھا گیا ہے جس کا نصف قطر ب ہے۔ اگر تعادل قایم رہے تو ثابت کرو کہ اوپر کے کرہ اور نیچے کے کُروں کے

درمیان رگڑ کا چھوٹے سے چھوٹا زاویہ $\frac{۱}{۲}$ جب$^{-۱}$ $\left[\dfrac{۲\,\text{ا}}{\sqrt{۳}\,(\text{ا} + \text{ب})}\right]$ ہوگا۔

(۳۳) ایک سائیکل کے پہیوں کے سب سے نچلے نقطوں کو ملانے والے خط کا طول ا ہے۔ مرکزِ ثقل اس خط سے ھ بلندی پر اور اس کے وسطی نقطہ کے آگے لا فاصلہ پر واقع ہے۔ اگر دھرے کی رگڑ اور پہیتے کے لڑ سکتے وقت اس کے خلاف سڑک کی مزاحمت کو نظرانداز کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ جب پچھلے پہیہ پر بریک لگا دی جائے تو اس سطح مائل کا بڑے سے بڑا زاویہ میلان جس پر سائیکل بغیر پھسلے روکی جاسکتی

ہے عہ ہوگا جہاں مس عہ $= \dfrac{\text{مہ}}{۲} \times \dfrac{\text{ا} - ۲\,\text{لا}}{\text{ا} - \text{مہ}\,\text{ھ}}$

اور مہ پہیہ اور زمین کے درمیان رگڑ کا زاویہ ہے۔

(۳۴) مساوی نصف قطر کے دو پہیوں ا اور ب کے وزن و اور وَ ہیں۔ ان کو ایک ہلکی سلاخ سے جو ان کے مرکزوں کے ساتھ پیوستہ ہے ملا یا گیا ہے سلاخ

کا طول ل ہے۔ ان پہیوں کو ایک کھردری مائل سطح مستوی پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ ان کی مشترک مستوی سطح انتصابی ہے اور ا اوپر کی طرف ہے۔ پھر سطح مائل کے میلان کو بتدریج بڑھایا گیا ہے اگر کسی ایک پہیہ کو بریک لگانے سے پہیے سطح مائل کے ایک ہی میلان سے پھسلنا شروع کریں تو ثابت کرو کہ $م \frac{ا}{ل} = \frac{د - د_1}{د + د_1}$

( ۳۵ ) ایک تاگے کی ریل کے تکلے کا نصف قطر ج ہے اور اس کے دو دائری سروں کا نصف قطر ا ہے۔ ریل کو ایک کھردری سطح مائل پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ جب یہ نیچے کی طرف لڑھکتی ہے تو اس کا تاگا کھلتا جاتا ہے۔ اگر رگڑ کی قدر م ہو اور سطح مستوی کا میلان افق کے ساتھ ۂ ہو تو ثابت کرو کہ ریل سطح مستوی پر اوپر کی طرف تاگے کے ذریعے کھینچی جا سکتی ہے بشرطیکہ $م < \frac{ج جب ۂ}{ا - ج جم ۂ}$۔ اگر م عین اس قیمت کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اس کے جواب میں تاگے کی سمت افقی ہوگی۔

( ۳۶ ) ایک پہیہ کا اسطوانی محور دو متوازی ریل کی پٹریوں پر ٹکا ہوا ہے پٹریاں ایک مائل سطح بناتی ہیں۔ ایک ڈوری پہیہ کے محیط پر لپٹی ہوئی ہے۔ بتاؤ کہ کن حالات میں ڈوری کو نیچے کی طرف مائل سطح کے متوازی کھینچنے سے پہیہ پٹریوں پر اوپر کی طرف چڑھے گا۔

( ۳۷ ) تاگے کی ایک ریل جس کے کنارے اور تکلے کے نصف قطر بالترتیب ا اور ب ہیں ایک کھردری افقی میز پر پڑی ہے اور تاگہ کا کھلا سرا جو تکلے کے نیچے سے گزرتا ہے میز پر پڑا ہے۔ یہ پورا نظام ایک ایسے سطح مستوی کے گرد جو ریل کے محور پر عمود وار ہے متشاکل ہے۔ ثابت کرو کہ اگر کھلے سرے کو اتنا اٹھایا جائے کہ یہ افق کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو تاگے میں ذرا سا تناؤ بھی عموماً ریل کو لڑھکانے کا باعث ہوگا اور اٹھانے والے شخص کے ہاتھ کی طرف یا اس کے مخالف سمت میں حرکت پیدا ہوگی جبکہ ط ایک خاص قیمت سے کم یا زیادہ ہو۔ جب ط کی یہ خاص قیمت ہو تو ثابت کرو کہ حرکت پیدا نہیں ہوگی تاوقتیکہ تناؤ ایک خاص محدود انتہا سے متجاوز نہ کرے۔

( ۳۸ ) دو پہیے کی گاڑی کا بم جب افق کے متوازی ہو تو اس کا مرکز ثقل پہیہ کے

دھرے کے عین اوپر ہوتا ہے۔ پہیہ کا نصف قطر ا ہے اور یہ کھردرے دھرے پر آزادانہ گھوم سکتا ہے دھرے کا نصف قطر ب ہے۔ زمین پھسلنے کے عمل کو روکنے کے لئے کافی کھردری ہے۔ ثابت کرو کہ کم سے کم قوت جو ل طول والے بم کے ایک سرے پر لگائی جائے تو گاڑی کو حرکت دے سکے پہیّہ اور زمین کے مشترک نقطہ میں سے گزرتی ہے اور $\frac{و ک \sqrt{ا^2 + ل^2}}{ا ک + ل \sqrt{1 - ک^2}}$ کے مساوی ہے۔ اس میں $ک = \frac{ب}{ا}$ جب صہ جہاں صہ پہیّہ اور دھرے کے درمیان رگڑ کا زاویہ ہے اور و گاڑی کا وزن ہے۔

(۳۹) ایک وزنی پہیہ کو ایک رسی کے ذریعہ جو اس کے ایک ارّے یا تیلی کے ساتھ بندھی ہے ایک رکاوٹ کے اوپر سے کھینچ کرلے جانا مقصود ہے رکاوٹ پہیہ کو ج پر مس کرتی ہے۔ اگر رسی کو افق کے متوازی کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ پہیہ ج کے گرد گردیگا اور زمین پر یا ج پر نہیں پھسلیگا اگر رسی کی اونچائی ج کے اوپر ا جب عہ مم (عہ ـ صہ) سے کم ہو جہاں ا پہیہ کا نصف قطر ہے ، ج پر کی رگڑ کا زاویہ صہ ہے اور وہ زاویہ عہ ہے جو ج میں سے گزرنے والا نصف قطر سمت انتصابی کے ساتھ بناتا ہے۔

(۴۰) ایک ٹھوس مستدیر اسطوانہ قاعدہ کے بل ایک کھردری افقی سطح مستوی پر پڑا ہے اور اپنے محور کے گرد آزادانہ حرکت کرسکتا ہے۔ اگر اس کا وزن و ہو اور اس کی تراش کا نصف قطر ا ہو تو ثابت کرو کہ چھوٹے سے چھوٹے جفت کا معیار اثر جو اس کو ہلا سکتا ہے $\frac{۲}{۳}$ مہ و ا ہے یہ مان لیا جائے کہ اس کا وزن سطح مستوی پر یکساں طور پر پڑتا ہے۔

(۴۱) ایک وزندار ناقص قرص ایک کھردرے میز پر پڑا ہے اس پر ایک افقی قوت ق عمل کرتی ہے جس کے زیر عمل وہ عین حرکت کرنے کو ہے ثابت کرو کہ اگر اس کا وزن اس کے رقبہ پر یکساں طور پر منقسم ہو اور یہ ایک ماسکہ کے گرد گھومنا شروع کرے تو قوت کو مرکز سے $\frac{۲ ا}{۳} \times \frac{1 - ز^2}{ز}$ فاصلہ پر معین کی سمت میں عمل کرنا چاہیئے۔

(۴۲) خط صنوبری (Cardiod) کی شکل کا ایک یکساں قرص ایک کھردری سطح مائل پر پڑا ہے جو افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے۔ قرص اپنے قطب پر ایک سوئی کے گرد گھوم سکتا ہے۔ جب قرص عین پھسلنے کو ہو تو اس کا محور سطح مائل کے خط میلان اعظم کے ساتھ زاویہ بہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب بہ = $\frac{۳}{۴}$ مہ × مم عہ ، جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے۔

نیز ثابت کرو کہ سوئی پر کے عمل کی سمت خط صنوبری کے محور کے ساتھ زاویہ مس$^{-1}$ ($\frac{1}{2}$ مس بہ) بناتی ہے۔

(۴۳) ایک چکر کھردری افقی سطح مستوی پر پڑا ہے اور اس کو ایک رسی کے ذریعہ جو اس کے کسی نقطہ ن پر بندھی ہے ن پر کے مماس کی سمت میں کھینچا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ چکر ن میں سے گزرنے والے نقطہ کے دوسرے سرے کے گرد گھومنا شروع کرے گا۔



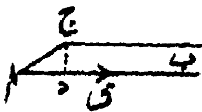
# پانچواں باب

## کام۔ موہوم کام

۸۶ ــــ جب ایک قوت کا نقطۂ عمل قوت کی سمت میں حرکت کرے تو کہتے ہیں کہ قوت نے کام کیا۔ ایک گاڑی کو کھینچنے میں گھوڑا جو قوت لگاتا ہے وہ کام کرتی ہے بھاپ کا دباؤ جب فشارہ کو حرکت دیتا ہے تو کام کرتا ہے۔

جب کوئی شخص گھڑی یا گھڑیال کو کنجی دیتا ہے تو وہ کام کرتا ہے کسی قوت کے کام کا ناپ قوت عاملہ اور اس فاصلہ کا حاصل ضرب ہے جس میں سے قوت کا نقطۂ عمل قوت کی سمت میں حرکت کرتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک قوت ق جو ایک جسم کے نقطۂ ا پر عمل کرتی ہے ا کو د تک لے جاتی ہے۔ ایسا کرنے میں قوت نے جو کام کیا وہ قوت ق اور ا د کے حاصلضرب سے تعبیر ہوگا۔ اگر نقطۂ د ا کے اس طرف ہو جس طرف قوت عمل کرتی ہے تو کام مثبت ہوگا اگر اس کے مقابل سمت میں ہو تو کام منفی ہوگا۔







اب فرض کرو کہ قوت کا نقطۂ عمل حرکت کرکے ج پر آجاتا ہے جو ا ب پر واقع نہیں ہے۔ ج د سے ا ب یا ا ب ممدودہ پر عمود گراؤ۔ تب ا د وہ فاصلہ ہے جس میں

سے قوت کے نقطۂ عمل نے قوت کی سمت میں حرکت کی ہے۔ اس لئے بائیں شکل میں کام ق × اد کے مساوی ہے اور دائیں شکل میں کام۔ ق × اد کے مساوی ہے، جب کسی قوت کا کام منفی ہو تو اس کو بعض اوقات یوں بیان کرتے ہیں کہ قوت کے خلاف کام کیا گیا ہے۔

اُس صورت میں جب اج، اب پر عمود وار ہو تو نقاط ڈ اور د منطبق ہو جاتے اور قوت ق کا کام معدوم ہو جاتا ہے۔

(۸۷) مثلاً اگر کسی جسم کو افقی میز پر حرکت دی جائے تو اس کے وزن کا کام صفر ہو جاتا ہے اسی طرح اگر کوئی جسم ایک سطح مائل پر حرکت کرے تو سطح مائل کا عمادی تعامل کوئی کام نہیں کرتا۔

۸۷ـــ کام کی اکائی جو سکونیات میں استعمال کیجاتی ہے فٹ پونڈ کہلاتی ہے۔ ایک فٹ پونڈ کام سے وہ کام مراد ہوتا ہے جو ایک پونڈ وزن کی قوت اپنی سمت میں جسم کے نقطۂ عمل کو ایک فٹ تک حرکت دینے میں سرانجام دیتی ہے۔ فٹ پونڈ کی بجائے فٹ پونڈ وزن کہنا زیادہ صحیح ہے لیکن زیادہ بھدا ضرور ہے۔

۸۸ـــ یہ بات قابل غور ہے کہ کام کی تعریف جو دفعہ ۸۶ میں دی گئی ہے اس میں حرکت لازمی طور پر مضمر ہے۔ ممکن ہے کہ ایک شخص جسم کو حرکت دینے کی کوشش میں بہت سی قوت صرف کرے لیکن دراصل جسم پر کوئی کام نہ کر سکے۔ مثلاً فرض کرو کہ ایک شخص بہت وزنی گاڑی کے ڈنڈے کو پکڑ کر کھینچتا ہے لیکن اُسے ہلا نہیں سکتا۔ اس لئے خواہ وہ اُسے کھینچنے میں اپنی پوری قوت صرف کردے لیکن چونکہ اوس کی قوت اپنے نقطہ عمل کو ہلا نہیں سکتی اس لئے وہ (کام کے اصطلاحی معنوں میں) کوئی کام نہیں کرتا۔

۸۹ـــ ثابت کرو کہ بہت سے ذروں کو ایک مقام سے اُٹھا کر دوسرے مقام پر لے جانے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ و × ف کے مساوی ہوتا ہے جہاں و ذروں کا مجموعی وزن ہے اور ف وہ فاصلہ ہے جس میں سے ذروں کا مرکزِ ثقل اُٹھایا گیا ہے۔

فرض کرو کہ $و_۱، و_۲، و_۳ ، \dots و_ن$ ذروں کے وزن ہیں اور ابتدائی محل میں افقی سطح کے اوپر اُن کے ارتفاع بالترتیب $لا_۱، لا_۲، لا_۳ \dots، لا_ن$ ہیں، نیز اُن کے مرکز ثقل کا ارتفاع $\bar{لا}$ ہے۔ اس طرح دفعہ ۴۳ کے مطابق

$$و \bar{لا} = و_۱ لا_۱ + و_۲ لا_۲ + و_۳ لا_۳ \dots\dots\dots + و_ن لا_ن \dots \quad (۱)$$

آخری محل میں فرض کرو کہ ان مختلف ذروں کے ارتفاع $\bar{لا}_۱، \bar{لا}_۲، \bar{لا}_۳ \dots \bar{لا}_ن$ ہیں اور $\bar{لا}$ نئے مرکز ثقل کا ارتفاع ہے، تب

$$و \bar{لا}' = و_۱ \bar{لا}_۱ + و_۲ \bar{لا}_۲ + \dots\dots\dots + و_ن \bar{لا}_ن \dots\dots \quad (۲)$$

تفریق کرنے سے $و_۱ (\bar{لا}_۱ - لا_۱) + و_۲ (\bar{لا}_۲ - لا_۲) + \dots \dots = و (\bar{لا}' - \bar{لا})$

لیکن مساوات کے دائیں جانب کا رکن اس کام کو تعبیر کرتا ہے جو نظام کے مختلف ذروں کو ابتدائی محل سے آخری محل میں لے جانے میں سرانجام پاتا ہے۔ نیز بائیں جانب کا رکن

= و × ارتفاع جس میں سے مرکز ثقل اوپر اُٹھا ہے۔

= و × ف

(۷۸) ۹۰ — یہ بات قابل غور ہے کہ دفعہ گذشتہ کا نتیجہ ذروں کی ابتدائی اور آخری ترتیب پر کسی طرح موقوف نہیں ہے تا وقتیکہ ان ترتیبوں سے ذروں کے مرکز ثقل کے ابتدائی اور آخری مقامات میں فرق نہ پڑے۔

مثلاً اگر زمین میں ایک سوراخ کیا جائے اور مٹی کو نکال کر سوراخ کے باہر سطح زمین پر پھیلایا جائے تو کام کی مقدار معلوم کرنے کے لئے ہمیں صرف یہ معلوم کرنے کی ضرورت ہے کہ ابتدا میں مرکز ثقل کہاں تھا اور آخر میں مرکز ثقل کہاں ہے۔ یہ کام کسی طرح اس امر پر منحصر نہیں کہ مٹی اپنے ابتدائی محل سے آخری محل میں کس راستے سے پہنچی۔

۹۱ — طاقت۔ تعریف۔ کسی عامل کی طاقت سے وہ کام مراد ہے جو وہ یکساں

شرح سے اکائی وقت میں کرتا ہے۔

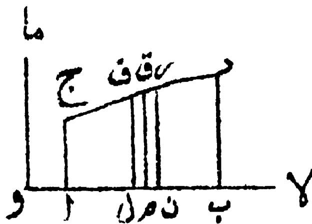
طاقت کی وہ اکائی جو انجینیروں کے ہاں مستعمل ہے اسپی طاقت کہلاتی ہے اگر کوئی عامل ایک منٹ میں ۳۳۰۰۰ فٹ پونڈ کام کرے۔ یعنی ایک منٹ میں ۳۳۰۰۰ پونڈ ایک فٹ تک اٹھائے یا ۳۳۰ پونڈ کو ۱۰۰ فٹ تک یا ۳۳ پونڈ کو ۱۰۰۰ فٹ تک تو ہم کہتے ہیں کہ وہ ایک اسپی طاقت سے کام کر رہا ہے۔

گھوڑے کی طاقت کا یہ اندازہ واٹ صاحب نے لگایا تھا لیکن یہ معمولی گھوڑوں کی طاقت سے بہت زیادہ ہے۔

## ۹۴۔ قوت کے کام کی ترسیمی تعبیر۔

بعض اوقات متغیر قوت کے کام کو براہ راست محسوب کرنا مشکل ہوتا ہے لیکن معتدبہ حد تک تقریبی نتائج حاصل کرنا بہت ممکن ہے۔

فرض کرو کہ متغیر قوت ہمیشہ خط مستقیم و لا کی سمت میں عمل کرتی ہے ہم یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ جب قوت کا نقطۂ عمل ا سے ب تک حرکت کرے تو قوت کتنا کام کرتی ہے۔




ا اور ب میں سے معین اج اور ب د کھینچو جو ان دو نقاط عمل پر قوت کی شدتوں کو ظاہر کریں اسی طرح ا ب کے درمیان ہر نقطۂ عمل ل میں سے معین ل ف کھینچو جو اس نقطہ پر عمل کرنے والی قوت کی مقدار کو تعبیر کرے۔ تب صریحاً ان معینوں کے سرے ج ف د کی قسم کے کسی منحنی پر واقع ہونگے۔

ل کے قریب کوئی نقطہ م ایسا لو جو ل سے اس قدر قریب ہو کہ قوت کا نقطۂ عمل ل سے م تک حرکت کرنے کے دوران میں قوت کی مقدار کو مستقل فرض کیا جا سکے۔

تب قوت کا کام = اس کی مقدار × وہ فاصلہ جس میں سے قوت کا نقطۂ عمل حرکت کرتا ہے۔

= ل ف × ل م = ف م کا رقبہ تقریباً

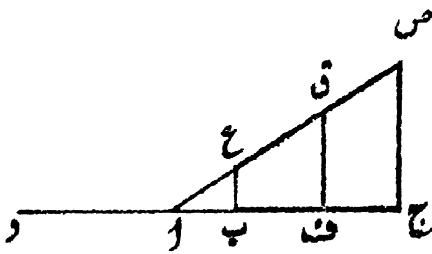
اسی طرح جب نقطۂ عمل م سے ن تک جائے تو

کام = ق ن کا رقبہ تقریباً

علیٰ ہذا القیاس

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطۂ عمل کے ا سے ب تک حرکت کرنے میں جو کام ہوتا ہے وہ طولوں ل م، م ن، ...... کو لا انتہا چھوٹا لینے سے رقبہ ا ج ب د کے زیادہ قریب آتا جاتا ہے۔

۹۳۔ مثال کے طور پر ہم وہ کام معلوم کرتے ہیں جو ایک لچکدار رسی کو طول دب (= و ب) سے طول دج (= و ج) تک کھینچنے میں انجام پاتا ہے رسی کا طول بغیر کھنچاؤ کے دا (= وا) ہے۔




جب رسی کا طول د ف ہو

تو تناؤ = $\frac{\text{لچ}}{\text{وا}}$ (د ف - دا) = $\frac{\text{لچ}}{\text{وا}}$ × ف ا ، ہک کے کلیہ سے جہاں لچک کی قدر لچ ہے

ف پر عمود ف ق کھینچو جو اس تناؤ کو تعبیر کرے۔

تب $\frac{\text{ف ق}}{\text{ف ا}}$ مستقل ہے اور اس لئے ق واقع ہوگا ایک خط مستقیم ا ع ص پر جو ا میں سے گزرتا ہے۔ اگر یہ خط مستقیم ب اور ج پر کے عمودوں کو ع اور ص پر ملے تو دفعۂ ما قبل سے مطلوبہ کام رقبہ ب ع ص ج سے تعبیر ہوگا اور اس لئے

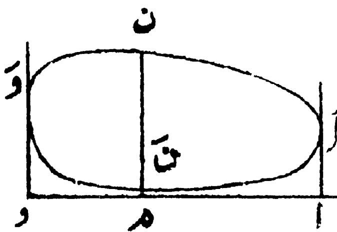
$\frac{1}{2}$ ب ج × ( ب ع + ج ص ) کے مساوی ہوگا ۔ یعنی
کام = رسی کا کھچاؤ × ابتدائی اور آخری تناؤں کا اوسط
یا تکملی احصاء سے

$$\text{کام} = \int_{\bar{ب}}^{\bar{ج}} \text{ت فرلا} = \frac{\text{ل}}{\bar{ا}} \int_{\bar{ب}}^{\bar{ج}} (\text{لا} - \bar{ا}) \text{ فرلا}$$

$$= \frac{\text{ل}}{2\bar{ا}} \Big[ (\text{لا} - \bar{ا})^2 \Big]_{\bar{ب}}^{\bar{ج}} = \frac{\text{ل}}{2\bar{ا}} (\bar{ج} - \bar{ب})(\bar{ج} + \bar{ب} - 2\bar{ا})$$

$$\frac{\bar{ج} - \bar{ب}}{2} \left( \text{ت}_{ب} + \text{ت}_{ج} \right)$$

۹۴ — بطور دوسری مثال کے ایک بھاپ انجن کے مظہار نقشہ پر غور کرو ۔
فرض کرو کہ د ا وہ فاصلہ ہے جو انجن کا فشارہ طے کرتا ہے ۔ جب فشارہ آگے کی حرکت میں مقام ھ پر ہو تو اس پر کے بھاپ کے دباؤ کو عمود ھ ن سے تعبیر کرو ۔ اس طرح عمل کرنے سے ظاہر ہے کہ فشارہ کی آگے کی حرکت کے دوران میں اس پر بھاپ کے دباؤ کو منحنی

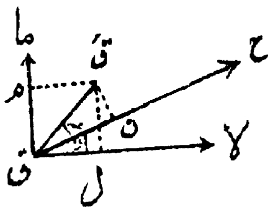



وَ ن اَ تعبیر کرتا ہے ۔ اس طرح سے فرض کرو کہ فشارہ کی واپسی کی حرکت کے دوران میں جب بھاپ کی آمد بند کر دی جاتی ہے فشارہ کے اسی رخ کے دباؤ کو منحنی اَ ن َ وَ تعبیر کرتا ہے ۔
تب فشارہ کی آگے کی حرکت کے دوران میں وہ کام جو بھاپ فشارہ پر کرتی ہے منحنی د وَ ن اَ ا کے رقبہ سے تعبیر ہوگا اور اسی طرح واپسی کی حرکت میں وہ کام

جو بھاپ فشارہ کے خلاف کرتی ہے سختی ا ن د و ا کے رتبہ سے تعبیر ہوگا۔
اس لئے ایک مکمل ضرب کے دوران میں وہ کل کام جو بھاپ فشارہ کے ایک رخ پر کرتی ہے رتبہ د ن ا ن د سے تعبیر ہوتا ہے اور اس لئے معلوم ہو سکتا ہے۔
اس قسم کے منحنی کو جو شکل بالا میں دکھایا گیا ہے ہم مظہار نقشہ کہیں گے اور یہ نقشہ فشارہ کی حرکت سے خود بخود کھینچ سکتا ہے یعنی مناسب انتظام سے انجن اپنا مظہار نقشہ آپ کھینچ سکتا ہے۔

۹۵ — کسی قوت کا کام۔ اُس قوت کے اجزائے ترکیبی کے کاموں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ قوت ح کے اجزائے ترکیبی دو علی القوائم سمتوں میں لا اور ما ہیں اور ح محور لا کی سمت کے ساتھ زاویہ فہ بناتی ہے۔
اس لئے لا = ح جم فہ اور ما = ح جب فہ
فرض کرو کہ ح کا نقطۂ عمل ق حرکت کر کے لا ما مستوی میں قَ پر آجاتا ہے، قَ سے ح کی سمت پر عمود قَ ن کھینچو




اور فرض کرو کہ ∠ ن ق قَ = عہ
تب لا اور ما کے کاموں کا مجموعہ
= لا × ق ل + ما × ق م
= ح جم فہ × ق قَ جم (فہ + عہ) + ح جب فہ × ق قَ جب (فہ + عہ)
= ح ق قَ جم عہ = ح × ق ن = ح کا کام

۹۶ — اگر قوتیں اور ہٹاؤ ایک ہی سطح مستوی میں نہ ہوں تو بھی یہی نتیجہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ق ح کی سمتی جیوب التمام کسی علی القوائم محاور و لا، و ما، و ی، کے لحاظ سے (ل، م، ن) ہیں یعنی لا = ل ح، ما = م ح، ی = ن ح، نیز ہٹاؤ مف س ایک ایسے خط پر واقع ہوتا ہے جس کی سمتی جیوب التمام (لَ، مَ، نَ) ہیں اس طرح مف لا = لَ مف س، مف ما = مَ مف س اور مف ی = نَ مف س

تب ترکیبی قوتوں کا کام = لا مف لا + ما مف ما + ے مف ی

= ح مف س (ل لَ + م مَ + ن نَ)

= ح مف س × جم ق قَ ح = ح × ق قَ کا ظل ح کی سمت پر

= ح کا کام

اگر کوئی ذرہ فضا میں چکنے منحنی پر حرکت کرے اور اس کے کسی نقطہ (لا، ما، ی) پر اس پر عمل کرنے والی قوت کے اجزائے ترکیبی لا، ما، ے ہوں تو ظاہر ہے کہ جب ذرہ ا سے حرکت کرکے ب پر جاتا ہے تو وہ کل کام جو اس پر ہوتا ہے وہ

= ∫ (ا سے ب تک) (لا ڈلا + ما ڈما + ے ڈی)

۹۷ — **جفت کا کام** — فرض کرو کہ جفت کی ہر ایک قوت ق ہے اور اس کے بازو اب کا طول اَ ہے۔

اب فرض کرو کہ جفت نیا مقام اختیار کرتا ہے اور اب کا مقام اَ بَ ہو جاتا ہے اور اب اور اَ بَ کا درمیانی زاویہ مف ط ہے۔

پہلے قوتوں کو اپنے متوازی اس طرح حرکت دو کہ بازو اب متوازی محل اَ ج میں آجائے۔ اس ہٹاؤ کے لئے مساوی اور مقابل قوتوں ق کا کام صفر ہوگا۔

اب قوتوں کو اَ کے گرد گھماؤ۔ یہ مف ط میں سے گھماؤ۔ قوت ق جو اَ پر عمل کرتی ہے اس کا نقطۂ عمل نہیں ہلتا اس لئے وہ کوئی کام نہیں کرتی۔ دوسری قوت ق کے نقطۂ عمل کا ہٹاؤ اَ مف ط ہے۔ اس لئے کل کام جو ہوا وہ ق × اَ × مف ط کے مساوی ہے۔ یعنی جفت کے معیار اثر اور گھماؤ کے زاویہ کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

اگر جفت کے گھماؤ کا کل زاویہ عہ ہو تو جفت کا کام

= ∫ (ب سے عہ تک) ق × اَ مف ط = ق × اَ عہ

(۸۲) اس لیے سب صورتوں میں جفت کا کام جب کہ جفت کو اس کے محور کے گرد جو اس کی سطح مستوی پر عمود وار ہو گھمایا جائے جفت کے معیار اثر اور گھماؤ کے زاویہ کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے ۔

**۹۸ــــ توانائی بالقوہ** ۔ قوتوں کے کسی دیئے ہوئے نظام کے زیر عمل کسی جسم کی توانائی بالقوہ سے وہ کام مراد ہوتا ہے جو کہ نظام مذکور جسم پر کرسکتا ہے جب کہ جسم موجودہ روپ (Configuration) سے کسی معیاری روپ تک جس کو محل صفر کہتے ہیں پہنچے ۔

مثلاً وزن و کے کسی ذرہ کی توانائی بالقوہ جب کہ وہ زمین کے اوپر ارتفاع ھ پر ہو و ھ ہوتی ہے ۔

اگر ہم جاذبۂ ارض کے تغیر کو بھی ملحوظ رکھیں اور یہ مان لیں کہ زمین کے مرکز سے لا فاصلہ پر کے کسی ذرہ پر زمین کی کشش $\frac{\text{مہ}}{\text{لا}^2}$ کے مساوی ہوتی ہے تو ھ بلندی پر توانائی بالقوہ جبکہ زمین کی سطح کو محل صفر مانا جائے اور زمین کو نصف قطر ا کا کرہ فرض کیا جائے

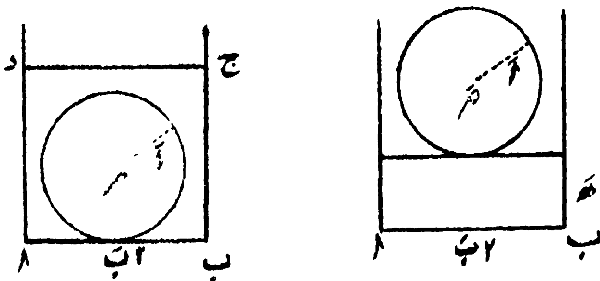
$$\int_{\text{ا}+\text{ھ}}^{\text{ا}} \left(-\frac{\text{مہ}}{\text{لا}^2}\right) \text{ڈلا} = \text{مہ}\left[\frac{1}{\text{ا}} - \frac{1}{\text{ا}+\text{ھ}}\right] = \frac{\text{مہ ھ}}{\text{ا}(\text{ا}+\text{ھ})} = \frac{\text{ا ھ و}}{\text{ا}+\text{ھ}}$$

کے مساوی ہوگی ۔ کیونکہ زمین کے سطح پر کے کسی مقام پر کشش $\text{و} = \frac{\text{مہ}}{\text{ا}^2}$

اسی طرح اگر ایک لچکدار رسی لی جائے جس کا قدرتی طول ا ہے اور اس کے ایک سرے کو ایک ثابت نقطہ کے ساتھ باندھ دیا جائے تو دفعہ ۹۳ کی رو سے ایک ذرہ کی توانائی بالقوہ جو اس کے دوسرے سرے کے ساتھ بندھا ہو $\frac{\text{لہ لا}^2}{2\,\text{ا}}$ ہوگی جبکہ کھچا ہوا طول ا + لا ہو ۔

**۹۹ــــ مشق ۱** ــــ ایک کروی گولی جس کا وزن و پونڈ اور نصف قطر اَ فٹ ہے ایک اسطوانی ڈول کی تہ میں پڑی ہے ۔ ڈول کا نصف قطر ب فٹ ہے اور اس کے اندر ھ ($>$ ۲ اَ) ارتفاع تک پانی بھرا ہوا ہے ۔ ثابت کرو کہ پوری گولی کو پانی کے عین باہر نکال لینے میں جو کام ہوتا ہے وہ $\text{و}\left(\text{ھ} - \frac{4\,\text{اَ}^3}{3\,\text{ب}^2}\right) - \text{وَ}\left(\text{ھ} - \text{اَ} - \frac{2\,\text{اَ}^3}{3\,\text{ب}^2}\right)$ فٹ پونڈ سے زیادہ ہوگا جہاں گولی سے

ہٹائے ہوئے پانی کا وزن $\bar{\text{و}}$ ہے ۔




(۸۲ اگر پانی کے اکائی حجم کا وزن و اور گولی کی کثافت اضافی ک ہو تو

$$\text{و} = \frac{4}{3}\pi\,\text{ا}^3\,\text{ک و} \qquad \text{اور} \qquad \bar{\text{و}} = \frac{4}{3}\pi\,\text{ا}^3\,\text{و}$$

کام کم از کم نظام کی توانائی بالقوہ کے اضافہ کے مساوی ہونا چاہیئے ۔

پہلی صورت میں توانائی بالقوہ

= پانی کے (اسطوانہ ا ب ج د - کرہ) کی توانائی بالقوہ

+ ک × دئے ہوئے کرہ کے مساوی پانی کی توانائی بالقوہ

= پانی کے اسطوانہ ا ب ج د کی توانائی بالقوہ + پانی کے کرہ کی توانائی بالقوہ کا (ک - ۱) گنا

$$= \pi\,\text{ب}^2\text{ھ و}\times\frac{\text{ھ}}{2} + \frac{4}{3}\pi\,\text{ا}^3(\text{ک}-1)\,\text{ا و} = \frac{3}{8}\,\frac{\text{ب}^2\text{ھ}^2}{\text{ا}^3}\,\bar{\text{و}} + (\text{و}-\bar{\text{و}})\,\text{ا} \quad \ldots\ldots (1)$$

جب کرہ کو نکال لیا جائے تو فرض کرو کہ پانی کی گہرائی $\bar{\text{ھ}}$ ہے

پس $\pi\,\text{ب}^2\bar{\text{ھ}} = \text{پانی کا حجم} = \pi\,\text{ب}^2\text{ھ} - \frac{4}{3}\pi\,\text{ا}^3$

یعنی $\bar{\text{ھ}} = \text{ھ} - \frac{4\text{ا}^3}{3\text{ب}^2}$ ................................ (۲)

دوسری صورت میں توانائی بالقوہ

$$= \pi\,\text{ب}^2\bar{\text{ھ}}\,\text{و}\times\frac{\bar{\text{ھ}}}{2} + \text{و}(\bar{\text{ھ}}+\text{ا}) = \frac{3}{8}\,\frac{\text{ب}^2\bar{\text{ھ}}^2}{\text{ا}^3}\,\bar{\text{و}} + \text{و}(\bar{\text{ھ}}+\text{ا}) \quad \ldots\ldots (3)$$

توانائی بالقوہ کا اضافہ

$$= \frac{۳}{۸} \frac{ب^۲ و}{ل^۳} (ھ^۲ - ھ^۲) + و ھ + و ل$$

$$= و \left( ھ - \frac{۴ ل^۳}{۳ ب^۲} \right) - و \left( ھ - ل - \frac{۲}{۳} \frac{ل^۳}{ب^۲} \right)$$

مشق ۲ — ‏Π دباؤ پر ایک گیس کا حجم ح ایک اسطوانی برتن کے اندر بند ہے۔ اگر گیس کو اس طرح پھیلنے دیا جائے کہ گیس کا طول لا سے لا۱ ہو جائے اور تپش مستقل رہے تو ثابت کرو کہ اس کا کام $Π$ ح لوک$_و \frac{لا_۱}{لا}$ ہوگا۔

اگر اس کا پھیلاؤ حرنا گزر ہو یعنی اس کے پھیلنے میں نہ تو حرارت باہر سے اندر جائے اور نہ اندر سے باہر آئے اور اس لئے دباؤ اور حجم ح کا رشتہ د ح$^ک$ مستقل ہے تو ثابت کرو کہ اس صورت میں کام $\frac{Π ح}{ک - ۱} \left[ ۱ - \left( \frac{لا}{لا_۱} \right)^{ک-۱} \right]$ کے مساوی ہوگا۔

فرض کرو کہ دباؤ د ہے جبکہ گیس اسطوانہ کے طول لا میں پھیلی ہوئی ہے تو کلیہ بائل سے

$$د لا = Π لا$$

جب طول لا سے لا + مف لا ہو جائے تو

کام = د × ا مف لا جہاں ا اسطوانہ کی عمودی تراش کا رقبہ ہے

$$= \frac{Π لا}{لا} \times \frac{ح}{لا} مف لا$$

$$\text{پس مطلوبہ کام} = \int_{لا}^{لا_۱} \frac{Π ح}{لا} فرلا = Π ح لوک_و \frac{لا_۱}{لا}$$

دوسری صورت میں　$د لا^ک = Π لا^ک$

(۸۴)

$$\text{اور اس لئے کام} = \int_{لا}^{لا_۱} د \times \frac{ح}{لا} فرلا = Π ح لا^{ک-۱} \int_{لا}^{لا_۱} \frac{فرلا}{لا^ک}$$

$$= \pi\,\text{ح}\,\frac{\text{لا}_1^{\text{ک}-1}}{\text{ک}-1}\left\{\frac{1}{\text{لا}_1^{\text{ک}-1}} - \frac{1}{\text{لا}^{\text{ک}-1}}\right\} = \frac{\pi\,\text{ح}}{\text{ک}-1}\left[1-\left(\frac{\text{لا}_1}{\text{لا}}\right)^{\text{ک}-1}\right]$$

مشق ۳ - اگر مشق ماقبل میں گیس کسی شکل کے برتن کے اندر بند ہو اور دباؤ $\pi$ پر اس کا حجم ح ہو اور پھر اس کا حجم $\text{ح}_1$ ہو جائے تو ثابت کرو کہ کام

$$\pi\,\text{ح}\ \text{لوک}\ \frac{\text{ح}_1}{\text{ح}} \quad \text{یا} \quad \frac{\pi\,\text{ح}}{\text{ک}-1}\left[1-\left(\frac{\text{ح}}{\text{ح}_1}\right)^{\text{ک}-1}\right]$$

ہوگا بموجب اس بات کے کہ پھیلاؤ کس شرط کے ماتحت عمل میں آیا ہے -

# مثالیں

۱ - ایک دخانی جہاز ۱۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہا ہے - اگر اس کے انجن کی موثر اسپی طاقت ۱۰۰۰ ہو تو بتاؤ کہ اس کی حرکت میں کس قدر مزاحمت ہو رہی ہے -

(جواب $\frac{۲۵}{۲۸}$ ۱۱۱ ٹن وزن)

۲ --- ایک پہاڑی کا ڈھال ۲۰ میں ۱ ہے اس پر ایک سائیکل سوار ۶ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے اوپر چڑھ رہا ہے اگر سوار اور سائیکل کا مجموعی وزن ۲۰۰ پونڈ ہو تو بتاؤ کہ وہ کم از کم ۰۱۶ اسپی طاقت سے کام کر رہا ہے -

۳ --- ایک شخص ایک منٹ میں کشتی پر ۴۰ دفعہ چپو چلا رہا ہے اور اس سے کشتی ۱۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے آگے بڑھ رہی ہے اگر اس کی حرکت میں ۸ پونڈ وزن کی مزاحمت ہو تو بتاؤ کہ وہ ایک دفعہ چپو چلانے میں کتنا کام کرتا ہے - نیز بتاؤ کہ کس اسپی طاقت سے کام کر رہا ہے

(جواب ۱۷۶ فٹ پونڈ، ۲۱۳ء۰ اسپی طاقت)

۴ --- ایک لچکدار رسی کا قدرتی طول ۱۰ انچ ہے اگر اس کو پانچ پونڈ وزن کی قوت سے کھینچا جائے تو اس کا طول کھنچ کر ۱۵ انچ ہو جاتا ہے - بتاؤ کہ اس کے طول کو ۱۲ انچ سے کھینچ کر ۱۵ انچ کرنے کے لئے کس قدر کام کرنا پڑتا ہے -

( $\frac{۷}{۸}$ فٹ پونڈ )

۵ --- ایک پیچدار کمانی کو ایک انچ کھینچنے کے لئے ایک پونڈ وزن کی قوت درکار ہوتی ہے بتاؤ کہ اسے مزید ۳ انچ کھینچنے میں کتنا کام کرنا پڑیگا -

( $\frac{۵}{۸}$ فٹ پونڈ )

۶ــــ ایک قوت ایک ذرہ پر عمل کرتی ہے اس کی ابتدائی قیمت ۲۰ پونڈ ہے اور اس کی قیمتیں جبکہ اس کا نقطۂ عمل ذرہ کی حرکت کی سمت میں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ فٹ فاصلوں میں سے حرکت کرے بالترتیب ۲۵، ۲۹، ۳۲، ۳۱، ۲۷ اور ۲۴ پونڈ ہیں یہ تسلیم کرکے کہ ذرہ کی حرکت کے ہر ایک فٹ میں قوت یکساں طور پر بدلتی ہے قوت اور فاصلہ کی ترسیم بتاؤ اور اس سے قوت کا کام معلوم کرو۔

۷ ــــ ایک پیچ کا محور انتصابی ہے اور اس کی متصل چوڑیوں کا درمیانی فاصلہ ۲ انچ ہے ۱۰۰ پونڈ وزنی دروازہ کو اس پیچ کے ساتھ اس طرح لگایا گیا ہے جیسے قبضے کے ساتھ لگایا جاتا ہے بتاؤ کہ دروازہ کو ایک زاویہ قائمہ میں سے گھمانے میں کتنا کام ہوتا ہے۔

($4\frac{1}{6}$ فٹ پونڈ)

۸ ــــ ثابت کرو کہ رسّے کا تناؤ ۹ ٹن وزن ہے جبکہ رسّا ایک ایسے دوسرے پیچ کے گرد (۸۵)
لپٹا ہوا ہے جس میں سے ایک پانچ چوڑی فی انچ والا راست دستی پیچ ہے اور دوسرا چھ چوڑی فی انچ والا چپ دستی پیچ ہے اور ۴۹ پونڈ وزن کی قوت ۲ فٹ کے ہتھے کے سرے پر لگائی گئی ہے۔

[دوہرے پیچ کی ایک مکمل گردش میں سرے ($\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$) انچ قریب آتے ہیں۔ اس لئے کام کے اصول سے

$$ت \times \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{12} = 49 \times (2\pi \times 2)$$

جہاں ت روک رسّے کا تناؤ پونڈ وزن میں ہے ]

۹ ــــ وینیشی پردے میں اوپر کی ثابت سلاخ کے علاوہ ن پتلی سلاخیں ہیں اور قابل حرکت حصہ کا وزن و ہے پردہ چھوڑ دینے پر اس کا طول ا ہوتا ہے اور جب اس کو اوپر اٹھایا جائے تو اس کا طول ب ہوتا ہے۔ بتاؤ کہ اس کو اوپر اٹھانے میں جاذبہ ارض کے خلاف جو کام کرنا پڑتا ہے وہ $و \frac{ن+1}{2ن}(ا - ب)$ ہے

۱۰ ــــ ایک ٹھوس نصف کرہ جس کا وزن ۱۲ پونڈ اور نصف قطر ۱ فٹ ہے اپنے چپٹے رخ کے بل ایک میز پر پڑا ہے اگر اس کو اس طرح پلٹا جائے کہ اس کا منحنی رخ میز کو مس کرتے ہوئے لٹکا رہے تو بتاؤ کہ محل اول سے محل ثانی میں آنے میں کتنا کام ہوا [دفعہ ۸۹

اور ۱۴۸ کے نتیجے استعمال کرو] (۳ فٹ پونڈ)

۱۱ — مثلثی منشور کی شکل کے ایک یکساں کندے کا وزن نصف ٹن ہے۔ اس کی عمودی تراش کے اضلاع $1\frac{1}{2}$ فٹ، ۲ فٹ اور $2\frac{1}{2}$ فٹ ہیں۔ یہ زمین پر سب سے چھوٹے رخ کے بل پڑا ہے۔ اس کو ایک کنارہ کے گرد اس طرح اٹھانا منظور ہے کہ یہ سب سے بڑے رخ کے بل گر پڑے۔ بتاؤ کہ ایسا کرنے کے لئے تقریباً ۲۷ر فٹ ٹن کام کرنا پڑیگا۔

(دفعہ ۳۷ کو استعمال کرو)

۱۲ — ایک سائیکل سوار جو ہمیشہ $\frac{2}{5}$ اسپی طاقت کی شرح سے کام کرتا ہے ہموار افقی زمین پر ۱۰ میل فی گھنٹہ کی شرح سے سائیکل چلاتا ہے اور ایک پہاڑی پر جس کا میلان ۱ میں ۵۰ ہے ۸ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چڑھتا ہے۔ فرض کرو کہ سوار اور سائیکل کا وزن ۱۸۰ پونڈ ہے اور افقی زمین پر کی مزاحمت دو حصوں پر مشتمل ہے جن میں سے ایک مستقل ہے اور دوسری رفتار کے مربع کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ جب رفتار و میل فی گھنٹہ ہو تو مزاحمت فی گھنٹہ

$$\left(1.75 + \frac{و^2}{80}\right) \text{ پونڈ وزن}$$

۱۳ — ایک اسطوانہ کی شکل کے کاگ کو جس کا طول ل ہے اور نصف قطر ر ہے ایک بوتل کی گردن میں سے بتدریج نکالا جا رہا ہے۔ اگر بوتل اور کاگ کے نہ نکلے ہوئے حصہ کے درمیان عمادی دباؤ فی اکائی رقبہ کسی لمحہ میں مستقل رہے اور ق کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اس کو نکالنے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ $\pi$ مہ ر ل$^2$ ق کے مساوی ہے جہاں رگڑ کی قدر مہ ہے۔

۱۴ — ایک وزن و کو ایک کھردرے مخروط کی سطح پر کھینچا جا رہا ہے۔ مخروط کا ارتفاع ھ اور راسی زاویہ ۲ عہ ہے وزن کا راستہ خطوط میلان اعظم کو ایک ہی زاویہ ب پر قطع کرتا ہے اگر رگڑ کی قدر مہ ہو تو ثابت کرو کہ جب جسم مخروط کے راس پر پہنچے گا تو کل کام و ھ × (۱ + مہ مس عہ قطا ب) کے مساوی ہوگا۔

$$\left[\text{کام} = و \times ھ + \int^{ھ} مہ\, ر \frac{\text{فرلا}}{\text{جم ب جم عہ}} \qquad \text{جہاں } ر = و \text{ جب عہ}\right]$$

(۸۶) **۱۵** ـــ ایک ذرہ جس کا وزن **و** ہے کھردرے نصف کردی پیالہ کی تہ میں پڑا ہے جو راس پر سب سے نچلے نقطہ پر ثابت ہے۔ ذرہ کے ساتھ ایک رسی بندھی ہے جو پیالہ کے کنارہ پر سے گزرتی ہے اور ذرہ کو ایک انتصابی مستوی میں جو پیالہ کے محور میں سے گزرتا ہے رسی کے ذریعہ آہستہ آہستہ اوپر کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ ذرہ کو کنارہ تک کھینچنے میں

و ا [ ۱ + (ٹ/۲) جب² صہ − جب ۲ صہ لوکہ (۱ + مس صہ)/√۲ ]

کام کرنا پڑتا ہے جہاں پیالہ کا نصف قطر ا ہے اور رگڑ کا زاویہ صہ ہے

[ اگر پیالہ کا تعامل ر ہو جبکہ ذرہ میں سے گزرنے والا نصف قطر افق کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو رسی کے عمود وار تحلیل کرنے سے

ر = و جم صہ جب (طہ/۲) قط (طہ/۲ − صہ)

اس لئے ذرہ کو اوپر کھینچنے میں رگڑ کے خلاف جو کام کرنا پڑتا ہے وہ

= ∫ (از ٹ/۲ تا ۰) مس صہ ر (− ا ذ طہ) = و ا جب صہ ∫ (از ۰ تا ٹ/۲) جب (طہ/۲) قط (طہ/۲ − صہ) ذ طہ

= و ا جب صہ ∫ (از −صہ تا ٹ/۴ − صہ) جب (ف + صہ) قط ف ذ ف = ۲ و جب صہ ∫ (از −صہ تا ٹ/۴ − صہ) [جب صہ + جم صہ مس ف]

وغیرہ وغیرہ

نیز وزن کے خلاف جو کام ہوا وہ = و ا ]

**۱۶** ـــ ایک متجانس مجسم مخروط کا ارتفاع ھ، نصف قطر ر اور کثافت اضافی ک ہے اس کو ایک انتصابی اسطوانہ کے اندر جس کا نصف قطر ر ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا راس اوپر کی طرف ہے۔ اسطوانہ کے اندر ارتفاع ھ تک پانی بھرا گیا ہے یعنی مخروط عین ڈوبا ہوا ہے۔ بتاؤ کہ مخروط کو پانی سے عین باہر نکالنے کے لئے

(۲/۳) و ھ (۱ − ۱/(۳ک))

کام کرنا پڑتا ہے جہاں مخروط کا وزن و ہے اور ک ایک سے بڑا ہے۔

۱۰۰۔۔۔ موہوم کام۔ جب ایک جسم قوتوں کے ایک نظام کے زیر عمل ساکن ہو اور اور ہم فرض کریں کہ جسم میں خفیف سا ہٹاؤ واقع ہوتا ہے جو اُن ہندسی شرائط کے موافق ہے جن کے تحت قوتوں کے نظام کا وجود ہے اور اگر جسم کا کوئی نقطہ ق اس خیالی ہٹاؤ کے بعد قَ پر چلا جائے تو ق قَ کو قَ کی موہوم رفتار یا ہٹاؤ کہتے ہیں۔ لفظ موہوم کا استعمال اس امر واقع کو ظاہر کرنے کے لئے کیا گیا ہے کہ ہٹاؤ محض خیالی ہے اور فی الحقیقت وقوع پذیر نہیں ہوتا۔

اگر ایک قوت ح نقطہ ق پر عمل کرے اور اگر قَ ن، قَ سے ح کی سمت پر عمود کھینچا جائے تو حاصل ضرب ح × ق ن کو قوت ح کا موہوم کام یا موہوم معیار اثر کہتے ہیں۔

دفعہ ۸۶ کی طرح یہ کام مثبت ہوگا اگر ق ن کی وہی سمت ہو جو ح کی ہے اور منفی ہوگا اگر ق ن کی سمت ح کی سمت کے مخالف ہو۔ (۸۷)

۱۰۱۔۔۔ موہوم کام کا اصول اس بات کو ظاہر کرتا ہے کہ اگر ایک جسم پر عمل کرنے والی قوتوں کا نظام تعادل میں ہو اور جسم میں خفیف سا ہٹاؤ واقع ہو جس سے نظام کی ہندسی شرائط میں فرق نہ آئے تو موہوم کاموں کا جبری مجموعہ صفر ہوگا اور برعکس اس کے اگر جبری مجموعہ صفر ہو تو قوتیں تعادل میں ہونگی۔ دوسرے الفاظ میں اگر ہر ایک قوت ق کا موہوم ہٹاؤ اس کے خط عمل کی سمت میں مف ق ہو تو چھوٹی مقداروں کے پہلے رتبے تک

$\Sigma$ (ق × مف ق) = ۰ نیز برعکس اس کے اگر

$\Sigma$ (ق × مف ق) صفر ہو تو قوتیں تعادل میں ہونگی۔

اگر جسم ایک واحد ذرہ ہو تو دفعہ ۹۶ کی رو سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر تمام قوتوں کے موہوم کاموں کا مجموعہ جو ایک ذرہ پر عمل کریں صفر ہو تو حاصل کا موہوم کام بھی صفر ہوتا ہے، اس لئے حاصل قوت معدوم ہو جاتی ہے اور ذرہ تعادل میں رہتا ہے۔

اگلے دفعہ میں ہم سطحی قوتوں کے لئے اس مسئلہ کا ثبوت درج کیا جائیگا تین ابعاد

میں عمل کرنے والی قوتوں کے لئے اس مسئلہ کا ثبوت دفعہ ۱۷۵ میں دیا جائیگا۔

## ۱۰۲ — موہوم کام کے اصول کا ثبوت جب قوتیں ایک سطح مستوی میں عمل کریں۔

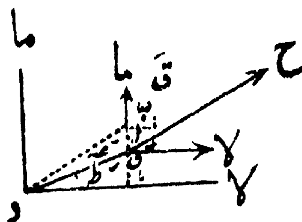
ایک سطح مستوی میں دو خط کھینچو جو ایک دوسرے پر علی القوائم ہوں۔ فرض کرو کہ جسم میں خفیف سا ہٹاؤ وقوع پذیر ہوتا ہے۔ یہ آسانی سے اس طرح ہوسکتا ہے کہ پہلے جسم کو نقطہ و کے گرد ایک چھوٹے زاویہ عہ میں سے گھمایا جائے اور پھر اس کا محوروں کے متوازی مناسب فاصلوں ا اور ب میں سے نقل مقام کیا جائے۔ (مثال کے طور پر طالب علم ایک کتاب کو جو میز پر پڑی ہو حرکت دے کر کسی دوسرے اختیاری محل میں لاسکتا ہے اس طرح کہ دوران حرکت میں کتاب میز سے مس کرتی رہے۔)

فرض کرو کہ کسی قوت ح کا نقطۂ عمل ق ہے جس کے محدد بلحاظ مبدا و کے لا اور ما ہیں نیز نقطۂ ق کے قطبی محدد ر اور طہ ہیں جہاں وق = ر اور لا^وق = طہ

جب خفیف ہٹاؤ واقع ہو چکے تو فرض کرو کہ ق کے لئے نئے محل قَ کے محدد ر جم (طہ + عہ) + ا اور ر جب (طہ + عہ) + ب

ہیں یعنی ر جم طہ ـ عہ ر جب طہ + ا اور ر جب طہ + عہ ر جم طہ + ب

جہاں چھوٹے زاویہ عہ کے مربعوں کو نظر انداز کیا گیا ہے۔



اس لئے ق کے محددوں میں تغیرات ہونگے (۸۸)

ا - عہ رجب طہ     اور ب + عہ رجم طہ

یعنی ا - عہ ما     اور ب + عہ لا

اس لئے اگر ح کے اجزائے ترکیبی لا اور ما ہوں تو ح کا موہوم کام جو لا اور ما کے موہوم کاموں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے

= لا (ا - عہ ما) + ما (ب + عہ لا)

= الا + ب ما + عہ (مالا - لاما)

اسی طرح نظام کی کسی اور قوت کا موہوم کام معلوم ہوسکتا ہے۔ ا، ب اور عہ ہر قوت کے لئے وہی ہونگے۔

اس لئے موہوم کاموں کا مجموعہ صفر ہوگا اگر

ا Σ (لا) + ب Σ (ما) + عہ Σ (مالا - لاما) صفر ہو۔

اگر قوتیں تعادل میں ہوں تو Σ (لا) اور Σ (ما) دفعہ ۶۰ کی رو سے جداگانہ صفر ہیں۔

نیز Σ (مالا - لاما) = و کے گرد جملہ قوتوں کے معیار اثروں کا مجموعہ

اور یہ مجموعہ دفعہ ۶۰ کی رو سے صفر ہے۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر قوتیں تعادل میں ہوں تو ان کے موہوم کاموں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

۱۰۳ — برعکس اس کے اگر ہر ہٹاؤ کے لئے موہوم کاموں کا مجموعہ صفر ہو تو قوتیں تعادل میں ہونگی۔

دفعہ ماقبل کی ترقیم کے مطابق موہوم کاموں کا مجموعہ ہے

ا Σ (لا) + ب Σ (ما) + عہ Σ (مالا - لاما) ....... (۱)

اور اس کے متعلق معلوم ہے کہ یہ سب ہٹاؤں کے لئے صفر ہے۔
ایک ایسا ہٹاؤ منتخب کرو جس سے جسم صرف محور لا کے متوازی فاصلہ اہیں سے حرکت کرے، اس ہٹاؤ کے لئے ب اور عہ دونوں صفر ہوں گے اور اس صورت میں (۱) سے حاصل ہوگا

$$\sum(\text{لا}) = 0$$

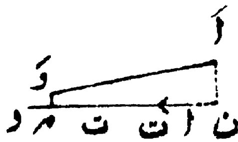
یعنی محور و لا کے متوازی سب اجزائے ترکیبی کا مجموعہ صفر ہے۔
اسی طرح سے محور ما کے متوازی ہٹاؤ لینے سے و ما کے متوازی بھی سب اجزائے ترکیبی کا مجموعہ صفر ہوگا۔
اسی طرح فرض کرو کہ ہٹاؤ بغیر نقل مقام کے صرف مبدا کے گرد محض گردش سے پیدا ہوا ہے۔ اس صورت میں ا اور ب دونوں معدوم ہوجاتے ہیں اور (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\sum(\text{ما لا} - \text{لا ما}) = 0$$

یعنی و کے گرد قوتوں کے معیار اثروں کا مجموعہ صفر ہے۔
دفعہ ۶۰ میں تعادل کی جو شرطیں بیان کی گئی ہیں وہ پوری ہوتی ہیں۔ اس لئے قوتوں کا نظام تعادل میں ہے۔

(۸۹) ۱۰۴ — قوتیں جو موہوم کام کی مساوات بنانے میں نظر انداز ہوسکتی ہیں۔ ۹۱

(۱) نا امتداد پذیر رسیوں کے تناؤ




فرض کرو کہ د ا ایک نا امتداد پذیر رسی ہے جس کا تناؤ ت ہے۔ فرض کرو کہ بعد ہٹاؤ اس کا محل دَ اَ ہے۔ د ا پر اَن، دَھ عمود

کھینچو۔ یہ آسانی سے ثابت ہوسکتا ہے کہ رتبہ اول کی صغیر مقداروں تک و م = ا ن

و کو مبدا اور و ا کو لا کا محور مانو اور فرض کرو کہ وَ نقطہ (لا۱، با۱، ی۱) اور اَ نقطہ

(و + لا۲، با۲، ی۲) ہے جہاں و ا = ا

چونکہ وَ اَ = و ا کیونکہ رسی کھنچ نہیں سکتی

∴ (و + لا۲ − لا۱)$^2$ + (با۲ − با۱)$^2$ + (یا۲ − یا۱)$^2$ = ا$^2$

∴ ۲ ا (لا۲ − لا۱) + چھوٹی مقداروں کے مربعے = ۰

∴ لا۲ = لا۱ پہلے رتبہ کی چھوٹی مقادیر تک

یعنی و م = ا ن

اس لئے تناؤ کا موہوم کام = ت × و م + ت (− ا ن) = ۰

اسی طرح نظام کے کسی دو ذروں ف اور ق کو ملانے والے خط میں عمل کرنے والی قوت کی بھی یہی کیفیت ہے بشرطیکہ ان ذروں کا درمیانی فاصلہ نہ بدلے۔

(۲) جسم جن سطحوں کو مس کرتا ہے ان کا تعامل۔

اگر سطح چکنی ہو تو تعامل نقطہ تماس ن پر سطح کے عماد کی سمت میں عمل کریگا اس لئے اگر ن اپنے قریب کے نقطہ نَ پر چلا جائے تو ن نَ قوت کی سمت پر علی القوائم ہوگا۔ اس لئے اس قوت کا موہوم کام صفر ہوگا۔

اگر سطح کھردری ہو تو رگڑ گ کا کام یعنی گ × (− ن نَ) مساوات میں داخل ہونا چاہئے کیونکہ یہ بالعموم صفر نہیں ہوگا۔

(۳) اگر جسم کسی ثابت سطح پر بغیر پھسلنے کے لڑھکے تو کسی نقطہ تماس ن پر کا تعامل۔

ظاہر ہے کہ جسم کا نقطہ تماس ن اُس آن کے لئے ساکن ہے اور اس لئے اس کا ہٹاؤ صفر ہے۔ اس وقت ن پر کا عمادی تعامل اور ن پر کی رگڑ دونوں کے ہٹاؤ صفر ہوتے ہیں۔

(۴) زیر بحث مادی نظام کے کسی دو جسموں کے درمیان تعامل۔ (۹۰)

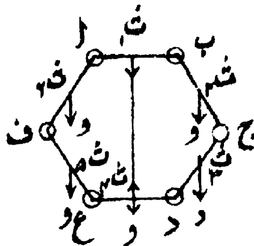
ظاہر ہے کہ یہ تعامل دونوں جسموں پر مساوی اور متقابل ہوتے ہیں۔ اسلئے جب ہم دونوں جسموں کے مجموعی موہوم کام کی مساوات لکھتے ہیں تو ایسے تعامل کا موہوم کام مساوات میں دو مرتبہ مختلف علامتوں کے ساتھ داخل ہوتا ہے اور اس سلئے معدوم ہو جاتا ہے۔ مثلاً اگر ہم پیوست کی ہوئی سلاخوں کے کام پر غور کر رہے ہوں تو جوڑوں پر کے تعامل نظر انداز کر دیئے جا سکتے ہیں جیسا کہ دفعہ ۱۰۶ میں کیا گیا ہے۔

۱۰۵ — اگر ہم چاہیں تو ایک ایسا ہٹاؤ منتخب کر سکتے ہیں جو نظام کی ہندسی شرائط کو پورا نہ کرے اور ایسا ہٹاؤ منتخب کرنا اکثر اوقات زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے لیکن اگر ہم ایسا کریں تو متناظر قوت کو بھی مساوات میں شامل کرنا لازم ہوگا۔

مثلاً اگر ہم ایسا ہٹاؤ منتخب کریں جس سے رسی کے طول میں تبدیلی پیدا ہو جیسا کہ اگلی دفعہ کی مشق ۲ میں کیا گیا ہے تو ہمیں مساوات میں رقم "تناؤ × رسی کے طول کا اضافہ" بھی شامل کرنا پڑیگا۔

۱۰۶ — مشق ۱ - مساوی طولوں کی چھ سلاخوں ا ب، ب ج، ج د، د ع، ع ف، اور ف ا کو ان کے سروں پر بلا تکلف جوڑ کر ایک منتظم مسدس بنایا گیا ہے سلاخ ا ب کو افقی محل میں رکھا گیا ہے اور ا ب اور د ع کے وسطی نقطوں کو رسی کے ذریعے ملایا گیا ہے۔ اگر ہر ایک سلاخ کا وزن و ہو تو ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ ۳ و ہوگا۔

فرض کرو کہ سلاخوں کے وسطی نقطے ث۱، ث۲، ث۳، ث۴، ث۵، ث۶ ہیں۔ چونکہ تشاکل سے ب ج اور ج د سمت انتصابی کے ساتھ مساوی المیلان ہیں اس لئے ظاہر ہے کہ نقاط ج، ث۳، د کی گہرائیاں ا ب سے نیچے ث۱ کی گہرائی کا بالترتیب ۲، ۳، ۴ گنا ہیں۔



فرض کرو کہ نظام انتصابی سطح مستوی میں ایک ایسا ہٹاؤ اختیار کرتا ہے کہ د اور ع ہمیشہ ب اور ا میں سے گزرنے والے انتصابی خطوں میں رہتے ہیں اور دع ہمیشہ متوازی الافق رہتا ہے۔ اگر ت بقدر انتصابی فاصلہ لا کے نیچے اترے تو ت بقدر فاصلہ ۳ لا کے نیچے اترے گا۔ اور ت اور ت بالترتیب بقدر ۳ لا اور لا فاصلوں کے نیچے اتر ینگے۔

وزنوں کے موہوم کاموں کا مجموعہ

= و × لا + و × ۳ لا + و × ۴ لا + و × ۳ لا + و × لا = ۱۲ و × لا

اگر رسی کا تناؤ ت ہو تو اس کا موہوم کام

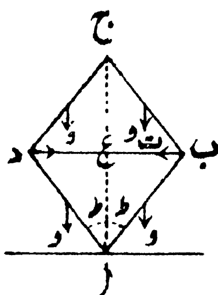
= ت × ( - ۴ لا )

کیونکہ ت کا ہٹاؤ اُس سمت کے متقابل ہے جس میں تناؤ ت عمل کرتا ہے اس لئے اس کا موہوم کام منفی ہے۔ اب موہوم کام کے اصول سے

۱۲ و لا + ت ( - ۴ لا ) = ۰　　یعنی ت = ۳ و

(۹۹) مشق ۲ — چار مساوی یکساں سلاخوں کو جوڑنے سے ایک معین ا ب ج د بنایا گیا ہے جس کو ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ ا ج انتصابی ہے اور کونہ ا ایک افقی سطح پر ٹکا ہوا ہے ایک ہلکی رسی ب د کے ذریعے معین کا زاویہ ب ا ج ط کے مساوی رکھا گیا ہے،

ثابت کرو کہ اس رسی کا تناؤ ۲ و س ط ہے جہاں و ایک سلاخ کا وزن ہے۔




فرض کرو کہ ا ب، ا د کے وسطی نقطوں کی بلندی افقی سطح ا کے اوپر لا ہے۔

نیز فرض کرو کہ ب ع = ع د = ما،

جہاں ع معین کا وسطی نقطہ ہے۔

اب معین کے اُس ہٹاؤ پر غور کرو جس میں ط، ط + مف ط اور اس لئے لا، لا + مف لا اور ما، ما + مف ما ہو جاتا ہے

تب چونکہ ب د کا تناؤ ت ہے، اس لئے موہوم کام کی مساوات ہے

۲ ت (- مف ما) + و (- مف لا) + و {- مف لا) + و {مف (۳ لا)} + و {- مف (۳ لا)} = ۰

∴ ت = - ۴ و (مف لا / مف ما)

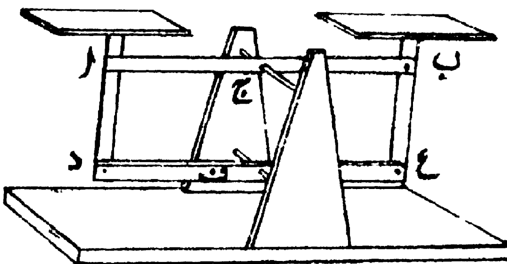
اب اگر اب = ۲ ا تو لا = ا جم ط اور ما = ۲ ا جیب ط

∴ مف لا / مف ما = (- ا جب ط مف ط) / (۲ ا جم ط مف ط) = - ۱/۲ مس ط

∴ ت = ۲ و مس ط

[ا پر کے تعامل کو چھوڑ دیا گیا ہے کیونکہ اس میں کوئی ہٹاؤ واقع نہیں ہوتا۔ ب پر کے تعامل کو بھی چھوڑ دیا گیا ہے اور وہ اس لئے کہ مختلف علامتوں کے ساتھ دو دفعہ آتا ہے، ایک دفعہ سلاخ اب کے لئے اور دوسری دفعہ سلاخ ب ج کے لئے]

**مثق ۳** - روبرول (Roberval) کی ترازو - یہ ترازو خط تولنے میں عام طور پر استعمال ہوتی ہے - اس میں چار سلاخیں اب، ب ع، ع د، اور د ا ہوتی ہیں جن کو کونوں اب د ع پر اس طرح ملایا ہوتا ہے کہ ان سے ایک متوازی الاضلاع بنتا ہے نیز اب اور د ع کے وسطی نقطے ج اور ف کو ایک انتصابی خط میں ثابت نقطوں سے وصل کر دیا جاتا ہے سلاخیں اب اور د ع، ج اور ف کے گرد آزادانہ گھوم سکتی ہیں -



سلاخوں ا د اور ب ع کے ساتھ مساوی پلڑے لگے ہوتے ہیں۔ ان میں سے ایک پر وہ شئے و رکھی جاتی ہے جس کو تولنا مقصود ہوتا ہے اور دوسرے پر باٹ ق رکھے جاتے ہیں۔

(۹۲) ہم موہوم کام کے اصول سے یہ ثابت کریں گے کہ اوزان و اور ق کو خواہ پلڑوں کے کسی حصہ پر رکھا جائے اس سے کچھ فرق نہیں پڑتا۔

چونکہ ج ب ع ف اور ج ا د ف متوازی الاضلاع ہیں اس لئے ظاہر ہے کہ ترازو خواہ کسی زاویہ میں سے گھومے سلاخیں ب ع اور ا د ہمیشہ ج ف کے متوازی یعنی انتصابی رہینگی۔

اگر سلاخ ا ب کو کسی چھوٹے زاویہ میں سے گھمایا جائے تو نقطہ ب اتنا ہی اوپر اٹھتا ہے جتنا کہ نقطہ ا نیچے گرتا ہے۔ اس لئے سلاخ ب ع اتنی ہی اوپر اٹھتی ہے جتنی کہ ا د نیچے اترتی ہے اور دائیں طرف کا پلڑا اتنا ہی اوپر چڑھتا ہے جتنا بائیں طرف کا نیچے اترتا ہے اس لئے ایسی صورت میں صریحاً سلاخ ب ع اور اس کے پلڑے کے وزنوں کا موہوم کام سلاخ کے پلڑے اور اس کے وزنوں کے موہوم کام کے مساوی اور مخالف العلامت ہوتا ہے یہ موہوم کام / موہوم کام کی مساوات میں ایک دوسرے کو خارج کردیتے ہیں۔

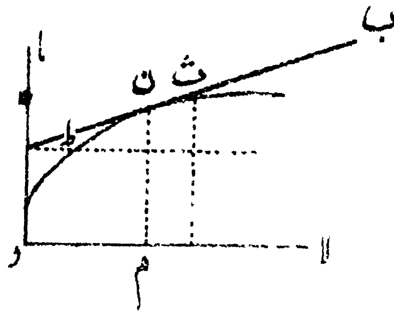
نیز اگر دائیں طرف کے پلڑے کا ہٹاؤ اوپر کی طرف پ ہو تو بائیں طرف کے پلڑے کا ہٹاؤ نیچے کی طرف پ ہوگا اس لئے موہوم کام کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$ق \times پ + و (- پ) = ۰$$

اس لئے اگر یہ آلہ کسی محل میں بھی متعادل ہوجائے تو ق اور و مساوی ہونگے اور یہ شرط پلڑوں کے اندر باٹوں اور شئے کے مقام پر کسی طرح بھی منحصر نہیں ہے اس لئے باٹ اور شئے پلڑوں میں کسی مقام پر بھی رکھے جاسکتے ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ بھی نکلتا ہے کہ پلڑوں کا ایک ہی شکل کا ہونا ضروری نہیں ہے اور نہ ہی ان کا آلہ کے لحاظ سے متشاکل ہونا ضروری ہے بشرطیکہ ان کے وزن مساوی رہیں۔

مشق ۴ — ایک یکساں شہتیر مماسی طور پر ایک چکنے انتصابی منحنی پر پڑا ہے اور اس کا ایک سرا ایک چکنی انتصابی دیوار کے ساتھ لگا ہوا ہے۔ اگر شہتیر ہر محل کے لئے متعادل رہے تو منحنی کی مساوات معلوم کرو۔

دیوار کو ما محور مانو اور اس پر
کے کسی نقطہ و کو مبدا
فرض کرو۔




اگر شہتیر کے مرکز
ثقل کی اونچائی و لا کے
اوپر ما ہو تو موہوم کام کی
مساوات ہوگی

و × مث ما = ۰

کیونکہ دیگر قوتیں یعنی
دیوار اور منحنی کے تعامل
دفعہ ۱۰۴ کی رو سے موہوم کام کی مساوات میں نہیں آتے۔

∴ ما = مستقل = ھ

اس لئے نقطہ ث کے محدد ہیں (۲ جم ط، ھ) جہاں ۲ ا سلاخ کا طول ہے اور ط
اس کا زاویہ میلان ہے سمت افقی کے ساتھ۔
اس لئے ا ث کی مساوات ہے

ما ـ ھ = مس ط (لا ـ ۲ جم ط) = ۲ مس ط ـ ۲ جب ط

اس کے لفاف کے لئے ط کے لحاظ سے تفرق کرنا چاہئیے
تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے لا = ۲ جم³ ط اور ما ـ ھ = ـ ۲ جب³ ط

∴ لا^(۲/۳) + (ما ـ ھ)^(۲/۳) = ۲^(۲/۳)

یعنی مطلوبہ منحنی چار قرنی درندویر کا ایک حصہ ہے۔

# مثالیں

(۹۳) ۱۔ چار مساوی یکساں وزنی سلاخوں کو جوڑنے سے ایک معین بنایا گیا ہے جس کو ایک

کونے سے آزادانہ لٹکایا گیا ہے اوپر کی دونوں سلاخوں کے وسطی نقطوں کو ایک ہلکی سلاخ سے ملایا گیا ہے تاکہ معین بند نہ ہو سکے ثابت کرو کہ ہلکی سلاخ کا تناؤ ۲ و مس عہ ہے جہاں و ہر ایک سلاخ کا وزن ہے اور ۲ عہ سہارے کے نقطہ پر معین کا زاویہ ہے ۔

۲ — چار مساوی سلاخوں کو جوڑنے سے ایک معین بنایا گیا ہے جس کا چھوٹا بین زاوئی طول ا کی ایک رسی کا بنا ہوا ہے ۔ ہر ایک سلاخ کا وزن و اور طول ب ہے ۔ اگر ایک سلاخ کو افقی محل میں رکھا جائے تو ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ ہے

$$\frac{۲\,و\,(۲\,ب^{۲} - ا^{۲})}{ب\,\sqrt{۴\,ب^{۲} - ا^{۲}}}$$

۳ — ایک منتظم مسدس ا ب ج د ع ف چھ مساوی سلاخوں کو آزادانہ جوڑنے سے بنایا گیا ہے ۔ مسدس ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ضلع ا ب افقی میز سے مس کرتا ہے اگر ج اور ف ایک ہلکی رسی کے ذریعہ پیوست ہوں تو ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ و $\sqrt{۳}$ ہوگا جہاں د ہر ایک سلاخ کا وزن ہے ۔

۴ — چار مساوی یکساں سلاخوں کو جوڑنے سے ایک مربع بنایا گیا ہے ہر ایک سلاخ کا وزن و ہے مربع کو ایک کونے سے لٹکایا گیا ہے نیچے کے تینوں کونوں میں سے ہر ایک پر وزن و لٹکایا گیا ہے افقی وتر پر ایک سلاخ لگانے سے اسے مربع شکل میں قائم رکھا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ سلاخ کا تناؤ ۲ و ہے ۔

۵ — ا طول کی چار مساوی سلاخوں کو پیوست کرکے ایک کونے سے لٹکایا گیا ہے اور اس کونے کو مقابل کے کونے سے ایک لچکدار رسی کے ذریعہ پیوست کیا گیا ہے ۔ اگر سلاخیں ایک مربع کی شکل میں لٹکیں اور رسی کی لچک کی قدر سلاخ کے وزن کے مساوی ہو تو رسی کا طول بغیر کھنچاؤ کے $\frac{ا\sqrt{۲}}{۲}$ ہے

۶ — چار سلاخوں کو جوڑنے سے ایک متوازی الاضلاع بنایا گیا ہے ۔ مقابل کے جوڑوں کو رسیوں سے ملایا گیا ہے جو متوازی الاضلاع کے وتر بناتی ہیں ۔ اس نظام کو ایک افقی میز پر رکھا گیا ہے ، ثابت کرو کہ ان کے تناؤ سلاخوں کے طولوں کی نسبت میں ہیں ۔

۷ — چھ مساوی وزنی شہتیروں کے سروں کو جوڑنے سے ایک مسدس بنایا گیا ہے اور

مسدس انتصابی سطح مستوی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ ایک شہتیر افقی سطح مستوی پر ساکن ہے اوپر کے دو مائل شہتیر اس کے ساتھ زاویہ ط بناتے ہیں اور ان کے وسطی نقطوں کو ایک ہلکی رسی کے ذریعے ملایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس کا تناؤ ۶ و مم ط ہے جہاں و ہر ایک شہتیر کا وزن ہے۔

۸ ـــــ ایک منتظم مسدس چھ مساوی وزنی سلاخوں کے سروں کو جوڑنے سے بنایا گیا ہے اور اس کے دو مقابل کے راسوں کو ایک افقی رسی سے ملایا گیا ہے۔ مسدس کی ایک سلاخ ایک افقی سطح مستوی سے مس کرتی ہے۔ مقابل کی سلاخ کے وسطی نقطہ پر ایک وزن وَ رکھا گیا ہے۔ اگر ہر ایک سلاخ کا وزن و ہو تو ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ $\frac{۳ و + وَ}{۲\sqrt{۳}}$ ہوگا۔

۹ ـــــ چھ مساوی وزنی سلاخوں کے سروں کو جوڑنے سے ایک منتظم مسدس ا ب ج د ع ف بنایا گیا ہے۔ اس کو نقطہ ا سے لٹکایا گیا ہے اور دو ہلکی سلاخوں ب ف اور ج ع سے اس شکل کو قائم رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان سلاخوں کے دباؤ $\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$ و (۱۴۱

اور $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و ہیں جہاں و ہر ایک سلاخ کا وزن ہے۔

(پہلے نظام کو موہوم ہٹاؤ اس طرح دو کہ ا ب اور ا ف ثابت رہیں اور ب ج اور ف ع سمت انتصابی کے ساتھ مساوی المیلان ہوں۔ اس طرح ج ع کا تناؤ معلوم کرو تب نظام کو اس طرح ہٹاؤ کہ ب ج اور ف ع دونوں انتصابی رہیں اور باقی سلاخیں بھی سمت انتصابی کے ساتھ مساوی المیلان ہوں)۔

۱۰ ـــــ ایک چپٹا نصف کروی تختہ ایک چکنی افقی سطح پر اس طرح ساکن ہے کہ اس کی سطح انتصابی ہے اور اس کا منحنی کنارہ اوپر کی طرف ہے۔ اس کو دو معلومہ نقطوں پر دو ایسے شہتیروں کے ذریعے دبایا گیا ہے جو چکنی انتصابی نلیوں کے اندر پھسلتے ہیں۔ اگر تختہ تعادل میں ہو تو شہتیروں کے وزنوں کی نسبت معلوم کرو۔

۱۱ ـــــ دو مساوی یکساں سلاخیں ا ب اور ا ج ہیں جن میں سے ہر ایک کا طول ۲ ت ہے یہ سلاخیں ا پر آزادانہ طور پر جڑی ہوئی ہیں اور اَ نصف قطر کے ایک چکنے انتصابی دائرہ پر ساکن ہیں۔ اگر ان کا درمیانی زاویہ ۲ ط ہو تو

ت جب ۲ ط = اَ جم ط

[جو قوتیں موہوم کام کی مساوات میں آتی ہیں وہ صرف اوزان و ہیں اور ہر ایک سلاخ کے مرکز ثقل کی بلندی دائرہ کے مرکز کے اوپر $\frac{\text{اَ}}{\text{جب ط}} - \text{بَ جم ط}$ ہے۔

$\therefore$ ۲ و مف $\left\{ \frac{\text{اَ}}{\text{جب ط}} - \text{بَ جم ط} \right\} = 0$ یعنی $- \frac{\text{اَ}}{\text{جب ط}}$ جم ط مف ط + بَ جب ط مف ط =

وغیرہ وغیرہ ۔

۱۲ ـــــ ایک منشور جس کی عمودی تراشش ایک مساوی الاضلاع مثلث ہے دو ستونوں میں جو افق کے ساتھ عہ اور بہ زاویے بناتے ہیں اس طرح ساکن ہے کہ اس کے دو کنارے ان ستونوں سے مس کرتے ہیں۔ اگر مس کرنے والے کناروں میں سے گزرنے والا رخ سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس ط} = \frac{2\sqrt{3}\ \text{جب عہ جب بہ} + \text{جب}\ (\text{عہ} + \text{بہ})}{\sqrt{3}\ \text{جب}\ (\text{عہ} + \text{بہ})}$$

۱۳ ـــــ مساوی وزنوں کے دو چھوٹے چکنے حلقے ایک ثابت ناقصی تار پر جس کا محور اعظم انتصابی ہے پھسلتے ہیں۔ وہ ایک رسی سے مربوط ہیں جو اوپر کے ماسکہ پر ایک چھوٹی چکنی کھونٹی پر سے گزرتی ہے۔ ثابت کرو کہ وزن تعادل میں رہیں گے خواہ ان کو کہیں رکھا جائے۔

۱۴ ـــــ چار مساوی یکساں استوار سلاخیں ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن و ہے انکے سروں کو جوڑنے سے ایک معین بنایا گیا ہے جسے ایک کونے پر سے لٹکا کر بے وزن سلاخوں کے ذریعے جو وتر بناتی ہیں تقریباً مربع کی شکل میں رکھا گیا ہے۔ یہ فرض کرکے کہ بہت چھوٹے پھیلاؤ یا پچکاؤ جو وتروں میں پیدا ہوتے ہیں وتروں کی سلاخوں کے تناؤں یا دباؤں کے متناسب ہیں ثابت کرو کہ ان قوتوں میں سے ہر ایک و کے مساوی ہے۔

۱۵ ـــــ مساوی وزن کے دو چھوٹے حلقے ایک مکافی کی شکل کے چکنے تار پر پھسلتے ہیں جس کا محور انتصابی ہے اور راس اوپر کی طرف ہے اور ایک دوسرے کو ایک ایسی قوت کے ساتھ کھینچتے ہیں جو فاصلے کے متناسب ہے اگر وہ تار پر کسی متشاکل محل میں ساکن رہ سکیں تو ثابت کرو کہ وہ ہر متشاکل محل میں ساکن رہیں گے۔

۱۶ ـــــ ایک قطع ناقص کا محور اعظم انتصابی ہے اور اس کے ماسکہ پر ایک چکنے حلقہ میں

سے ایک چکنی سلاخ گزرتی ہے۔ سلاخ کا دوسرا سرا اسکہ مذکورسے بعید ترین ربع پر سکون کی حالت میں ٹکا ہوا ہے اوس کے تعادل کا محل معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اس کا طول کم از کم

$\frac{۳ا}{۴} + \frac{ل}{۴}$ √ ا + ۸ ز۲ ہوگا جہاں ۲ ا محور اعظم کا طول ہے اور ز خروج المرکز ہے۔

۱۷ — ایک شہتیر کا ایک سرا ایک چکنی انتصابی دیوار پر اور دوسرا سرا ایک انتصابی سطح مستوی میں ایک ایسے چکنے منحنی پر جو دیوار پر عمود وار ہے ساکن ہے اگر شہتیر سب محلوں میں ساکن رہے تو ثابت کرو کہ منحنی قطع ناقص ہے جس کا محور اعظم اس افقی خط مستقیم پر جو شہتیر کا مرکز مرتسم کرتا ہے واقع ہے۔

۱۸ — ایک وزنی سلاخ اب جس کا طول ۲ ل ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سرا ایک ثابت چکنی میخ ج پر ہے اور اس کا سرا ب ایک چکنے منحنی پر ہے اگر سلاخ سب محلوں میں ساکن رہے تو ثابت کرو کہ منحنی مخروط نما ہے جس کی قطبی مساوات بلحاظ مبداء ج کے ہے ر = ل + $\frac{ا}{\text{جب ط}}$

۱۹ — ایک چھوٹا وزنی حلقہ ن ایک چکنے تار پر پھسلتا ہے جس کی سطح مستوی انتصابی ہے۔ یہ حلقہ ایک رسی کے ذریعہ جو منحنی کی سطح مستوی میں ایک چھوٹی چرخی م پر سے گزرتی ہے ایک اور وزن و کے ساتھ مربوط ہے جو آزادانہ لٹک رہا ہے۔ اگر حلقہ تار پر کسی مقام میں متعادل ہو تو ثابت کرو کہ تار کی شکل ایک مخروطی ہوگی جس کا ماسکہ چرخی پر ہوگا۔

[ اگر تعادل کے محل میں م ن = ر اور یہ سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو موہوم کام کی مساوات ہوگی

ن مف (ر جم ط) + و مف (ل - ر) = ۰

∴ ن ر جم ط + و (ل - ر) = مستقل وغیرہ ]

۲۰ — اب ایک وزنی شہتیر ہے جو ا پر ایک افقی محور کے گرد گھوم سکتا ہے۔ ایک رسی جو ب کے ساتھ بندھی ہے ا کے انتصاباً اوپر ج پر کی ایک چکنی چرخی کے اوپر

سے گزرتی ہے۔ رسی کا دوسرا سرا ایک معلومہ وزن ن کے ساتھ بندھا ہے جو ایک دئے ہوئے چکنے منحنی پہ حرکت کرتا ہے اگر ہر محل میں تعادل رہے تو منحنی کی مساوات معلوم کرو۔

[اگر ا کے نیچے شہتیر کے وسطی نقطہ کی گہرائی لا ہو اور اس کا وزن و ہو تو

ن مف (رجم طہ) + و مف لا = ۰

یعنی ن رجم طہ + و لا = مستقل

نیز (ل - ر)^۲ = جَ^۲ + ۴ ہَ^۲ + ۴ جَ لا جہاں اب = ۲ ہَ اور اج = جَ اور ل رسی کا طول ہے۔ لا کو ساقط کرو]

———— ✻ ————

(۹۶)

# چھٹا باب

## ترسیمی حل

۱۰۷۔ ایک نقطہ پر عمل کرنے والی متعدد قوتوں کا حاصل قوتوں کے کثیرالاضلاع کے ذریعے ترسیمی طریقے سے بھی معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ (ملاحظہ ہو شکل دفعہ ۴۴) نقطہ و پر عمل کرنے والی قوتیں جو بلحاظ مقدار اور سمت کثیرالاضلاع ا ب ج د ع ف کے اضلاع سے تعبیر ہوتی ہیں متوازن ہیں۔ اس لئے ا ب، ب ج، ج د، د ع اور ع ف سے تعبیر ہونے والی قوتوں کا حاصل باقی ماندہ قوت ف ا کے مساوی اور متقابل ہوگا یعنی حاصل مذکور ا ف سے تعبیر ہوگا۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں ف، ق، ر، س، ط کا حاصل اس طرح معلوم ہو سکتا ہے۔ کوئی نقطہ ا لو اور قوت ف کے متوازی اور متناسب ا ب کھینچو، اسی طرح ق، ر، س اور ط کے متوازی اور متناسب ب ج، ج د، د ع اور ع ف کھینچو تب مطلوبہ حاصل بلحاظ مقدار اور سمت کے خط ا ف سے تعبیر ہوگا۔ ظاہر ہے کہ متعدد قوتوں کی صورت میں بھی یہ عمل کیا جا سکتا ہے۔

بہت سے سوالات جن کا تحلیلی طریقوں سے حل کرنا نہایت مشکل یا محنت طلب ہوتا ہے ترسیمی طریق سے مقابلۃً آسانی سے حل ہو سکتے ہیں ایسے سوال انجنیری یا دیگر عملی کام میں بکثرت پیش آتے ہیں۔ عام طور پر ان سوالوں کے حل کرنے کے لئے مثلث اور کثیرالاضلاع کے علاوہ کسی چیز کی ضرورت نہیں ہوتی۔

۱۰۸۔ مشق ا۔ ا ج د ب ایک رسی ہے جس کے سرے دو متوازی الافق

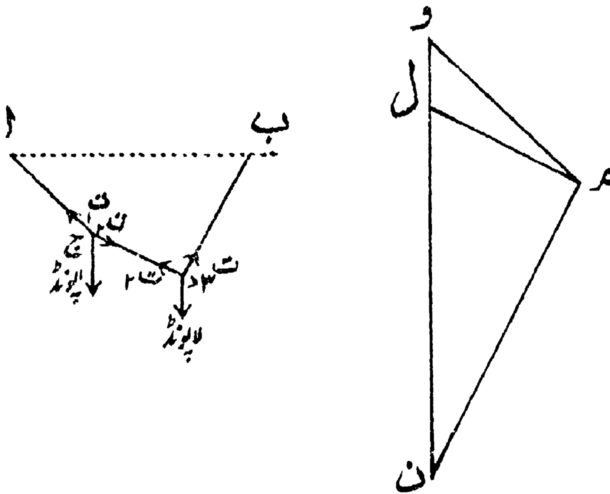
نقطوں ا اور ب کے ساتھ بندھے ہیں۔ فاصلہ ا ب ۷ فٹ ہے، اج، ج د اور د ب کے طول بالترتیب ۳½، ۳ اور ۴ فٹ ہیں اور ج پر ایک پونڈ کا وزن بندھا ہے، د پر ایک ایسا نا معلوم وزن بندھا ہے کہ تعادل کی حالت میں ج د ب زاویہ قائمہ ہے، اس وزن کی مقدار اور رسیوں کے تناؤ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ت۱، ت۲، ت۳ مطلوبہ تناؤ ہیں اور وہ وزن جو د پر بندھا ہے

لا پونڈ ہے ایک انتصابی خط و ل کھینچو جس کا طول ۱ انچ ہو جو ج پر کے ایک پونڈ وزن کو تعبیر کرے۔ و میں سے اج کے متوازی و م کھینچو اور ل میں سے ج د کے متوازی ل م کھینچو۔

قوتوں کے مثلث سے ظاہر ہے کہ و م تناؤ ت۱ کو تعبیر کرتا ہے اور ل م تناؤ ت۲ کو تعبیر کرتا ہے م میں سے م ن، ب د کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ و ل ممدودہ سے ن پر ملتا ہے۔ تب چونکہ ل م سے تناؤ ت۲ تعبیر ہوتا ہے اس لئے صریحاً ت۳، م ن سے اور لا، ل ن سے تعبیر ہوتا ہے۔ ناپنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

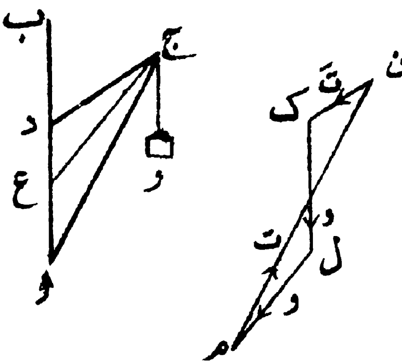
و م = ۳٫۰۵ انچ، ل م = ۲٫۴۹ انچ، م ن = ۵٫۱ انچ اور ن ل = ۵٫۶۳ انچ




اس لئے د پر کا وزن ۵٫۶۳ پونڈ ہے اور تناؤ بالترتیب ۳٫۰۵، ۲٫۴۹ اور

۱، ۵ پونڈ وزن ہیں۔

مشق ۲۔ حمالہ۔ حمالہ کے ضروری حصے نیچے کی شکل میں دکھائے گئے ہیں، ا ب ایک انتصابی کھمبا ہے۔ ا ج ایک شہتیر ہے جس کو جب کہتے ہیں اور جو سرے ا کے گرد گھوم سکتا ہے۔ اس کو لکڑی کی ایک سلاخ یا زنجیر سہارے رہتی ہے جس کو بندھن کہتے ہیں اور انتصابی کھمبے ا ب کے نقطہ د سے بندھی ہوتی ہے




ج پر ایک چرخی ہوتی ہے جس کے اوپر سے ایک زنجیر گزرتی ہے جس کا ایک سرا وزن و کے ساتھ بندھا ہوتا ہے جسکو اٹھانا منظور ہوتا ہے اور دوسرے سرے ع پر طاقت لگائی جاتی ہے۔ یہ سرا عام طور پر ایک اسطوانہ کے گرد لپٹا ہوتا ہے۔ بندھن ج د بعض صورتوں میں افق کے متوازی ہوتا ہے اور اکثر اوقات زنجیر ج ع کی سمت اس پر منطبق ہوتی ہے۔ اوپر کی صورت میں جب اور بندھن پر کے تعامل ترسیمی طور پر بطریق ذیل معلوم ہو سکتے ہیں۔

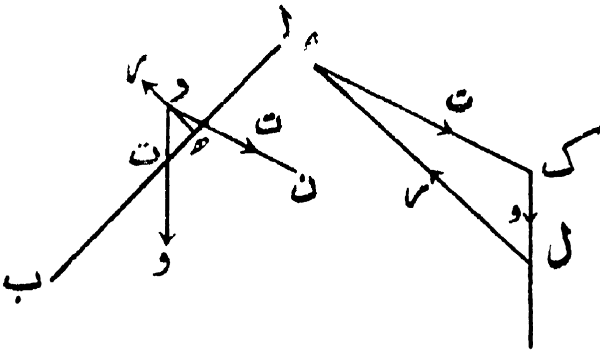
کسی پیمانہ کے مطابق و کو تعبیر کرنے کے لئے ک ل انتصابی کھینچو، ل م کو ج ع کے متوازی کھینچو اور ک ل کے مساوی لو۔ م میں سے م ن، ا ج کے متوازی اور ک ن، د ج کے متوازی کھینچو۔

تب ک ل م ن نقطہ ج کو تعادل میں رکھنے والی قوتوں کا ایک کثیر الاضلاع ہے کیونکہ ہم مان لیتے ہیں کہ زنجیر کا تناؤ چرخی کے اوپر سے گزرنے میں تبدیل نہیں ہوتا اور اس لئے تناؤ مذکور وزن و کے مساوی ہے۔ اسلئے ا ج کا دباؤ ت اور ج د کا کھچاؤ تَ ہو تو

$$\frac{ت}{م ن} = \frac{تَ}{ن ک} = \frac{و}{ک ل}$$

اس لئے اُسی پیمانہ پر جس پر ک ل وزن و کو تعبیر کرتا ہے م ن ، ت کو اور ن ک / ت کو تعبیر کرتا ہے۔

مشق ۳ ۔ بتاؤ کہ ایک اُڑنے والی پتنگ پر جو قوتیں عمل کرتی ہیں وہ اسے کس طرح تعادل میں رکھتی ہیں اور ثابت کرو کہ پتنگ پر کا عمود ، ڈوری اور خط انتصابی کی سمتوں کے اندر واقع ہوگا۔




فرض کرو کہ ا ب پتنگ کا وسطی خط ہے اور ب وہ نقطہ ہے جس پہ دُم لگی ہوئی ہے نیز پتنگ کی مستوی سطح کتاب کے ورق کی سطح مستوی پر عمود ہے اور فرض کرو کہ پتنگ مع دُم کا مرکز ثقل ث ہے۔

ہوا کا تعامل پتنگ کے ہر ایک نقطہ پر دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل ہو سکتا ہے۔ ایک پتنگ کی سطح پر عمود وار اور دوسرے اس کی سطح کے متوازی ہو خرالذکر اجزاے ترکیبی کا پتنگ پر کچھ اثر نہیں ہوتا اس لئے ان کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ اول الذکر اجزائے ترکیبی ترکیب پاکر پتنگ پر عمود وار ایک واحد قوت بن جاتے ہیں جو ث کے کچھ اوپر نقطہ ھ پر عمل کرتی ہے ہے/م اور و کسی نقطہ د پر ملتے ہیں اور تیسری قوت یعنی رسی کا تناؤ ت اس نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

وزن و کو تعبیر کرنے کے لئے انتصابی خط ک ل کھینچو اور م کو تعبیر کرنے کے لئے ل م / ھ د کے متوازی کھینچو۔ تب قوتوں کے مثلث سے م ک رسی کے تناؤ ت کو تعبیر کرے گا۔

شکل سے ظاہر ہے کہ انتصابی خط ل ک کے ساتھ خط م ک بہ نسبت خط

ل م کے بڑا زاویہ بنائے گا یعنی پتنگ پر کا عمود رسی کی سمت اور خط اتصالی کے اندر واقع ہوگا۔

قوتوں کے مثلث سے یہ بھی ظاہر ہے کہ تناؤ ت اور وزن و دونوں ہوا کی قوت س سے چھوٹے ہونگے۔

# مثالیں

(ذیل کی مثالیں ترسیمی طریق سے حل کی جائیں)

۱۔ ۱۰ فٹ لمبا ایک وزنی شہتیر ا ب دو رسوں کے ذریعے ج ا اور ج ب پر بندھے ہیں اس طرح ساکن ہے کہ ا اوپر کی طرف ہے۔ رسے افق کے ساتھ ۵۵° اور ۵۰° کے زاویے بناتے ہیں، اگر ا ب سمت افقی کے ساتھ ۲۰° کا زاویہ بنائے تو بتاؤ کہ شہتیر کا مرکز ثقل ا سے کتنے فاصلہ پر ہے۔ نیز اگر اس کا وزن ۲۰۰ پونڈ ہو تو رسوں کے تناؤ معلوم کرو۔

(۳٫۱۶ فٹ / ۱۲۴ اور ۸٫۱۱۹ پونڈ وزن)

۲۔ ا ب ایک یکساں سلاخ ہے جو ج چول کے گرد گھوم سکتی ہے اور ایک ہلکی رسی ا د کے ذریعہ جو ایک طرف ایک بالا ترین نقطے ا کے ساتھ اور دوسری طرف ج کے انتصاباً نیچے نقطہ د کے ساتھ بندھی ہے ساکن ہے۔ اگر ا ب = ۳ فٹ/ ا ج = ۱ فٹ/ ج د = ۲ فٹ اور د ا = ۲٫۷ فٹ اور سلاخ کا وزن ۱۰ پونڈ ہو تو رسی کا تناؤ اور محور پر کے تعامل معلوم کرو۔

(۶٫۷۵ اور ۱۶٫۹ پونڈ وزن)

۳۔ ایک برآمدہ بیرم ذیل کی دو سلاخوں پر مشتمل ہے ایک افقی سلاخ ا ب ہے جسے قبضہ کے ذریعے ایک ثابت نقطہ ا پر وصل کیا ہوا ہے اور دوسری سلاخ د ج ہے جو ایک طرف ا ب کے نقطہ ج کے ساتھ اور دوسری طرف ا کے عین نیچے ایک ثابت نقطہ د کے ساتھ وصل کی ہوئی ہے۔ ایک ہنڈرویٹ کا ایک وزن ب پر بندھا ہے۔ ا اور ج پر کے تعامل معلوم کرو جبکہ ا ب = ۶ فٹ، ا ج = ۲ فٹ اور ا د = ۳ فٹ، سلاخوں کے وزنوں کو نظر انداز کیا گیا ہے۔

(۲٫۸۴ اور ۳٫۶۱ ہنڈرویٹ وزن)

۴ــــ ایک پتنگ کی سطح مستوی افق کے ساتھ ۵۰° کا زاویہ بناتی ہے اور پتنگ کا وزن ۱۰ پونڈ ہے۔ اس پر ہوا کا حاصل دباؤ اس کے مرکز ثقل سے ۸ انچ اوپر عمل کرتا ہے اور رسی اس سے ۱۰ انچ اوپر نقطہ کے ساتھ بندھی ہے ڈوری کا تناؤ اور ہوا کا دباؤ معلوم کرو

[ ۲۶٫۸ اور ۱٫۳۲ پونڈ وزن ]

۱۰۹ ـــ ریسمانی (یعنی رسی کا) کثیرالاضلاع ۔ اگر ایک رسی کے سرے دو ثابت نقطوں کے ساتھ بندھے ہوں اور اگر رسی کے مختلف نقطوں پر وزن لٹکائے جائیں تو رسی سے جو شکل بنتی ہے اُسے ریسمانی کثیرالاضلاع کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ و اور وَ دو ثابت نقطے ہیں جن پر رسی کے سرے بندھے ہیں

نیز فرض کرو کہ $ا_۱$، $ا_۲$، $ا_۳$ .. $ا_ن$ رسی کے وہ نقطے ہیں جن پر بالترتیب وزن $و_۱$، $و_۲$، $و_۳$ .....$و_ن$ لٹک رہے ہیں۔

نیز فرض کرو کہ رسی کے حصوں و $ا_۱$، $ا_۱ا_۲$، $ا_۲ا_۳$ ..... $ا_ن$ وَ کے طول بالترتیب $ا_۱$، $ا_۲$ .... $ا_{ن+۱}$ ہیں اور افق کے ساتھ ان کے میلان $عہ_۱$، $عہ_۲$، .....، $عہ_{ن+۱}$ ہیں۔

اگر نقطوں و اور وَ کے درمیان افقی اور انتصابی فاصلے بالترتیب ھ اور ک ہوں تو

$$ا_۱ جم عہ_۱ + ا_۲ جم عہ_۲ + ا_۳ جم عہ_۳ + ...... + ا_{ن+۱} جم عہ_{ن+۱} = ھ \quad (۱)$$

$$ا_۱ جب عہ_۱ + ا_۲ جب عہ_۲ + ...... ۲ ا_{ن+۱} جب عہ_{ن+۱} = ک \quad (۲)$$

فرض کرو کہ $ت_۱$، $ت_۲$، $ت_۳$، ..........، $ت_{ن+۱}$ بالترتیب رسی کے مختلف حصوں کے تناؤ ہیں۔

یکے بعد دیگرے مختلف سمتوں کے تعادل کے لئے افقی اور انتصابی سمتوں ۱۱۰

میں تحلیل کرنے سے

$\text{ت}_2\ \text{جب}\ \text{عہ}_2 - \text{ت}_1\ \text{جب}\ \text{عہ}_1 = \text{و}_1$ اور $\text{ت}_2\ \text{جم}\ \text{عہ}_2 - \text{ت}_1\ \text{جم}\ \text{عہ}_1 = 0$

$\text{ت}_3\ \text{جب}\ \text{عہ}_3 - \text{ت}_2\ \text{جب}\ \text{عہ}_2 = \text{و}_2$ اور $\text{ت}_3\ \text{جم}\ \text{عہ}_3 - \text{ت}_2\ \text{جم}\ \text{عہ}_2 = 0$

.....................................................

$\text{ت}_{\text{ن}+1}\ \text{جب}\ \text{عہ}_{\text{ن}+1} - \text{ت}_{\text{ن}}\ \text{جب}\ \text{عہ}_{\text{ن}} = \text{و}_{\text{ن}}$ اور $\text{ت}_{\text{ن}+1}\ \text{جم}\ \text{عہ}_{\text{ن}+1} - \text{ت}_{\text{ن}}\ \text{جم}\ \text{عہ}_{\text{ن}} = 0$

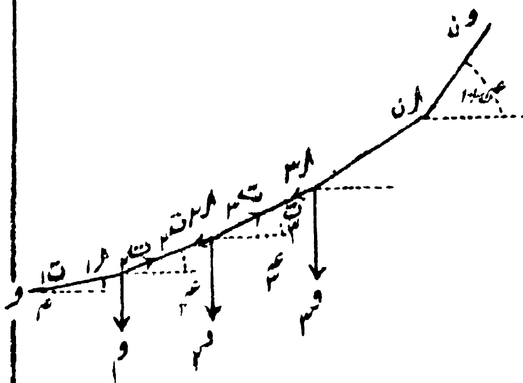
یہ ۲ ن مساواتیں مع مساواتوں (۱) اور (۲) کے (ن + ۱) نامعلوم تناؤں اور (ن+۱) نامعلوم میلانوں کے معلوم کرنے کے لئے کافی ہیں۔

اوپر کی مساواتوں میں جو مساواتیں بائیں طرف درج ہیں اُن سے

$$\text{ت}_1\ \text{جم}\ \text{عہ}_1 = \text{ت}_2\ \text{جم}\ \text{عہ}_2 = \text{ت}_3\ \text{جم}\ \text{عہ}_3 = \dots\dots$$

$$= \text{ت}_{\text{ن}+1}\ \text{جم}\ \text{عہ}_{\text{ن}+1} = \text{ھ} \quad \text{(فرض کرد) ..... (۳)}$$

یعنی رسی کے تناؤ کا افقی جزو ترکیبی ہر جگہ مستقل ہے اور ھ کے مساوی ہے۔




(۳) سے $\text{ت}_1$، $\text{ت}_2$، $\text{ت}_3$ ... $\text{ت}_{\text{ن}+1}$ کی قیمتیں دائیں کالم کی مساواتوں میں مندرج کرنے سے

$$\text{مس}\ \text{عہ}_2 - \text{مس}\ \text{عہ}_1 = \frac{\text{و}_1}{\text{ھ}}$$

$$\text{مس}\ \text{عہ}_3 - \text{مس}\ \text{عہ}_2 = \frac{\text{و}_2}{\text{ھ}}$$

..............

$$\text{مس}\ \text{عہ}_{\text{ن}+1} - \text{مس}\ \text{عہ}_{\text{ن}} = \frac{\text{و}_{\text{ن}}}{\text{ھ}}$$

اگر وزن سب مساوی ہوں تو مس $ع_1$، مس $ع_2$ ، .... مس $ع_{ن+1}$ سلسلہ حسابیہ میں ہونگے۔

اس لئے اگر رسی کے مختلف نقطوں پر متعدد مساوی وزن باندھے جائیں تو رسی کے مختلف حصے افق کے ساتھ جو زاوئے بناتے ہیں اُن کے مماس ایک سلسلہ حسابیہ بناتے ہیں جس کا مستقل فرق = کوئی ایک بندھا ہوا وزن ÷ رسیوں کا مستقل افقی تناؤ۔ (۱۰۱)

۱۱۰ - ترسیمی عمل - اگر رسیائی کثیر الاضلاع میں رسی کے مختلف حصوں کے میلان دئے ہوئے ہوں تو ہم باآسانی ہندسی عمل سے $و_1$، $و_2$ .... $و_ن$ کی نسبتیں معلوم کرسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ج کوئی نقطہ ہے اور اس میں سے گزرنے والا کوئی افقی خط ج د ہے۔

ج $ف_1$، ج $ف_2$ ، ..... ج $ف_{ن+1}$ رسیوں $و_1$، $ا_1$، $ا_2$ ... $ا_ن$ و کے متوازی کھینچو

پس زاویے $ف_1$ ج د، $ف_2$ ج د .... بالترتیب $ع_1$، $ع_2$ ، ..... کے مساوی ہونگے۔

کوئی انتصابی خط کھینچو جو ان خطوط کو

د، $ف_1$، $ف_2$ ، .... پر قطع کرے

تب دفعہ گزشتہ کی رو سے



$$\frac{و_1}{م} = \text{مس } ع_2 - \text{مس } ع_1$$

$$= \frac{د ف_2}{ج د} - \frac{د ف_1}{ج د} = \frac{ف_1 ف_2}{ج د} ،$$

$$\frac{و_2}{م} = \text{مس } ع_3 - \text{مس } ع_2 = \frac{د ف_3}{ج د} - \frac{د ف_2}{ج د} = \frac{ف_2 ف_3}{ج د}$$ وغیرہ وغیرہ

اس لئے مقداریں م، $و_1$، $و_2$ ...... $و_ن$ بالترتیب خطوط ج د، $ف_1$ $ف_2$، $ف_2$ $ف_3$ ... $ف_ن$ $ف_{ن+1}$ کے مساوی ہیں۔ اس لئے ان کی نسبتیں معلوم ہوسکتی ہیں۔

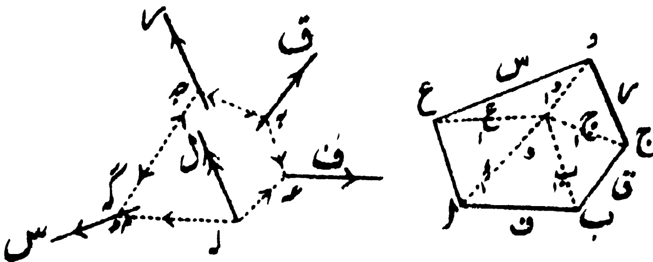
یہ نتیجہ اس امر سے بھی ظاہر ہے کہ نقطہ ا۱ پر اوزان کے قوتوں کا مثلث ج ف۱ ف۲ ہے، اور ا۲ پر ج ف۲ ف۳ ہے اور اس طرح دیگر نقطوں کیلئے۔

اسی طرح اگر جوڑوں پر جو وزن لٹکتے ہیں وہ دئے ہوئے ہوں اور کسی دو رسیوں کے میلان معلوم ہوں تو ہم باقی رسیوں کے میلان معلوم کر سکتے ہیں۔ ہم ایک انتصابی خط کھینچتے ہیں اور اس پر ف۱ ف۲، ف۲ ف۳، ..... وزنوں و۱، و۲ .... کے متناسب نشان لگاتے ہیں۔ اگر دو رسیوں و ا۱، ا۱ ا۲ کی سمتیں دی ہوئی ہوں تو ہم ف۱ ج اور ف۲ ج اُن کے متوازی کھینچتے ہیں اور اس طرح نقطہ ج معلوم کرتے ہیں۔ اب ج کو مختلف نقاط ف۳، ف۴، ..... وغیرہ کے ساتھ ملانے سے باقی رسیوں کے میلان معلوم ہو سکتے ہیں۔

۱۱۱ — ترسیمی طریقے سے ایک مستوی میں عمل کرنے والی متعدد قوتوں کا حاصل معلوم کرنا۔ (۱۰۲)

فرض کرو کہ قوتیں ف، ق، ر اور س ہیں اور اُن کے خط عمل بائیں طرف کی شکل میں دکھائے گئے ہیں۔

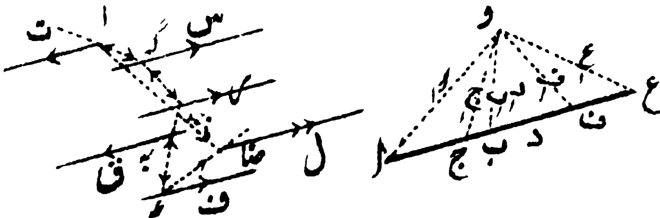
کثیر الاضلاع ا ب ج د ع کھینچو جس کے اضلاع ا ب، ب ج، ج د، اور د ع بالترتیب ف، ق، ر اور س کے متناسب ہوں۔ ا ع کو ملاؤ، اس طرح قوتوں کے کثیر الاضلاع کی رو سے ا ع بلحاظ مقدار اور سمت کے مطلوبہ حاصل کو تعبیر کرتا ہے۔




کثیر الاضلاع کے اندر کوئی نقطہ د لو اور اس کو ا، ب، ج، د، ع سے ملاؤ

اور فرض کرو کہ اِن ملانے والے خطوں کے طول ا، ب، ج د، ع ہیں۔
قوت ف کے خط عمل پر کوئی نقطہ عہ لو اور ب د کے متوازی خط عہ بہ کھینچو جو ق سے بہ پر ملے، ج د کے متوازی خط بہ جہ کھینچو جو س سے جہ پر ملے اور د و کے متوازی جہ گہ کھینچو جو س سے گہ پر ملے، گہ اور عہ میں سے ع و اور و ا کے متوازی خطوط کھینچو جو ایک دوسرے کو لہ پر ملیں۔
لہ میں سے لہ ل، ا ع کے مساوی اور متوازی کھینچو، تب لہ ل اسی پیمانہ پر جس پر ا ب قوت ف کو تعبیر کرتا ہے بلحاظ مقدار اور خطِ عمل کے مطلوبہ حاصل کو تعبیر کرے گا۔
چونکہ ف، ا ب سے تعبیر ہوتا ہے اس لئے یہ ا د اور د ب سے تعبیر ہونے والی دو قوتوں کے معادل ہے، اس لئے اس کی بجائے دو قوتیں ا و اور ب ا، لہ عہ اور بہ عہ کی سمتوں میں لی جا سکتی ہیں۔ اسی طرح ق کی بجائے دو قوتیں ب ا اور ج ا، عہ بہ اور جہ بہ کی سمتوں میں لی جا سکتی ہیں، س کی بجائے دو قوتیں ج ا اور د ا، بہ جہ اور گہ جہ کی سمتوں میں لی جا سکتی ہیں اور س کی بجائے قوتیں د ا اور ع ا، جہ گہ اور لہ گہ کی سمتوں میں لی جا سکتی ہیں۔
اس طرح قوتوں ف، ق، س اور س کی بجائے شکل عہ بہ جہ گہ لہ کے کناروں کے ساتھ عمل کرنے والی قوتوں مل گئیں۔ ان قوتوں میں سے کناروں عہ بہ، بہ جہ اور جہ گہ میں عمل کرنے والی قوتیں ایک دوسرے کے متوازن ہیں۔ اس لئے ہمارے پاس ا و اور د ع کے مساوی اور متوازی لہ پر عمل کرنے والی صرف دو قوتیں بچیں جن کا حاصل ا ع ہے۔
چونکہ لہ ل کو ا ع کے مساوی اور متوازی کھینچا گیا ہے اس لئے یہ مطلوبہ حاصل کو بلحاظ مقدار اور سمت کے تعبیر کرے گا۔ ۱۰۳
ا ب ج د ع کی قسم کی شکلوں کو قوتوں کا کثیر الاضلاع کہتے ہیں اور عہ بہ جہ گہ لہ جیسی شکلوں کو زنجیری یا ریسمانی کثیر الاضلاع کے نام سے موسوم کرتے ہیں کیونکہ اس میں بہت سی رسیوں یا زنجیروں کا ایک جٹ تعادل میں ہے۔
۱۱۲ — اگر قوتوں کے کثیر الاضلاع کا نقطہ ع نقطہ ا پر منطبق ہو تو کثیر الاضلاع

کو بند کہتے ہیں اور اس صورت میں حاصل قوت معدوم ہو جاتی ہے۔
اگر قوتوں کا کثیر الاضلاع بند ہو لیکن ریسمانی کثیر الاضلاع بند نہ ہو یعنی اگر گہ لہ عہ خط مستقیم نہ ہو تو ہمارے پاس د ع اور ا و کے متوازی تقاطِ گہ اور عہ پر عمل کرنے والی دو قوتیں بچ جاتی ہیں یعنی اس صورت میں ہمارے پاس دو مساوی متوازی اور متقابل قوتیں رہ جاتی ہیں جن سے ایک جفت بنتا ہے۔
لیکن اگر ریسمانی کثیر الاضلاع بھی بند ہو تو گہ لہ عہ خط مستقیم ہوگا اور یہ مساوی متوازی اور مخالف قوتیں ایک ہی خط مستقیم میں عمل کریں گی اور اس لئے ایک دوسرے کو معدوم کر دینگی۔
اس لئے اگر قوتیں ف، ق، مہ اور س تعادل میں ہوں تو ضروری ہے کہ ان قوتوں کے قوتی کثیر الاضلاع اور ریسمانی کثیر الاضلاع دونوں بند ہونے چاہئیں۔
۱۱۲۔ اگر قوتیں متوازی ہوں تب بھی عمل دفعہ ماقبل کے مطابق ہو سکتا ہے۔ نیچے جو شکل کھینچی گئی ہے وہ اُس صورت کے لئے ہے جبکہ قوتیں متوازی ہیں اور پانچ قوتوں میں سے دو قوتیں باقی تین قوتوں کی سمت کے مخالف عمل کرتی ہیں۔

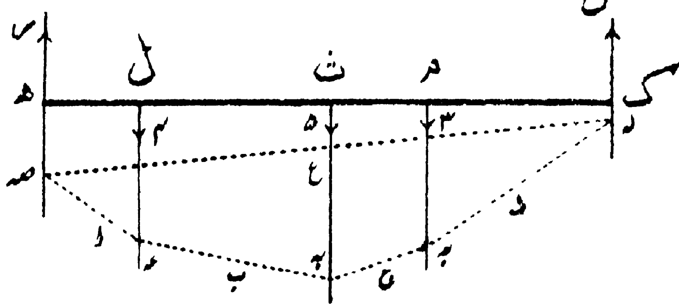


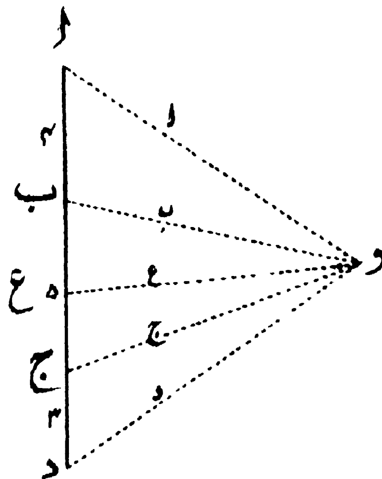

چونکہ ف، مہ اور س کی سمت ایک ہی ہے اس لئے اب، ج د اور د ع کی سمت بھی لازماً ایک ہی ہوگی۔ اسی طرح ب ج، ع ف کی سمت جو ق اور ت کو تعبیر کرتی ہیں اس کے مخالف ہوگی۔
عمل کا ثبوت وہی ہے جو دفعہ ماقبل میں درج کیا گیا ہے۔ خط صال جو اف کے مساوی اور متوازی ہے بلحاظ مقدار اور خطِ عمل کے مطلوبہ حاصل کو

تعبیر کرتا ہے ۔ اس عمل سے صریحاً بہت سے وزنوں کا حاصل وزن معلوم ہو سکتا ہے ۔

مشق ۔ ایک یکساں سلاخ ھ ک کو جس کا طول ۱۲ فٹ اور وزن ۵ ہنڈرڈ ویٹ ہے ھ اور ک پر اس طرح سہارا گیا ہے کہ یہ افق کے متوازی ہے اس کے نقطوں ل اور م پر جن کے فاصلے ھ سے بالترتیب ۲ فٹ اور ۸ فٹ ہیں ۴ ہنڈرڈ ویٹ اور ۳ ہنڈرڈ ویٹ کے وزن باندھے گئے ہیں ترسیمی طریق سے ھ اور ک پر کے تعامل دریافت کرو ۔

ا ب، ب ج، ج د انتصاباً نیچے کی طرف اس پیمانہ کے مطابق ناپو جس پر ایک (۱۰۴)
ہنڈرڈ ویٹ نصف انچ سے تعبیر ہوتا ہے، اس طرح ا ب = ۲ انچ، ب ج = $\frac{1}{2}$۲ انچ اور ج د = $\frac{1}{2}$۱ انچ ۔




کوئی مناسب قطب و منتخب کرو ۔

انتصابی خط ل پر کوئی نقطہ عہ لو اور اس میں سے عہ صہ، عہ بہ بالترتیب ولہ اور و ب کے متوازی کھینچو جو ھ اور ث میں سے گزرنے والے انتصابی خطوں سے صہ اور بہ پر ملیں، ج و کے متوازی بہ جہ اور د و کے متوازی جہ لہ کھینچو، لہ صہ کو ملاؤ، لہ صہ کے متوازی و ع کھینچو جو ا ب سے ع پر ملے، تب د ع اور ع ا ص کو علی الترتیب س اور سا کو تعبیر کرینگے۔ ناپنے سے سا = ۶٫۸۳ ہنڈرویٹ اور س = ۵٫۱۷ ہنڈرویٹ۔

۱۱۴- حروف سے نشان دہی کا ایک دوسرا طریقہ بھی (جس کو باؤ یا ہنر یسائی کا طریقہ کہتے ہیں) دفعہ ۱۱۱ کے عمل میں باسانی استعمال ہوسکتا ہے۔

قوتیں ف اور ق کی درمیانی جگہ کو ب سے تعبیر کرو، ق اور سا کی درمیانی جگہ کو ج سے تعبیر کرو اور علیٰ ہٰذالقیاس۔

تب ف کا خطِ عمل ا اور ب کی جگہوں کی درمیانی حد ہے اور اس لئے دوسری شکل میں وہ خط جو اس کو تعبیر کرتا ہے بہ آسانی ا ب سے موسوم کیا جاسکتا ہے (۱۰۵)
اس لئے قوتوں کے کثیر الاضلاع کو ا ب ج د ع سے موسوم کیا جاسکتا ہے۔

جب قطب و کو منتخب کرلیا جائے اور ریسائی کثیر الاضلاع عہ بہ جہ لہ صہ کو کھینچ لیا جائے تو کثیر الاضلاع مذکور کے اندر کی جگہ کو آسانی سے و سے موسوم کیا جاسکتا ہے۔



اس طرح قوتوں کے کثیر الاضلاع کے کسی زاویہ کو چھوٹے حرف کے ساتھ لکھنے کے جواب میں ریسائی کثیر الاضلاع کی بیرونی فضا کو بڑے حرف کے ساتھ لکھا جاسکتا ہے۔

قوت ف کا نقطہ عمل عہ فضاؤں ا، ب اور و کا نقطہ تقاطع ہے اسلئے

اس کو نقطہ ا ب و کہہ سکتے ہیں۔ اس نقطہ کا متناظر قوتوں کا مثلث اب و ہے۔ اسی طرح دوسری قوتوں کے لئے۔

۱۱۵ — اگر دو قطبوں و اور وَ کے جواب میں قوتوں کے کسی دئیے ہوئے نظام کے دو رسمانی کثیر الاضلاع کھینچے جائیں تو ان کے متناظر اضلاع کے نقاط تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جو و وَ کے متوازی ہے۔

فرض کرو کہ عَہ بَہ جَہ رسمانی کثیر الاضلاع ہے جو دفعہ ۱۱۱ کے مطابق دوسرے قطب وَ کے جواب میں بنایا گیا ہے، عَہ، بَہ، جَہ پر عمل کرنے والی سب قوتوں ف، ق، ر ..... کو الٹ دو۔

بہ پر کی قوت ق کو عہ بہ اور جہ بہ کے متوازی دو قوتوں میں تحلیل کرو جو ب و اور و ج کے مساوی ہوں اور بَہ پر الٹی ہوئی قوت ق کو بَہ عَہ اور بَہ جَہ کے متوازی دو قوتوں میں تحلیل کرو جو وَ ب اور ج وَ کے مساوی ہوں، نقطہ ع کے گرد جو عہ بہ اور عَہ بَہ کا نقطہ تقاطع ہے معیار اثر لو۔

تب چونکہ یہ چار اجزائے ترکیبی تعادل میں ہیں اس لئے ع کے گرد ان کے معیار اثروں کا مجموعہ صفر ہے۔ نیز ان میں سے دو قوتیں ع میں سے گزرتی ہیں۔ اس لئے جہ بہ اور بَہ جَہ پر عمل کرنے والی قوتوں کا معیار اثر ع کے گرد (جو و ج اور ج وَ کے بالترتیب مساوی ہیں) صفر ہے۔

اس لئے ان کا حاصل ع میں سے گزرتا ہے لیکن یہ صریحاً ط میں سے بھی گزرتا ہے جو جہ بہ اور بَہ جَہ کا نقطہ تقاطع ہے۔ اس لئے ان کا حاصل خط ع ط میں عمل کرتا ہے۔

لیکن دفعہ ۱۰۷ کی دائیں طرف کی شکل سے و ج اور ج وَ سے تعبیر ہونے والی قوتوں کا حاصل و وَ کے متوازی ہے۔ پس ع ط، و وَ کے متوازی ہے۔ (۱۲۱)

اسی طرح خط ط ص جو ط کو خطوط جہ لہ اور جَہ لَہ کے تقاطع ص سے ملاتا ہے و وَ کے متوازی ہے۔

اس لئے تمام نقطے ع، ط، ص، ..... ایک خط مستقیم پر واقع ہیں جو و وَ کے متوازی ہے۔

۱۱۶ — اگر مستوی قوتوں کے ایک دئیے ہوئے نظام کا ایک رسمانی کثیر الاضلاع

معلوم ہو تو سب ریسمانی کثیر الاضلاع بناؤ۔
یہ دفعہ ماقبل کے عمل کو الٹنے سے بن سکتا ہے۔
فرض کرو کہ عہ بہ کسی خط ھ ک سے ع پر ملتا ہے کسی اختیاری سمت میں خط ع عہ بہ کھینچو جو قوتوں ف اور ق سے عہ، بہ پر ملے۔ فرض کرو کہ بہ جہ، جہ لہ، لہ صہ، ھ ک سے و، و، و پر ملتے ہیں۔
خط و بہ جہ، و جہ لہ، و لہ صہ، .... کھینچو جو م، س، ت .... سے جہ، لہ، صہ .... پر ملیں۔
تب دفعہ ماقبل کی رو سے عہ بہ جہ ..... دوسرا ریسمانی کثیر الاضلاع ہے
نیز چونکہ ھ ک اور ع عہ بہ دونوں اختیاری ہیں اس لئے ظاہر ہے کہ اس طرح ریسمانی کثیر الاضلاع کی لا انتہا تعداد حاصل ہو سکتی ہے۔
۱۱۷ — معلومہ قوتوں کے حاصل کے معیار اثر کی ترسیمی تعبیر ہے۔
ترقیم دفعہ ۱۱۱ کے طریقہ کے مطابق ہے۔
اگر ہمیں کسی معلومہ نقطہ م کے گرد معیار اثر معلوم کرنا ہو تو اس میں سے ایک خط م ع و، حاصل ل کے متوازی کھینچو جو ریسمانی کثیر الاضلاع کے ان اضلاع سے جو اس حاصل پر ملتے ہیں ع اور و پر ملے۔ و میں سے ایک خط و ھ، ا ع پر عمود کھینچو اور م سے حاصل ل کے خط عمل پر عمود م ن نکالو۔

چونکہ مثلثوں ع صہ و اور ا و ع کے اضلاع متوازی ہیں

$$\therefore \frac{ع\,و}{ا\,ع} = \frac{ع\,صہ}{ا\,و} = \frac{\text{صہ سے ع و پر عمود}}{\text{و سے ا ع پر عمود}} = \frac{م\,ن}{و\,ھ}$$

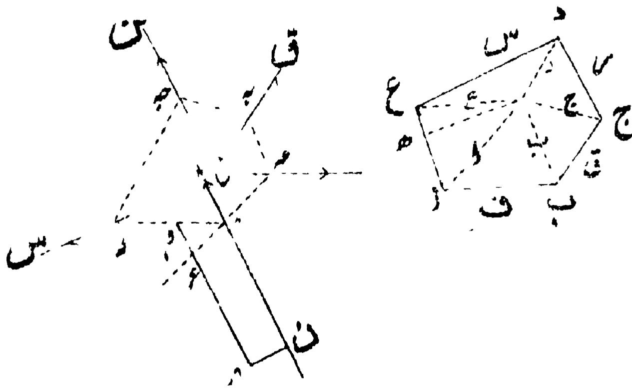
لہذا $ا\,ع \times م\,ن = ع\,و \times و\,ھ$

اس لئے چاروں ترکیبی قوتوں ف، ق، ر، س کے معیار اثروں کا مجموعہ م کے گرد = حاصل ل کا معیار اثر م کے گرد

$$= ل \times م\,ن = ا\,ع \times م\,ن$$

$$= ع\,و \times و\,ھ$$

یعنی ہ کے گرد معیار اثر اس حاصل ضرب کے مساوی ہے جس کا ایک جزو ضربی وہ مقطوعہ (شکل ۱۰۴)
ہے جو ریسمانی کثیر الاضلاع کے حاصل میں سے گزرنے والے اضلاع کے درمیان
ہ سے حاصل متوازی خط پر قطع ہوتا ہو اور دوسرا جزو ضربی وہ عمود ہے جو قطب د سے
حاصل کو تعبیر کرنے والے قوتی کثیر الاضلاع کے ضلع پر کھینچا جائے۔




اسی طرح کسی ترکیبی قوت ف کا ہ کے گرد معیار اثر اس حاصل ضرب کے مساوی ہے جس کا ایک جزو وہ مقطوعہ ہے جو ف کے متوازی ہ میں سے گزرنے والے خط پر ریسمانی کے ع میں سے گزرنے والے دو اضلاع کے درمیان قطع ہوتا ہے اور دوسرا جزو وہ عمود ہے جو قوتوں کے کثیر الاضلاع کے ضلع ا ب پر (جو ف کو تعبیر کرتا ہے) قطب د سے کھینچا جائے۔

۱۱۸ — ہلکی سلاخوں کو آزادانہ جوڑنے سے ایک کثیر الاضلاع بنایا گیا ہے قوتوں کا ایک نظام جوڑوں پر عمل کر رہا ہے جو متعادل ہیں سلاخوں کے طولوں کی سمت میں تعامل دریافت کرو۔

فرض کرو کہ پانچ سلاخوں $\text{ا}_1\text{ا}_2$، $\text{ا}_2\text{ا}_3$ ...... $\text{ا}_5\text{ا}_1$ کو آزادانہ طور پر پیوست کرکے ایک قالب بنایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ اس کے جوڑوں پر قوتیں $\text{ف}_1$، $\text{ف}_2$، $\text{ف}_3$، $\text{ف}_4$، $\text{ف}_5$ عمل کرتی ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

فرض کرو کہ ان کی وجہ سے سلاخوں کے تعامل بالترتیب $ت_{۲۱}$، $ت_{۳۲}$، $ت_{۴۳}$
$ت_{۵۴}$ اور $ت_{۱۵}$ ہیں۔

مخمس ا ب ج د ع کھینچو جس کے اضلاع قوتوں $ف_۱$، $ف_۲$، $ف_۳$، .... $ف_۵$ (۱۰۰)
کے متوازی اور متناسب ہوں چونکہ قوتیں تعادل میں ہیں اس لئے قوتوں کا کثیرالاضلاع
بند ہوگا۔

ا میں سے او، $ا_۲ ا_۱$ کے متوازی کھینچو اور ع میں سے ع و، $ا_۵ ا_۱$ کے
متوازی کھینچو۔ اب مثلث اع و اکے اضلاع قوتوں $ف_۱$، $ت_{۲۱}$، $ت_{۱۵}$ کے
متوازی ہیں جو جوڑ $ا_۱$ پر عمل کرتی ہیں۔ اس لئے اس کے اضلاع ان قوتوں کے متناسب
ہیں۔ اس لئے اُسی پیمانہ پر جس پر ع ا قوت $ف_۱$ کو تعبیر کرتا ہے اضلاع او اور
و ع تناؤں $ت_{۲۱}$ اور $ت_{۱۵}$ کو تعبیر کرتے ہیں۔

و ب، و ج اور و د کو ملاؤ تب اضلاع ا ب اور و ا دونوں قوتوں $ف_۲$
اور $ت_{۲۱}$ کو تعبیر کرتے ہیں جو $ا_۲$ پر عمل کرتی ہیں۔ اس لئے ب و جس سے مثلث
اوب کی تکمیل ہوتی ہے تیسری قوت $ت_{۳۲}$ کو بلحاظ سمت اور مقدار کے تعبیر
کرے گا۔ اسی طرح و ج اور و د بالترتیب تناؤں $ت_{۴۳}$ اور $ت_{۵۴}$ کو تعبیر کرینگے

اس لئے خطوط ؛ و ا ، و ب ، و ج ، و د اور و ھ بلحاظ مقدار اور سمت قالب کے اضلاع کے ساتھ عمل کرنے والی قوتوں کو تعبیر کرتے ہیں خواہ قالب میں اضلاع کی تعداد کچھ ہی ہو اسی قسم کا عمل کرنا کافی ہوگا۔

۱۱۹۔ ظاہر ہے کہ دفعہ ماقبل کی شکل اور عمل وہی ہیں جو دفعہ ۱۱۱ کے ہیں۔ اگر دائیں طرف کی شکل سلاخوں ا ب ، ب ج ، ج د ...... کے قالب کو تعبیر کرے جس کے جوڑوں پر قوتیں و ا ، و ب ، ...... عمل کریں تو بائیں طرف کا کثیر الاضلاع $ل_1$ $ل_2$ $ل_3$ ...... $ل_ن$ صریحاً اس کا قوتی کثیر الاضلاع ہوگا کیونکہ $ل_1 ل_2$ ، $ل_2 ل_3$ ...... بالترتیب و ا ، و ب ...... کے متوازی ہیں۔

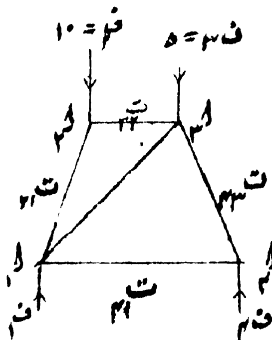
اس لئے ان کثیر الاضلاعوں میں سے کسی ایک کو قالب یا ریسمانی کثیر الاضلاع کے طور پر لیا جاسکتا ہے، تب دوسرا کثیر الاضلاع قوتی کثیر الاضلاع ہوگا۔ اس وجہ سے ایسی شکلوں کو متکافی شکلیں کہتے ہیں۔

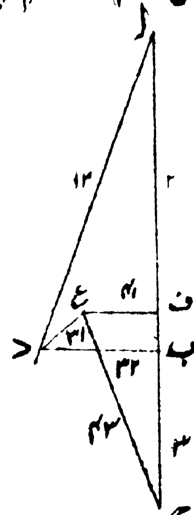
دوسری مثال کے طور پر ایک مثلثی قالب پر غور کرو جس کے جوڑوں پر عمل کرنے والی تین قوتیں $ف_1$ ، $ف_2$ ، $ف_3$ متعادل ہیں اس کا قوتی کثیر الاضلاع ا ب ج ہوگا برعکس اس کے مثلث ا ب ج کے لئے $ل_1$ $ل_2$ $ل_3$ قوتوں کا کثیر الاضلاع ہے جہاں قوتیں $ت_{12}$ ، $ت_{23}$ ، $ت_{31}$ ہیں۔

۱۲۰۔ مشق :- ایک قالب $ل_1$ $ل_2$ $ل_3$ $ل_4$ جو چار ہلکی سلاخوں پر مشتمل ہے اور

جس کو سلاخ ل۱ ل۴ کے ذریعہ استوار بنایا گیا ہے انتصابی سطح مستوی میں نقطوں ل۱ اور ل۴ کے سہارے اس طرح ساکن ہے کہ ل۱ ل۴ افقی ہے اور طول ل۱ ل۲، ل۲ ل۳، ل۳ ل۴، اور ل۴ ل۱ بالترتیب ۳ فٹ، ۲ فٹ، ۳ فٹ اور ۴ فٹ ہیں نیز ل۱ ل۴، ل۲ ل۳ متوازی ہیں اور ل۱ ل۲ اور ل۳ ل۴ خط ل۱ ل۴ سے مساوی میلان رکھتے ہیں۔ اگر ۱۰ ہنڈرویٹ اور ۵ ہنڈرویٹ کے وزن ل۲ اور ل۳ پر رکھے جائیں تو ل۱ اور ل۴ پر سہاروں کے تعامل دریافت کرو اور قالب کے مختلف حصے جو قوتیں لگاتے ہیں انہیں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ضلعوں کے ساتھ عمل کرنے والی قوتیں حسب شکل ذیل ہیں اور ل۱ ل۴ کے تعامل ف۱، ف۴ ہیں۔




ایک انتصابی خط ا ب کھینچو جس کا طول ۵ انچ ہو اور جو ل۲ پر عمل کرنے والی ۱۰ ہنڈرویٹ کی قوت کو تعبیر کرے۔ نیز ا د، ل۱ ل۲ کے اور ب د، ل۲ ل۳ کے متوازی کھینچو، تب جوڑ ل۲ کے لئے ا ب د قوتوں کا مثلث ہے۔

یہ بات قابل غور ہے کہ سلاخ ل۲ ل۳ ل۲ پر عمل کرنے والی قوت ل۲ ل۳

کی سمت میں یا ا۴ ا۲ کی سمت میں عمل کرے گی اور ا۳ پر کی قوت ا۳ ا۲ یا ا۲ ا۳ کی سمت میں عمل کرے گی۔

[ اگر ایک سلاخ پر دباؤ عمل کرتا ہے جیسا کہ موجودہ صورت میں ہے تو سلاخ کو پچکنے کے عمل کی مزاحمت کرنی پڑتی ہے یا کھنچنے کے عمل کی مزاحمت کرنی پڑتی ہے۔ پہلی صورت میں ہر ایک سرے پر کا تعامل سلاخ کے مرکز سے سروں کی طرف عمل کرتا ہے۔ اس صورت میں سلاخ کو فشار بند سلاخ کہتے ہیں۔ دوسری صورت میں ہر ایک سرے پر کا تعامل مرکز کی طرف عمل کرتا ہے۔ اس صورت میں سلاخ کو بندھن سلاخ کہتے ہیں۔ ہر صورت میں سلاخ کے دونوں سروں پر کے تعامل مساوی اور متقابل ہوتے ہیں]
خط ب ج انتصابی سمت میں کھینچو جس کا طول ۲½ انچ ہو اور جو ا۳ پر کے وزن کو تعبیر کرے۔ ج ع، ا۲ ا۳ کے متوازی اور د ع، ا۱ ا۲ کے متوازی کھینچو تب د ب ج ع جوڑ ا۲ کے لئے قوتوں کا کثیر الاضلاع ہے۔

(۱۱۰) خط ع ف افقی سمت میں کھینچو جو ا ج سے ف پر ملے۔ تب ع ج ف، ا۳ کے لئے قوتوں کا کثیر الاضلاع ہے اس لئے تعامل ف ۲، ج ف سے اور تناؤ ت۳۴ ف ع سے تعبیر ہوتا ہے۔

بالآخر جوڑ ا۱ کے لئے کثیر الاضلاع د ع ف ا بنتا ہے، اس لئے ف ۱، ف ا سے تعبیر ہوتا ہے۔

انچوں میں ناپنے سے

ع ف = ۱۰ر۱، ج ع = ۳۱ر۳، د ب = ۷۷ر۱، د ا = ۳۰ر۵،
د ع = ۹۱ر ، ج ف = ۱۲۵ر۳، ف ا = ۳۲۵ر۴

چونکہ ایک انچ دو ہنڈرویٹوں کو تعبیر کرتا ہے اس لئے ہنڈرویٹوں میں

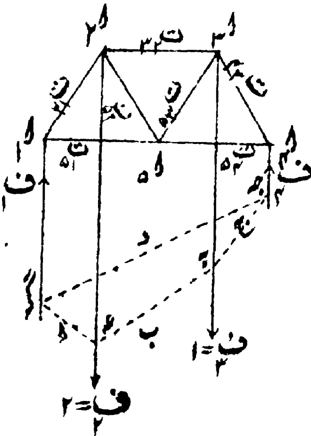
ت۱۴ = ۲۰ر۲، ت۲۴ = ۶۲ر۶، ت۲۳ = ۳۵۴ر۳،

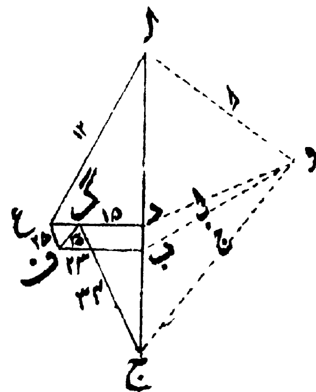
ت۲۱ = ۱۰٫۶۰ ، ت۳۴ = ۱٫۸۲ ، ف۴ = ۶٫۲۵ ، ف۱ = ۸٫۷۵ ،

نیز قوتوں کے مثلثوں اور کثیر الاضلاعوں کی قوتوں کی ترتیب سے ظاہر ہے کہ سلاخیں ا۱ ا۲ اور ا۳ ا۴ تناؤ کی حالت میں ہیں یعنی بندھن سلاخیں ہیں اور قالب کی باقی سلاخیں پچکاؤ کی حالت میں ہیں یعنی فشار بند سلاخیں ہیں ۔

مشق ۲ — وارن گرڈر کا ایک حصہ ہلکے قالب پر مشتمل ہے جو تین مساوی الاضلاع مثلثوں ا۱ ا۲ ا۵ ، ا۵ ا۲ ا۳ ، ا۵ ا۳ ا۴ سے بنا ہوا ہے۔ قالب نقاط ا۱ ، ا۴ پر اس طرح سہارا ہوا ہے کہ ا۱ ا۵ ا۴ متوازی الافق ہے ، ۲ اور ۱ ٹن کے وزن بالترتیب ا۲ اور ا۳ پر لٹک رہے ہیں۔ سب شہتیروں میں تعامل دریافت کرو۔

اب ، ب ج انتصابی سمت میں کھینچو جو بالترتیب ۲ انچ اور ۱ انچ کے مساوی ہوں اور جو ف۲ اور ف۳ کو تعبیر کریں ۔ کوئی قطب و لو اور و ا ، و ب ، و ج کو ملاؤ۔ ف۲ کے خط عمل پر کوئی نقطہ ع لو ۔ ع گ ، و ا کے متوازی کھینچو جو ا۱ پر کے تعامل ف۱ کے خط عمل سے گ پر ملے ، ع ہ ، و ب کے متوازی کھینچو جو ا۳ میں سے گزرنے والے انتصابی خط سے ہ پر ملے نیز ہ ح ، ج و کے متوازی کھینچو جو ا۴ میں سے گزرنے والے انتصابی خط سے ح پر ملے۔ ح گ کو ملاؤ ، تب ع ہ ح گ ریسمانی کثیر الاضلاع ہوگا جس کا قوتی کثیر الاضلاع خط مستقیم ا ب ج د ہوگا۔ اس میں د ، اج پر کا وہ نقطہ ہے جہاں ح گ کا متوازی و د ، اج سے ملتا ہے۔





اس لئے $ف_1$ اور $ف_2$ بالترتیب د ا اور ج د سے تعبیر ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ سلاخوں کو جو قوتیں لگانی پڑتی ہیں خواہ دباؤ کی قوتیں ہوں یا تنناؤ کی وہ حسب نشانات $ت_{12}$، $ت_{24}$ ..... ہیں۔

د ع، ا ع بالترتیب $ا_1$ ا۵ اور $ا_1$ $ا_2$ کے متوازی کھینچو، تب ا ع د، $ا_1$ کے لئے قوتوں کا مثلث ہے۔ اس لئے ا ع، ع د بالترتیب $ت_{12}$، $ت_{15}$ کو تعبیر کرتے ہیں۔

ع ف، ب ف بالترتیب $ا_2$ $ا_5$ اور $ا_2$ $ا_3$ کے متوازی کھینچو۔ اس طرح ع ا ب ف جوڑ $ا_2$ کے لئے قوتوں کا کثیر الاضلاع ہوگا۔ اس لئے ع ف، ب ف بالترتیب $ت_{52}$، $ت_{32}$ کو تعبیر کرینگے۔ (۱۱۱)

ج گ، ف گ بالترتیب $ا_3$ $ا_4$ اور $ا_3$ $ا_5$ کے متوازی کھینچو (جو ایک دوسرے سے دع پر ملتے ہیں) اس طرح ف ب ج گ جوڑ $ا_3$ کے قوتوں کا کثیر الاضلاع ہے اور اس لئے ف گ اور گ ج تناؤں $ت_{53}$ اور $ت_{43}$ کو تعبیر کرتے ہیں۔

تب ج د گ جوڑ $ا_4$ کے لئے قوتوں کا مثلث ہے اس لئے د گ تناؤ $ت_{45}$ کو تعبیر کرتا ہے۔ بالآخر د گ ف جوڑ $ا_5$ کے لئے قوتوں کا کثیر الاضلاع ہے۔

مختلف خطوں کو ناپنے سے

$ف_1 = ۱٫۷۵$، $ف_2 = ۱٫۲۵$، $ت_{12} = ۲٫۰۲$، $ت_{23} = ۱٫۸۷$، $ت_{34} = ۱٫۴۴$، $ت_{45} = ۲٫۷۲$، $ت_{15} = ۱٫۰۱$، $ت_{25} = ۱٫۲۹$، $ت_{53} = ۲٫۹$ ٹن وزن۔

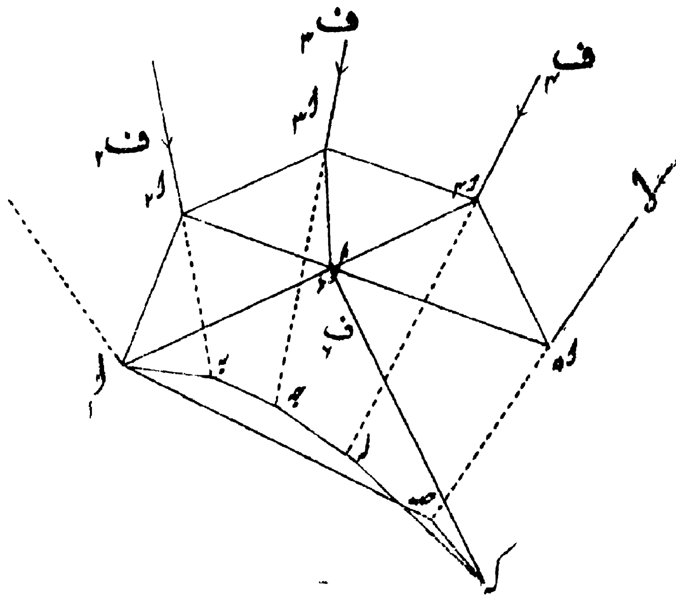
نیز قوتوں کے مثلثوں اور کثیر الاضلاعوں میں قوتوں کی ترتیب سے ظاہر ہے کہ $ا_1$ $ا_5$، $ا_5$ $ا_4$، $ا_5$ $ا_3$ بندھن ہیں اور باقی فشار بند ہیں۔

(گرڈر جو مذکورہ بالا نمونے کے متعدد حصوں پر مشتمل ہوتا ہے اس کے بانی کپتان وارن کے نام پر جس نے اسے ۱۸۴۸ء میں ایجاد کیا تھا وارن گرڈر سے موسوم کرتے ہیں)۔

**مشق ۴۳**۔۔۔۔۔ $ا_1$ $ا_2$ $ا_3$ $ا_4$ $ا_5$ $ا_6$ ایک قینچی چھت کا قالب ہے جیسا کہ ذیل کی

شکل میں دکھایا گیا ہے، نقطوں ا۲، ا۳، ا۴، ا۵ پر قوتیں ف۲، ف۳، ف۴، ف۵ حسب شکل ذیل مختلف سمتوں میں عمل کرتی ہیں۔ تعادل ا۱ پر کے تعامل ف۱ کے ذریعے جو بلحاظ سمت اور مقدار کے نامعلوم ہے اور ا۵ پر کے نامعلوم تعامل ف۵ کے ذریعے جو ا۵ لا کی سمت میں عمل کرتا ہے قائم ہے۔

ان تعاملوں کو معلوم کرو اور نیز قالب کی سلاخوں کے دباؤ اور تناؤ معلوم کرو۔

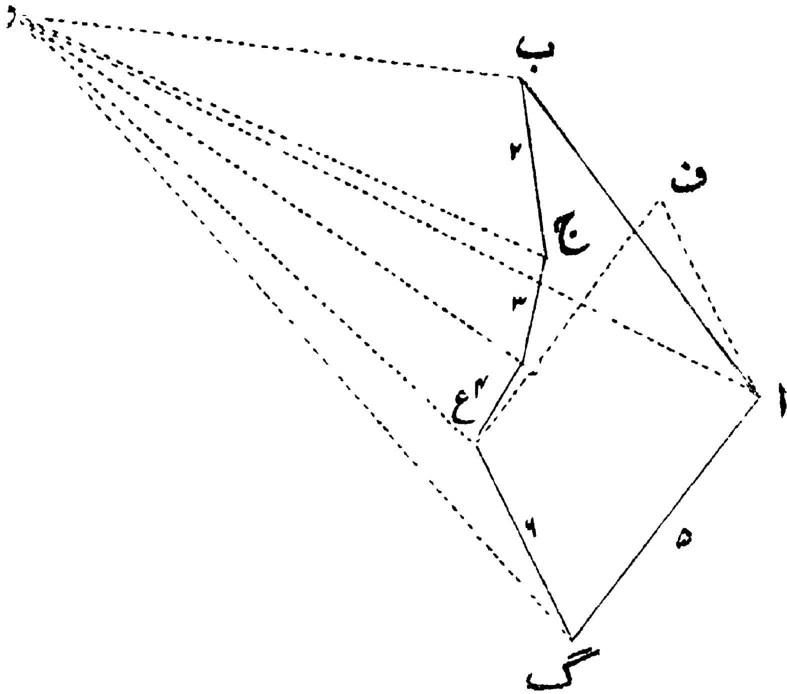



ہمیں پہلے ف۱ اور ف۵ کی مقداریں معلوم کرنی چاہئیں۔

کسی مناسب پیمانہ پر ب ج، ج د، د ع، ع گ کھینچو جو ف۲، ف۳، ف۴، ف۵ کو بلحاظ سمت اور مقدار کے تعبیر کریں۔ کسی نقطہ و کو قطب مقرر کرو۔

(۱۱۲) ا۱ سے شروع ہو کر کیونکہ نامعلوم قوت ف۱ کے خط عمل میں یہی ایک معلومہ نقطہ ہے ریسمانی کثیر الاضلاع ا۱ ب ج ل ..... کھینچو جس میں ا۱ ب، ب ج، ج ل، ل ک، ک ص،

بالترتیب د ب، د ج، د د، د ع، د گ کے متوازی ہوں۔




ا ضہ کو ملاؤ اور د ا اس کے متوازی کھینچو جو گ ا سے (جو معلوم سمت ل$_5$ ل$_6$ کے متوازی کھینچا گیا ہے) ا پر ملے۔

تب صریحاً گ ا نامعلوم تعامل ف$_5$ کو تعبیر کرتا ہے اور ا ب، ل$_1$ پر کے نامعلوم تعامل ف$_1$ کو بلحاظ مقدار اور سمت دونوں کے تعبیر کرتا ہے کیونکہ قوتوں کا کثیر الاضلاع ا ب ج د ع گ ا اور ریسانی کثیر الاضلاع ل$_1$ ب ج د ک ضہ ل$_1$ کے بند ہونے کی وجہ سے نقاط ل$_1$، ل$_2$ ...... ل$_6$ پر عمل کرنے والی متناظر قوتیں ف$_1$، ف$_2$ .. ف$_6$ جو معلوم یا معلوم کردہ سمتوں میں عمل کرتی ہیں متعادل ہیں۔

قوتوں کے کثیر الاضلاع کو حتیٰ الامکان صحت کے ساتھ کھینچنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کی قوتیں (۱۱۴۳)
اُسی ترتیب میں ہونی چاہئیں جس میں یہ قالب میں ہیں۔ ع ف، ف ا بالترتیب گ ا۱ اور
ا۱ ع کے متوازی کھینچو اس طرح سے ہمیں قوتوں کا کثیر الاضلاع ا ب ج د ع ف ا حاصل ہوگا۔
ب ک، ا ک بالترتیب ا۱ ا۲ اور ا۱ ا۶ کے متوازی کھینچو۔ اس طرح ا۱ کے لئے قوتوں کا
مثلث ا ب ک ہوگا۔ ک اور ج میں سے ک ل، ج ل بالترتیب ا۲ ا۱ اور ا۲ ا۳
کے متوازی کھینچو۔ اس طرح ا۲ کے لئے قوتوں کا کثیر الاضلاع ب ج ل ک ہوگا۔

ل اور د میں سے ل م اور د م بالترتیب ا۱ ا۲ اور ا۳ ا۴ کے متوازی کھینچو
تب ج د م ل ، ا۴ کے لئے قوتوں کا کثیر الاضلاع ہوگا۔

اسی طرح سے د ع ن م ، ا۴ کے لئے قوتوں کا کثیر الاضلاع ہے۔ تب
اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ن ف ، ا۵ ا۲ کے متوازی ہے۔ اس لئے ع ف ن
مثلث ا۵ کے لئے قوتوں کا مثلث ہے اور کثیر الاضلاع ف اک ل م ن ، ا۲
کے لئے قوتوں کا کثیر الاضلاع ہے۔

یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ سلاخیں ا۱ ا۲ ، ا۲ ا۳ ، ا۳ ا۴ ، ا۴ ا۵
دباؤں میں ہیں اور باقی پانچ تناؤں کی حالت میں ہیں۔

**۱۲۱**— شکل کھینچنے کے لئے ایک نکتہ قابل غور ہے۔ اس کی تشریح دفعہ ماقبل کی آخری مثال سے ہو سکتی ہے ا۲ پر جو قوتیں عمل کرتی ہیں اُن کو کھینچنے میں ہم ج میں سے ا۲ ا۲ کے متوازی خط کھینچ سکتے تھے اور ک میں سے ایک اور خط ا۲ ا۳ کے متوازی کھینچ سکتے تھے۔ ایسا کرنا اگرچہ بالکل غلط تو نہ ہوتا مگر اس سے شکل مقابلۃً بہت پیچیدہ ہو جاتی۔ اس لئے عام قاعدہ جس کو ملحوظ رکھنا چاہیئے وہ یہ ہے کہ شکل کے کسی نقطہ ج پر ملنے والے خط حتی الامکان دو جوڑوں پر عمل کرنے والی قوتوں کے خطوط عمل اور ان جوڑوں کے ملانے والے خط کے متوازی ہوں۔ مثلاً چونکہ دو جوڑوں ا۲ اور ا۳ پر عمل کرنے والی قوتیں (۱۱۴) ج پر ملتی ہیں اس لئے اس میں سے گزرنے والا تیسرا خط ا۲ ا۳ کے متوازی ہونا چاہیئے۔ اس لئے ہم ج ل ، ا۲ ا۳ کے متوازی کھینچتے ہیں۔

لیکن بعض اوقات کوئی خطوط ایسے نہیں ہوتے جو قالب پر عمل کرنے والی ابتدائی بیرونی قوتوں کے متوازی ہوں مثلاً نقطہ ل پر کی قوتیں۔ ایسی صورت میں ہم ل میں سے گزرنے والے ایسے خط لیتے ہیں جو ابتدائی قالب میں مثلث کے اضلاع کے متوازی ہوں۔ مثلاً ا۳ کے لئے قوتوں کا کثیر الاضلاع کھینچنے میں ہم ل ج ، ج د سے شروع کرتے ہیں جو پہلے ہی کھینچے جا چکے ہیں۔

اب ہم ل میں سے ایک خط ایسا کھینچ سکتے ہیں جو ا۳ ا۴ کے یا ا۳ ا۲ کے متوازی ہو لیکن ل پر جو قوتیں قبل ازیں کھینچی جا چکی ہیں وہ ا۲ ا۳ اور ا۲ ا۲

کے متوازی ہیں اور ا۳ ا۶ ان دونوں کے ساتھ مل کر ابتدائی قالب میں ایک مثلث بنانے کی شرط کو پورا کرتا ہے لیکن ا۳ ا۴ پورا نہیں کرتا اس لئے ہم خط ل م۱، ا۳ ا۶ کے متوازی کھینچتے ہیں اور پھر د م۱، ا۳ ا۴ کے متوازی کھینچتے ہیں۔

پس قوتوں کا نقشہ کھینچتے وقت ہمیں اس بات کا خیال رکھنا چاہیئے کہ شکل کے کسی نقطہ میں سے گزرنے والے خطوط سے تعبیر ہونے والی تین قوتیں دو بیرونی قوتوں اور قالب کی متناظر کڑی کے متوازی ہوں یا قالب کے مثلث کے اضلاع کے متوازی ہوں۔

۱۲۲ — **تراشوں کا طریقہ**۔ بعض اوقات نقشہ کے ایک حصہ کے تعاملوں کی ضرورت ہوتی ہے، اس صورت میں پورا متکافی نقشہ کھینچنا ضروری نہیں ہوتا مثلاً فرض کرو کہ دفعہ ۱۲۰ کی مشق ۳ میں ہم صرف ت۶۱، ت۶۲، ت۳۲ معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ فرض کرو کہ ایک خط ق ر س ایسا کھینچا گیا ہے جو ا۲ ا۳، ا۲ ا۶، ا۱ ا۶ سے بالترتیب ق، ر، س پر ملتا ہے، تب ق ر س کا بائیں طرف کا حصہ اس پر عمل کرنے والی قوتوں کے زیر عمل متعادل ہوگا بشرطیکہ ہم ت۳۲، ت۶۲، ت۶۱ کو بھی جو ا۲ ا۳، ا۲ ا۶، ا۱ ا۶ کے ساتھ عمل کرتی ہیں شامل کر لیں یعنی یہ بیرونی قوتوں د۱، ف۲، ت۳۲، ت۶۲، ت۶۱ کے زیر عمل تعادل میں ہوگا۔ یہ متعادل ہیں دو قوتوں ف۱، ف۲ کے جو بلحاظ مقدار اور سمت کے معلوم ہیں، تناؤ ت۶۱ کے جس کا خط عمل دیا ہوا ہے اور ایک قوت لا کے (جو نامعلوم تناؤں ت۳۲ اور ت۶۲ کا حاصل ہے) جس کا صرف نقطۂ عمل ا۲ معلوم ہے پس عمل کی تکمیل اس طرح ہو سکتی ہے کہ پہلے ف۱، ت۶۱، ت۲۱ کے لئے پھر ت۲۱، ف۲ اور لا کے لئے اور بالآخر لا، ت۳۲، ت۶۲ کے لئے قوتوں کے مثلث کھینچے جائیں۔

باہم ا۲ کے گرد معیار اثر لے سکتے ہیں۔ اس طرح

ت۱۲ × ا۴ سے عمود ا۱ ا۲ پر

= ف۱ × ا۴ سے ا۱ ف۱ پر عمود

اسی طرح سے ا۲ ا۳ اور ا۱ ا۲ کے تقاطع کے گرد اور ا۱ کے گرد (۱۱۵)

معیار اثر لینے سے ہمیں ت۲۳ اور ت۲۴ حاصل ہونگے

اس طریقہ کے مطابق عمل کرنے میں احتیاط رکھنی چاہیئے کہ تراش قالب کے تین رکنوں سے زیادہ کو قطع نہ کرے۔

۱۲۴۔ چند سلاخیں جن کے سروں کو باہم وصل کیا ہوتا ہے قالب کہتے ہیں۔ جب اس قسم کی سلاخ پر عمل کرنے والی قوتیں ایسی ہوں کہ سلاخ تناؤ کی حالت میں ہو تو اس کو بندھن کہتے ہیں لیکن جب وہ بھچکاؤ کی حالت میں ہو تو اسکو فشارہ بند کہتے ہیں۔

سب سے سادہ قالب ایک مثلث ہوتا ہے جو تین سلاخوں اب، ب ج، ج ا کے سروں کو جوڑنے سے بنایا جاتا ہے۔ چونکہ مثلث کے اضلاع کو معین کر دینے سے اس کی شکل معین ہو جاتی ہے اسلئے اس قسم کے قالب کی شکل ناقابل تبدیل ہوگی اس کو صلب یا مکمل قالب کہتے ہیں خواہ اس کے جوڑوں پر کیسے ہی وزن کیوں نہ لٹکائے جائیں۔

لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ ایک ایسے قالب کی شکل جو چار سلاخوں اب، ب ج، ج د، د ا کے سروں ا، ب، ج اور د کو جوڑنے سے بنائی جائے ہمیشہ ایک ہی رہے کیونکہ سوائے مثلث کے اور کوئی ہندسی شکل محض اضلاع کا تعین کر دینے سے متعین نہیں ہوسکتی۔

ایسے قالب کو نامکمل کہتے ہیں کیونکہ اس کے سروں پر عمل کرنے والی قوتوں کے بدلنے سے اس کی شکل بدلتی ہے۔ لیکن اگر ہم چاہیں تو اس میں ایک قطری سلاخ ا ج کا اضافہ کرنے سے جس کے سرے قبضہ کے ذریعہ ا اور ج کے ساتھ وصل کر دئے گئے ہیں اس کو استوار بنا سکتے ہیں۔ اب اگر قالب کے جوڑوں پر قوتوں کا کوئی معلوم نظام عمل کرے تو ہم قالب کے پانچ اضلاع کے ساتھ عمل کرنے والی قوتوں کو معلوم کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ قطری سلاخ ا ج کے علاوہ ہم ایک اور قطری سلاخ ب د

لگا دیتے ہیں۔ اس صورت میں قالب کو زائد کہتے ہیں چونکہ اس میں سلاخوں کی اس تعداد کی نسبت جو اس کی شکل کو متعین کرنے کے لئے ضروری ہیں ایک سلاخ زیادہ ہے اب اس کے ہر رکن کے ساتھ جو قوتیں عمل کرتی ہیں اُن کا تعین کرنا ممکن نہیں ہے۔

عام طور پر کوئی قالب صلب اُس وقت ہوتا ہے جبکہ یہ مثلثوں کی کسی تعداد میں منقسم ہو سکے گو ممکن ہے کہ یہ زائد ہو۔

۱۲۴۔ غیر زاید صلب قالب۔ دو ابعاد میں اگر جوڑوں کی تعداد ن ہو تو قالب کے صلب اور غیر زائد بھی ہونے کے لئے سلاخوں کی تعداد ۲ ن - ۳ ہونی چاہیئے کیونکہ اگر ہمارے پاس تین جوڑ ا، ب، ج ہوں تو ان کو متعین کرنے کے لئے تین سلاخوں یعنی ب ج، ج ا اور ا ب کی ضرورت ہوتی ہے۔ کسی اور جوڑ د کا مقام متعین ہو جاتا ہے اگر ہمیں د کو کسی دو گزشتہ جوڑوں کے ساتھ ملانے والی سلاخیں مثلاً ا د، ب د دی ہوئی ہوں۔ اسی طرح کسی اور جوڑ ع کے لئے علیٰ ہذا القیاس، پس پہلے تین جوڑوں کے بعد ہر ایک جوڑ کے لئے دو مزید سلاخوں کا ہونا ضروری ہے۔ اس لئے ن جوڑوں کی کل تعداد (۱۱۶)

= ۳ + ۲(ن - ۳) = ۲ ن - ۳

تین ابعاد میں ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ تعداد مذکور ۳ ن - ۶ ہو گی کیونکہ پہلے تین جوڑ ا، ب، ج کے معلوم ہونے کے بعد چوتھے جوڑ د کا مقام اس صورت میں متعین ہو سکتا ہے اگر ہمیں سلاخیں ا د، ب د، ج د معلوم ہوں کسی پانچویں جوڑ ع کا مقام معلوم ہو سکتا ہے اگر ہمیں اس کو گذشتہ جوڑوں میں سے کسی تین سے ساتھ ملانے والی سلاخوں کے طول مثلاً ا ع، ب ع، د ع کے طول معلوم ہوں۔ اس لئے پہلے تین کے بعد ہر ایک جوڑ کے لئے ہمارے پاس تین مزید سلاخیں ہونی چاہئیں، پس جملہ تعداد مطلوبہ

= ۳ + ۳ (ن - ۳) = ۳ ن - ۶

۱۲۵ــــ دفعہ ۱۲۰ کی مثالوں میں بہت سے غیر زائد صلب قالب ہیں۔ بعض اوقات زائد قالب سہولت بخش ہوتا ہے مثلاً دفعہ ۱۲۰ کی مشق ا میں ا۱ ا۳ ایک بندہن ہے اگر ا۲ پر کے ۱۰ ہنڈرویٹ نکال دئے جائیں تو ا۱ ا۳ صریحاً فشار بند بن جائیگا۔ لیکن اگر ا۱ ا۳ بہت جلدی مڑ جانے والا ہوتا تو یہ فشار بند کے طور پر اچھی طرح کام نہیں دے سکتا۔ اس صورت میں ایک مزید بندہن ا۲ ا۴ رکھنا مفید ہوتا، جب سب وزن ا۳ پر ہوتا تو قوت ا۲ ا۴ پر عمل کرتی اور ا۱ ا۳ چنداں مفید نہ ہوتی اگر سب وزن ا۲ پر ہوتا تو سلاخ ا۲ ا۴ بے کار ہو جاتی اور عمل صرف ا۱ ا۳ پر ہوتا۔

ا۱ ا۳ یا ا۲ ا۴ جیسے رکنوں کو جو صرف فشار بند یا بندہن کے طور پر استعمال ہوسکتی ہیں نیم رکن کہتے ہیں۔

# مثالیں

۱ــــ ایک ۱۰ فٹ لمبے شہتیر کے ایک سرے سے ۱ فٹ، ۳ فٹ / ۷ فٹ کے فاصلوں پر بالترتیب اوزان ۲ / ۴ / ۳ ہنڈرویٹ لٹکائے گئے ہیں۔ صحیح نقشہ کشی کے عمل سے حاصل کا خطِ عمل دریافت کرو۔

(اس سرے سے ۳،۹ فٹ)

۲ــــ ایک افقی شہتیر ۲۰ فٹ لمبا ہے اور اس کے ایک سرے سے بالترتیب ۳، ۷، ۱۲، ۱۵ فٹ کے فاصلہ پر ۳، ۲، ۵، ۴، ہنڈرویٹ وزن لٹک رہے ہیں۔ ریسمانی کثیر الاضلاع کے ذریعے دونوں سروں پر کے دباؤ معلوم کرو۔

(۷،۱۵ اور ۶،۸۵ ہنڈرویٹ)

۳ــــ ایک شہتیر پر ۵، ۱۰، ۱۲، ۸، ۶ پونڈ کے وزن اس کے ایک سرے سے بالترتیب ۱، ۳، ۷، ۹، ۱۲ فٹ کے فاصلوں پر آویزاں ہیں۔ شہتیر اپنے ایک سرے سے ۵ اور ۱۵ فٹ کے فاصلوں پر سہارا ہوا ہے ترسیمی طور پر سہارنے والی قوتیں معلوم کرو۔

(۳۴،۲ اور ۶،۸ پونڈ وزن)

۴ــــ ا ب ج د ع ف ایک منتظم مسدس ہے۔ اگر ع ج کے ساتھ ایک ۲۰ پونڈ

وزن کی قوت عمل کرے تو ثابت کرو کہ تعادل قائم رکھنے کے لئے ا ج، ا ف، د ع، پر بالترتیب ۱۰، ۱۷،۳۲ اور ۳،۴۳،۶۴ پونڈ وزن کی قوتیں عمل کرینگی۔

۵ ـــ ذیل کی شکل (۱) میں ہلکی سلاخوں کا ایک متشاکل نظام ہے جن کے سرے آزادانہ جوڑے گئے ہیں اور جسے سروں پر عمل کرنے والی انتصابی قوتوں کے ذریعے سہارا ہوا ہے۔ ۱۰ اور ۵ ہنڈرویٹ کے وزن اُن نقطوں پر جو دکھائے گئے ہیں انتصابی سمت میں عمل کرتے ہیں۔ (۱۱۶)

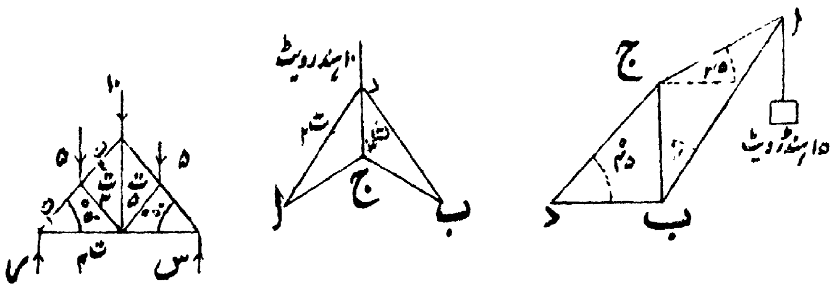
اگر جانبی سلاخیں افق کے ساتھ ۵۰° کا زاویہ بنائیں تو سلاخوں کے دباؤ اور تناؤ معلوم کرو۔

(ت۱ = ۱۳،۰۵، ت۲ = ۹،۷۹، ت۳ = ۳،۲۶، ت۴ = ۸،۳۹
ت۵ = ۵ ہنڈرویٹ، ت۴ اور ت۵ بندھن ہیں باقی فشاربند ہیں)

۶ ـــ شکل (۲) میں ہلکی سلاخوں کا ایک نظام ہے جس کے سرے آزادانہ جوڑے گئے ہیں اور جو سروں ا اور ب پر عمل کرنے والے انتصابی تعاملوں سے سہارا ہوا ہے اگر ۱۰ ہنڈرویٹ کا ایک وزن د پر رکھا جائے تو سلاخوں کے دباؤ اور تناؤ معلوم کرو۔

معلوم ہے کہ ∠ د ا ب = ۵۵° اور ∠ ج ا ب = ۳۵°

(ت۱ = ۹،۳۸، ت۲ = ۱۱،۹۸، ت۳ = ۹،۶۲ ہنڈرویٹ، ت۱ فشاربند ہے اور ت۲ اور ت۳ بندھن ہیں)




۷ ـــ شکل (۳) میں ایک حمالہ کی شکل دکھائی گئی ہے اس میں ا پر ۱۵ ہنڈرویٹ کا

ایک وزن لٹک رہا ہے۔ حصوں ا ج اور ا ب پر عمل کرنے والی قوتیں معلوم کرو۔ اگر کھمبا ب ج آزادانہ حرکت کر سکے اور ب د استوار طور پر ثابت ہو تو بندھن ج د پر کھنچاؤ معلوم کرو۔

[۳۷۷۳، ۲ ؛ ۷۷۵، ۴ ؛ اور ۳۴، ۱ ؛ ہنڈرویٹ]

۸ — ایک دارن گرڈر کا ایک حصہ مین مساوی الاضلاع مثلثوں ا ب ج، ا د ج، ب ج ع پر مشتمل ہے جن کے خط ا ب، د ج ع افقی ہیں اور موخر الذکر سلاخ سب سے اوپر ہے۔ یہ انتصابی سہاروں ا اور ب پر ساکن ہے اور اس کے نقطہ د پر ۵ ٹن اور ع پر ۴ ٹن وزن آویزاں ہیں۔ اس کے چار مائل رکنوں پر کے تعامل اور دباؤ معلوم کرو۔

(۶ ٹن اور ۲ ٹن، ۷۷ء۵، ۱۵۵ء۱، ۱۵۵ء۱، ۴۶۴ء۳ ٹن، موخرالذکر چار رکنوں میں سے پہلا، تیسرا اور چوتھا فشار بند ہیں اور دوسرا بندھن ہے)

۹ — ا ب ج د ایک ذوار بعتہ الاضلاع ہے جو چار ہلکی سلاخوں کو ڈھیلے طور پر جوڑنے سے بنایا گیا ہے اور جس کو سلاخ ب د سے صلب کیا گیا ہے۔ ا اور ج پر ۴۰ پونڈ وزن کی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ اگر یہ معلوم ہو کہ ا ب = ۲ فٹ، ب ج = ۳ فٹ، ج د = ۴ فٹ، د ا = $\frac{1}{2}$ ۴ فٹ اور د ب = ۵ فٹ تو سلاخوں کے تناؤ اور دباؤ معلوم کرو۔

(ا ب، ب ج، ج د اور د ا کے تناؤ ۴۲ء۳۲، ۳۶ء۴، ۸ء۱۶ اور ۵ء۲۵ پونڈ وزن ہیں، ب د کا دباؤ ۳۶ء۷ پونڈ وزن ہے)

۱۰ — دو یکساں مساوی سلاخیں ب پر آزادانہ جوڑی گئی ہیں اور ایک کھونٹی پر اس طرح لٹک رہی ہیں کہ ا کھونٹی پر ہے اور سلاخیں ا ب اور ب ج ایک بے کیفیت رسی کے ذریعہ جو ج اور کھونٹی ا پر بندھی ہے ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتی ہیں، اگر ہر ایک سلاخ کا وزن و معلوم ہو تو ترسیمی طریق پر بتاؤ کہ رسی کا تناؤ (۶۰ء) و ہوگا اور جوڑ ب پر کا دباؤ $\frac{1}{2}$ و کے مساوی ہوگا۔

۱۱ — ا ب ج ایک ایسا افقی خط ہے کہ ا ب = ۵ فٹ اور ب ج = ۱۵ فٹ، ب کے انتصاباً اوپر د ایک ایسا نقطہ ہے کہ ب د = ۱۰ فٹ اور ع، د ع کی تنصیف کرتا ہے۔ ا ج، ج د، د ا، ب د، ب ع سلاخیں ہیں جو ایک قالب بناتی ہیں۔ (۱۱۸)

۱۰ ہنڈرویٹ کے اوزان نقاط د اور ع پر لگائے گئے ہیں اور قالب کو ا اور ج پر سہارا گیا ہے۔ مکانی شکل کھینچو اور قالب کے تمام رکنوں میں دباؤ دریافت کرو۔

۱۲ ـــ ایک قالب کو جو پانچ سلاخوں ا ب، ب ج، ج ا، ج د، د ا کے سروں کو آزادانہ جوڑنے سے بنایا گیا ہے انتصابی سطح مستوی میں رکھا گیا ہے۔ ا ب ج ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جس کا ضلع ا ب افقی ہے اور ا ج انتصابی ہے اور ا ب = ا ج = ۱۰ فٹ، زاویہ ب ا د، ۱۳۵° کے مساوی ہے اور ا ج د، ۲۰° کے مساوی ہے۔ قالب کا ایک نقطہ د ۱ ٹن کے انتصابی وزن کو سہارے ہوئے ہے اور ا اور ب پر عمل کرنے والی انتصابی قوتوں کے ذریعے تعادل کو قائم رکھا گیا ہے۔ ان قوتوں کی مقدار اور قالب کی مختلف سلاخوں کے تعامل معلوم کرو۔

(۳۷ء۳ / ۳۷ء۲ / ۳۵ء۳ / ۱ / ۲۷ء۳ / ۱ / ۲۷ء۲ اور ۳۵ء۳ ٹن وزن)

۱۳ ـــ ایک وارن گرڈر مساوی الاضلاع مثلثوں سے بنا ہوا ہے، اس کے نیچے کے حصہ میں پانچ جوڑ ہیں اور اوپر کے حصہ میں چار نچلی لمبی سلاخ کے سرے دو ہم ارتفاع ستونوں پر قائم ہیں۔ نیچے کے ہر ایک جوڑ پر تین ٹن کا وزن پڑا ہے اور اوپر کے حصہ میں بائیں طرف سے دوسرے جوڑ پر ۵ ٹن کا وزن پڑا ہے ترسیمی طریق سے ستونوں پر کے تعامل اور قالب کے ان چار رکنوں پر کے دباؤ معلوم کرو جو قالب کے بائیں جانب کو مائل ہیں۔

(۶۲۵ء۱۰ / ۳۷۵ء۹ / ۸۰ء۸ / ۳۴ء۵ / ۹۰ء۳ / ۳۶ء۷ ٹن وزن)

۱۴ ـــ ایک وارن گرڈر کے نچلے سروں کا درمیانی فاصلہ ۴۸ فٹ ہے، اس کی نچلی لمبی سلاخ چار حصوں میں منقسم ہے اور مائل رکنوں کا طول ۱۲ فٹ ہے۔ اس پر مساوی طور پر تقسیم کیا ہوا ۲ ٹن فی فٹ کے حساب سے وزن لٹک رہا ہے اور مرکز پر ۵۰ ٹن کا وزن یکجا لٹک رہا ہے۔ رکنوں پر دباؤ کی مقدار اور سمت معلوم کرو۔
(ہر ایک حصہ پر عمل کرنے والے وزن کی بجائے حصہ مذکور کے کناروں پر عمل کرنے والے دو نصف وزن فرض کرو)

۱۵ ـــ ایک چھت کی تراشش نصف منتظم مثمن ا ب ج د ع ہے، نقطے ا اور د اور نیز نقطے ب اور ع بندھن سلاخوں سے مربوط ہیں۔ سب شہتیروں کو کناروں ا، ب

ج، د، ع پر آزادانہ جوڑا گیا ہے اور کنارے ا اور ع مساوی بلندی پر سہارے ہوئے ہیں۔ چھت یکساں طور پر کھپریل سے ڈھکی ہوئی ہے۔ قالب کے وزن کو چھت کے وزن کے مقابلہ میں نظر انداز کر کے ترسیمی طریقہ سے یا کسی اور طرح چھت کے مختلف رکنوں پر کے دباؤں کی مقداریں چھت کے وزن کی رقوم میں حاصل کرو۔

شہتیروں (ا ب، ب ج، ج د، د ع کو ڈھکنے والی کھپریل کی ہر تراش کا وزن ہر ایک شہتیر کے وسطی نقطہ پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے۔

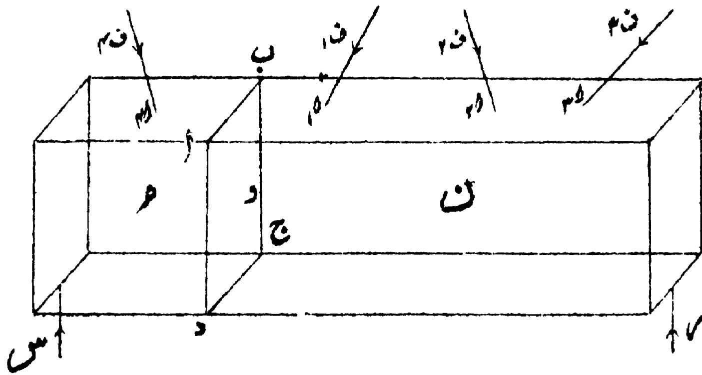
۱۶۔ ثابت کرو کہ قوتوں کے کسی نظام کے حاصل کا خط عمل نظام مذکور کے سب رسمائیوں کے آخری اضلاع کے نقاط تقاطع کا طریق ہوتا ہے۔



# ساتواں باب

## جذّی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر (۱۱۹)

۱۲۶ـــ اس باب میں ہم ایک شہتیر کی تراش پر عمل کرنے والے اندرونی تعاملوں کی چند مثالوں پر غور کریں گے ۔




ایک شہتیر پہ غور کرو جس کی شکل اوپر دکھائی گئی ہے اس شہتیر کو کناروں پر سہارا گیا ہے اور اس کے نقطوں ا۱، ا۲، ا۳ ...... پر قوتیں ف۱، ف۲، ف۳ ...... عمل کرتی ہیں۔ شہتیر کی کوئی تراش ا ب ج د ہو۔ تراش کے بائیں طرف کے حصہ کو م سے اور دائیں طرف کے حصہ کو ن سے موسوم کرو ۔ م کا جو عمل ن پر ہے وہ ان بیشمار قوتوں پر مشتمل ہے جو شہتیر کی تراش ا ب ج د کو عبور کرنے والے ریشے لگاتے ہیں۔

ان قوتوں کے متعلق فی الحال کچھ نہیں کہا جا سکتا لیکن یہ ضرور ہے کہ یہ قوتیں اور ف$_1$، ف$_2$ ...... مل کر حصہ ن کو تعادل میں رکھتی ہیں۔ اس لئے تراشش ا ب ج د میں سے عمل کرنے والی قوتوں کا حاصل قوتوں ف$_1$، ف$_2$، ف$_3$...... کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہونا چاہیئے۔

اب اگر ہم تراش ا ب ج د کے کسی نقطہ و کو مبدا مانیں اور شہتیر کے کناروں
(۱۳۱) کے متوازی خطوں کو محاور قرار دیں تو باب دہم میں ہم دیکھیں گے کہ ن پر عمل کرنے والی تمام قوتیں معادل ہیں تین ترکیبی قوتوں کے جو محوروں کے متوازی و پر عمل کرتی ہیں اور تین ترکیبی جفتوں کے جو محوروں کے گرد و پر عمل کرتے ہیں۔ یہ سب مل کر ایک واحد قوت اور ایک واحد جفت میں تحویل ہو جاتے ہیں۔

پس تراشش ا ب ج د پر ریشوں کے متوازی عمل کرنے والے عملوں کا حاصل ایک واحد قوت اور ایک واحد جفت کے معادل ہوگا۔

اب حصہ ھ کا عمل ن پر اس عمل کے مساوی اور متقابل ہے جو حصہ ن، ھ پر ڈالتا ہے۔ اس لئے تراش کے ایک طرف کے عملوں کے حاصل کے لئے ہم جو قوتیں اور جفت فرض کریں اُن کے مساوی اور متضاد قوتیں اور جفت تراش کی دوسری طرف کے لئے فرض کرنے پڑینگے۔

۱۲۷ ـــ جو صورت بالعموم واقع ہوتی ہے اس میں عمل کرنے والی قوتیں شہتیر کے طول کے انتصابی مستوی میں عمل کرتی ہیں۔ مثلاً اگر دفعہ ماقبل کی سب قوتیں ف$_1$، ف$_2$، ف$_3$، ..... کاغذ کی سطح مستوی میں ہوں تو ظاہر ہے کہ ج د کے متوازی کوئی حاصل عمل نہ ہوگا اور د ا کے متوازی خطوں کے گرد اور شہتیر کے طول کے گرد کوئی حاصل جفت نہیں ہوگا۔

کتاب ہذا میں صرف اسی صورت پر بحث کی جائے گی۔ اس صورت میں تراشش ا ب ج د پر کے عمل ان قوتوں اور جفتوں میں تحویل ہو سکتے ہیں

(۱) ایک قوت میں جو شہتیر کے طول کے متوازی عمل کرتی ہے یا اسکے طول کے مماس کی سمت میں۔ اس قوت کو تناؤ کہتے ہیں۔

(۲) ایک قوت ہیں جو اس کے طول پر عمود وار ہوتی ہے۔ اس کو جذی زور کہتے ہیں۔

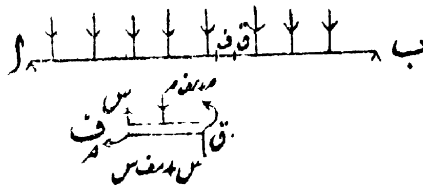
(۳) ایک حاصل جفت اُس خط کے گرد جو اس کے طول پر عمود وار ہو۔ اس کو جھکاؤ کا معیار اثر یا زور کا جفت کہتے ہیں۔

۱۲۸ — یہ بات اکثر مشاہدہ میں آتی ہے کہ سیسے کی پنسل جیسے اجسام کو توڑنے کا سبب جھکاؤ کا معیار اثر ہوتا ہے نہ کہ تناؤ کی قوت۔ لیکن ڈوری کی صورت میں جھکاؤ کا معیار اثر کوئی وقعت نہیں رکھتا اور یہ صرف تناؤ کی قوت سے ٹوٹتی ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ سلاخ کے ٹوٹنے کا میلان زیادہ ہوگا جیسے جھکاؤ کا معیار اثر زیادہ ہو۔ اس لئے ہمیشہ جھکاؤ کے معیار اثر کو سلاخ کے ٹوٹنے کے میلان کا ناپ قرار دیا جاتا ہے۔

ترسیمی طور پر جذی زور اور جھکاؤ کا معیار اثر دونوں سلاخ کے ہر ایک نقطہ پر معین نکال کر ان میں سے ہر ایک کو ان کے متناسب بنانے سے دکھائے جا سکتے ہیں۔ (۱۲۱)

۱۲۹ — اگر کسی افقی شہتیر پر اتصالاً وزن لادا جائے تو ثابت کرو کہ اتصالی جذی زور س $\frac{\text{فرمہ}}{\text{فرلا}}$ کے مساوی ہوگا جہاں مہ نقطہ زیر بحث پر جھکاؤ کا معیار اثر ہے۔




شہتیر کے کنارہ ا سے فاصلہ لا پر کے چھوٹے عنصر ف ق (= ف لا) پر غور کرو۔ فرض کرو کہ رخ ف پر اوپر کی طرف کا جذی زور س ہے اور رُخ ق پر نیچے کی طرف جذی زور س + ف س ہے۔ نیز فرض کرو کہ ف پر کا جھکاؤ کا

معیار اثر لا مر ہے اور اس لئے ق پر جھکاؤ کا معیار اثر مر + مف مر ؔ ہوگا۔
(پچھلی شکل میں ف ق کو بڑے پیمانہ پر دکھایا گیا ہے)
فرض کرو کہ ف پر فی اکائی طول وزن لا ہے اس لئے ف ق کے وزن کو لا مف لا کے مساوی فرض کر سکتے ہیں جو اس کے وسطی نقطہ پر عمل کرتا ہے تب ف ق کے لئے ف کے گرد معیار اثر لینے سے

$$\text{مر} = \text{مر} + \text{مف مر} - (\text{س} + \text{مف س})\ \text{مف لا} - \text{لا مف لا}\ \frac{\text{مف لا}}{۲}$$

$$\therefore \quad \text{س} + \text{مف س} = \frac{\text{مف مر}}{\text{مف لا}} - \frac{۱}{۲}\ \text{لا مف لا}$$

انتہا لینے سے جب مف لا صفر ہو جائے تو کسی طرح محدود وزنوں سے لدی ہوئی سلاخ کے لئے

$$\text{س} = \frac{\text{فر مر}}{\text{فر لا}}$$

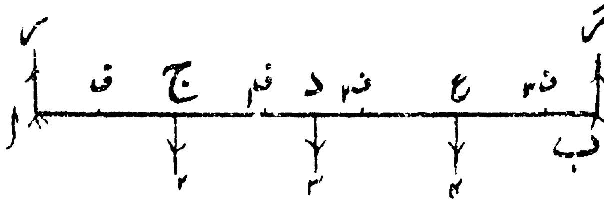
اس سے ظاہر ہے کہ اگر ہم جذی زور کا منحنی کھینچیں اور نیز جھکاؤ کے معیار اثر کا منحنی کھینچیں تو پہلے منحنی کا معین دوسرے منحنی کی ڈھال کو تعبیر کرے گا۔
نیز اگر اس عنصر ف ق پر عمل کرنے والی قوتوں کو انتصابًا تحلیل کریں تو

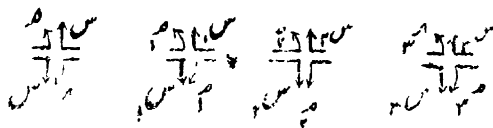
$$\text{س} = \text{س} + \text{مف س} + \text{لا مف لا}$$

$$\frac{\text{فر س}}{\text{فر لا}} = -\text{لا}\ ، \quad \text{انتہا میں}$$

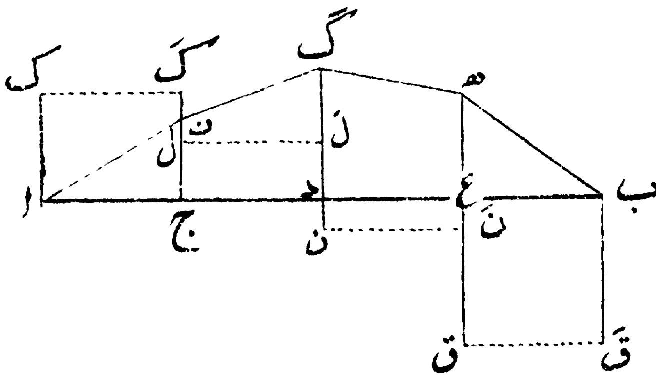
۱۳۰ — مشق ا — ایک شہتیر جس کا وزن نظر انداز ہو سکتا ہے ۱۲ فٹ لمبا ہے۔ شہتیر کو اس کے کناروں پر سہارا گیا ہے اور اس کے ایک سرے سے چوتھائی فاصلہ پر ۲ ٹن کا وزن رکھا ہے اس کے وسطی نقطہ پر ۳ ٹن کا وزن اور اس کے دوسرے سرے سے چوتھائی فاصلہ پر ۴ ٹن کا وزن رکھا ہے۔ جھکانے والے معیار اثر اور جذی زور کے منحنی پورے شہتیر کے لئے معلوم کرو۔ (۱۲۲)
فرض کرو کہ س۱ اور س۲ سروں پر کے سہاروں کے تعامل ہیں۔ اس لئے ان کے

سروں کے گرد معیار اثر لینے سے ہمیں آسانی سے حاصل ہوتا ہے کہ ر۱ = ۴ اور ر۲ = ۵ ٹن



فرض کرو کہ ا اور ج کے درمیان کسی نقطہ ف پر جھکاؤ کا معیار اثر اور جزی زور م اور س ہیں جیسے کہ شکل میں دکھائے گئے ہیں اسی طرح ج اور د کے درمیان کسی نقطہ ف۱ کے لئے یہ بالترتیب م۱ اور س۱ ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔




فرض کرو کہ اف = لا، اف۱ = لا۱ اور اف۲ = لا۲، اف۳ = لا۳

ن پر کے جھکاؤ کے معیار اثر کو ف کے بائیں طرف کے حصہ کی قوتوں کے معیار اثروں کے مساوی فرض کرنے سے

اور انتصابی سمت میں تحلیل کرنے سے

م = ر × لا = ۴ لا
س = ر = ۴ ..... (۱)

اسی طرح سے $ف_۱$ کے لئے

$$\left.\begin{aligned} م_۱ &= ۷ \times لا_۱ - ۲ (لا_۱ - اج) = ۲ لا_۱ + ۹ \\ \text{اور}\quad س_۱ &= ۷ - ۲ = ۲ \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (۲)$$

$ف_۲$ کے لئے $ف_۲$ کے دائیں طرف کے حصہ پر غور کرنے سے

$$\left.\begin{aligned} م_۲ &= ۷(۱۲ - لا_۲) - ۴ (اع - لا_۲) = ۴۴ - لا_۲ \\ س_۲ &= ۴ - ۷ = - ۱ \end{aligned}\right\} \cdots (۳)$$

اسی طرح بالآخر $ف_۳$ کے لئے، $ف_۳$ کے دائیں طرف کے حصہ پر غور کرنے سے

$$\left.\begin{aligned} م_۳ &= ۷ (اب - لا_۳) = ۶۰ - ۵ لا_۳ \\ س_۳ &= - ۷ = - ۵ \end{aligned}\right\} \cdots (۴)$$

(۱۲۳) اگر ہم شہتیر کے ہر ایک نقطہ پر اتنے طول کا سعین کھینچیں کہ اس سے اس نقطہ پر کا جھکاؤ کا معیار اثر تعبیر ہو تو ان سعینوں کے سروں کے طریق خطوط مستقیم ا ف، ف گ، گ ھ، اور ھ ب ہونگے جہاں ج ف، د گ اور ع ھ بالترتیب ۱۲، ۱۸ اور ۱۵ فٹ ٹنوں کو تعبیر کرتے ہیں[۱]۔

مختلف نقطوں پر مرتکز بوجھوں سے لدے ہوئے شہتیروں کی صورت میں ہمیشہ دیکھا جائے گا کہ جھکاؤ کے معیار اثروں کے منحنی خطوط مستقیم ہوتے ہیں۔ اس لئے صرف مرتکز بوجھ والے نقطوں پر جھکاؤ کے معیار اثروں کی قیمتیں معلوم کرلینی کافی ہونگی۔

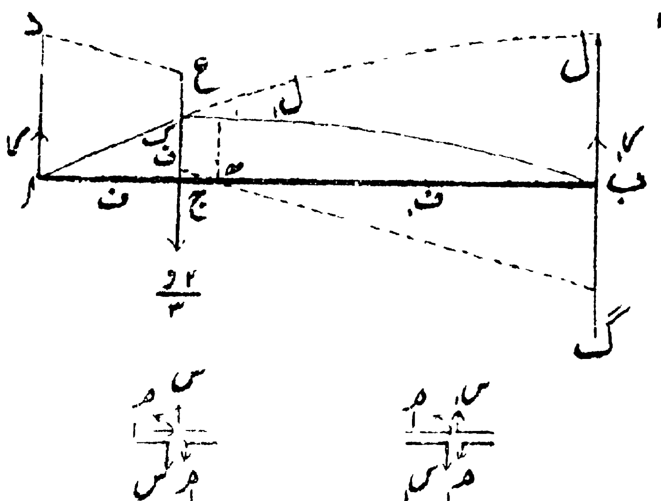
مرتکز بوجھ کے نقطہ پر مثلاً ج پر جذی زور میں تسلسل نہیں رہتا۔ اس عدم تسلسل کی وجہ یہ مفروض ہے کہ وزن مذکور ایک جگہ مرتکز کرکے ہندسی نقطہ پر لگایا گیا ہے عملاً وزن ایسے نقطہ پر عمل نہیں کرسکتا اس لئے اس قسم کا عدم تسلسل بہ لحت واقع نہیں ہوتا۔

مشق ۲۔ اب ایک سخت یکساں سلاخ ہے جس کا وزن و اور طول ۲ ل ہے اور ایسے اس کے کناروں ا اور ب پر افقی وضع میں سہارا گیا ہے ایک وزن $\frac{۲}{۲}$ و شہتیر کے ایک ایسے نقطہ ج پر رکھا گیا ہے کہ اج = $\frac{ل}{۲}$ جھکاؤ کے معیار اثر اور

[۱] نیز جذی زوروں کے منحنی افقی خطوط مستقیم ک ک، ل ل، ن ن، ق ق ہوں گے جہاں اک، ج ل، د ن اور ع ق بالترتیب ۴، ۲، -۱ اور -۵ ٹنوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

جذی زور کے منحنی کھینچو۔

اگر سلاخ کے اکائی طول کا وزن $و_۱$ ہو تو $و = ۲ و_۱ ل_۱$




ا اور ب کے گرد معیار اثر لینے سے ہمیں آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ $ر_۱ = و$ اور $ر_۲ = \frac{۲ و}{۳}$
ا اور ج کے درمیان کسی نقطہ ف کے لئے جہاں $ا ف = لا$ جھکاؤ کا معیار اثر م
= ف کے گرد ا ف پر عمل کرنے والی قوتوں کا معیار اثر لہٰذا

$$= ر_۱ \text{لا} - و_۱ \text{لا} \times \frac{۱}{۲} \text{لا} = -\frac{و}{۴ ل_۱}\left[\text{لا}^۲ - ۴ ل_۱ \text{لا}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اگر نقطہ ف پر جذی زور س ہو تو

$$ر - س = و_۱ \text{لا}$$

اس لئے

$$س = -\frac{و}{۲ ل_۱}\left(\text{لا} - ۲ ل_۱\right) \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

ج اور ب کے درمیان کسی نقطہ ف کے لئے جہاں ا ف = لا اسی طرح سے حاصل ہو سکتا ہے

$$ه = ر لا - و لا \times \frac{1}{2} لا - \frac{و ۲}{۳} (لا - \frac{ل}{۲})$$

$$= - \frac{و}{۴ ل} \left( لا^۲ - \frac{۴ ل لا}{۳} - \frac{۴ ل^۲}{۳} \right) \ldots\ldots (۳)$$

اور $ر - س = و لا + \frac{و ۲}{۳}$

اس لئے $س = - \frac{و}{۲ ل} \left( لا - \frac{۲ ل}{۳} \right) \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$

کسی مناسب طول کے انتصابی خط کو جھکاؤ کے معیار اثر کی اکائی فرض کرو تو مساوات (۱) ایک مکافی کے قوس آک کو تعبیر کرتی ہے جس کا راس نقطہ ل پر ہے جو ب سے انتصاباً اوپر ہے اور مساوات (۳) مساوی مکافی کا قوس ک ب ہے جس کا راس ل، انتصابی خط لا = $\frac{۲ ل}{۳}$ پر ہے، یعنی ھ ل پر ہے۔

اسی طرح کوئی مناسب طول کے انتصابی خط کو جذری زور کی اکائی مانو۔ تب (۲) خط مستقیم د ع کو اور (۴) خط مستقیم ث ھ گ کو تعبیر کریگا۔

حسب دفعہ گزشتہ کسی نقطہ پر جذری منحنی کا معین متناظر نقطہ پر جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کے ڈھال کے مساوی ہوتا ہے ہر دو منحنی ج میں سے گزرنے والے معین پر عدم تسلسل رکھتے ہیں۔

بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر

لا = $\frac{۲ ل}{۳}$ ، سے حاصل ہوتا ہے

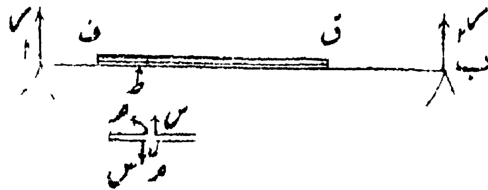
اور تب یہ مساوی ہوتا ہے و × $\frac{۴ ل}{۹}$ کے۔

ان تمام صورتوں میں جبکہ شہتیر یکساں طور پر لدا ہوا ہو اور مختلف نقطوں پر سہارا ہوا ہو ہم دیکھیں گے کہ جھکاؤ کے معیار اثروں کے منحنی مکافیوں کے حصے ہونے ہیں

جن کا وتر خاص ایک ہی ہوتا ہے۔

**مشق ۳** — ایک افقی شہتیر اب کا طول ۲ ل ہے اور اس کا وزن نظر انداز ہو سکتا ہے۔ شہتیر دونوں سروں پر سہارا ہوا ہے اور اس پر یکساں کثافت و کی متحرک گاڑی ف ق گزر رہی ہے گاڑی کا طول ۲ ا۱ (ا۱ < ل) ہے۔

شہتیر کے کسی نقطہ و پر بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ اس وقت واقع ہوتا ہے جب نقطہ ط گاڑی کے طول کو اسی نسبت سے تقسیم کرتا ہے جس میں یہ اب کو تقسیم کرتا ہے۔




فرض کرو کہ سا۱ اور سا۲ سہاروں پر کے تعامل ہیں اور اف = لا۱ اور ب کے گرد معیار اثر لینے سے

$$\text{سا}_1 = \frac{\text{و}\,\text{ا}_1}{\text{ل}}\left(\text{۲ل} - \text{ا}_1 - \text{لا}_1\right)$$

اور

$$\text{سا}_2 = \frac{\text{و}\,\text{ا}_1}{\text{ل}}\left(\text{ا}_1 + \text{لا}_1\right)$$

فرض کرو کہ اط = لا اور ط پر جھکاؤ کا معیار اثر م ہے۔ حصہ اط کے لئے معیار اثر لینے سے (۱۲۵)

$$\text{م} = \text{سا}_1 \times \text{لا} - \frac{\text{و}}{2}\left(\text{لا} - \text{لا}_1\right)^2$$

$$= \frac{\text{و}\,\text{ا}_1}{\text{ل}}\left(\text{۲ل} - \text{ا}_1 - \text{لا}_1\right)\text{لا} - \frac{\text{و}}{2}\left(\text{لا} - \text{لا}_1\right)^2 \quad \ldots\ldots(1)$$

نقطہ ط کے ایک معلوم محل کے لئے م بڑے سے بڑا ہوتا ہے جبکہ $\frac{\text{فم}}{\text{فلا}_1} = 0$

یعنی جب $-\frac{ا_ا لا}{ل} + (لا - ﻻ) = ۰$

یعنی جب $ﻻ = لا\left(۱ - \frac{ا_ا}{ل}\right)$ ............................ (۲)

اور تب $\frac{ف ط}{ط ق} = \frac{لا - ﻻ}{۲ ا_ا + ﻻ - لا} = \frac{لا}{۲ ل - لا} = \frac{ا ط}{ط ب}$

ﻻ کی جو قیمت (۲) سے حاصل ہوتی ہے اسے (۱) میں مندرج کرنے سے

م کی بڑی سے بڑی قیمت $= \frac{و ا_ا}{ل}\left(۱ - \frac{ا_ا}{۲ ل}\right)(۲ ل - لا) لا$

پس بڑے سے بڑے جھکاؤ کے معیار اثر کا منحنی مکافی ہوتا ہے جس کا راس ا ب کے وسطی نقطہ کے انتصاباً اوپر ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ط پر کا جزی زور س ہے۔ حصہ ا ط کے لئے انتصاباً تحلیل کرنے سے

$س = ح_ا - و_ا(لا - ﻻ) = \frac{و_ا}{ل}\left\{۲ ا_ا ل - ا_ا^۲ - ل لا + (ل - ا_ا) ﻻ\right\} = \frac{ف ش}{ح لا}$

نقطہ و کے کسی معلومہ محل کے لئے یہ صریحاً بڑھتا ہے جیسے ﻻ بڑھتا ہے اور بڑے سے بڑا اس وقت ہوتا ہے جب ف نقطہ ط پر منطبق ہو اور اس وقت س کی بڑی سے بڑی قیمت

$= \frac{و_ا}{ل}\left[۲ ا_ا ل - ا_ا^۲ - ا_ا لا\right]$

پس بڑے سے بڑے جذی زور کا منحنی خط مستقیم ہے۔

مشق ۴ — ایک صلب افقی سلاخ ایک کنارہ ا پر اور کسی دوسرے نقطہ ج پر سہاری گئی ہے۔ اگر اس پر یکساں طور پر تقسیم کیا ہوا بڑے سے بڑا وزن اس طرح رکھا جائے کہ یہ نہ ٹوٹے تو ثابت کرو کہ ج سلاخ کو نسبت $\sqrt{۲} + ۱ : ۱$ میں تقسیم کرے گا۔

فرض کرو کہ ا ب = ۲ ل، ا ج = ا، نیز فرض کرو کہ ا اور ج پر کے تعامل $ح_ا$ اور $ح_۲$ ہیں، پس اگر اکائی طول پر وزن و ہو تو $ح_ا = \frac{۲ و ل (ا - ل)}{ا}$

اور سہ۲ = ۲ و لٗ۲ / ما

اگر لا > لج تو کسی ایسی تراش کے لئے جس کا فاصلہ ا سے لا ہو جھکاؤ کا معیار اثر

= سہ لا − و/۲ لا۲

اور اس لئے یہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ سہ − و لا = ۰

اس لئے اج کے لئے بڑے سے بڑے جھکاؤ کا معیار اثر

= ۱/۲ سہ۲/و = ۲ و لٗ (ما − لٗ / ما)۲ .................... (۱)

نیز حصہ ج ب کے لئے بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر صریحاً ج پر ہوتا ہے اور

= ۱/۲ و × ج ب۲ = و/۲ (۲ لٗ − ما)۲ .................... (۲)

اگر (۱) اور (۲) مساوی نہ ہوں تو ہم بڑے کو کم کر سکتے ہیں اور اس لئے ما کو بدلنے سے ٹوٹنے کے بڑے سے بڑے میلان کو کم کر سکتے ہیں۔ (۱۲۶)

اگر وہ مساوی ہوں تو بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر حسب خواہش چھوٹا ہو سکتا ہے بشرطیکہ

۲ لٗ۲ (ما − لٗ / ما) = ۱/۲ (۲ لٗ − ما)۲ .................... (۳)

اور تب (۲ لٗ − ما) = ۲ لٗ (ما − لٗ / ما)

یعنی ما = لٗ √۲

اس صورت میں اج / ج ب = ما / (۲ لٗ − ما) = √۲ / (۲ − √۲) = √۲ + ۱

(۳) کے باقی حلوں سے ناممکن نتائج حاصل ہوتے ہیں کیونکہ ما کو صریحاً مثبت ہونا چاہیئے اور نیز لٗ سے بڑا اور ۲ لٗ سے چھوٹا ہونا چاہیئے۔

# مثالیں

۱۔ ایک سلاخ ا ب اپنے کناروں پر اس طرح سہاری ہوئی ہے کہ یہ متوازی الافق ہے۔ جذّی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کھینچو

(۱) جبکہ سلاخ یکساں طور پر لدی ہوئی ہو۔ بتاؤ کہ ف پر کا جھکاؤ کا معیار اثر ایسے بدلتا ہے جیسے ا ف × ف ب

(۲) جبکہ اس کے اپنے وزن کو نظر انداز کر دیا جائے لیکن اس کے وسطی نقطہ پر ایک وزن و ہے۔

۲۔ ایک سلاخ ا ب ایک نقطہ ا پر اس طرح ثابت ہے کہ وہاں یہ افق کے متوازی ہے جذّی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کھینچو

(۱) جبکہ یہ یکساں طور پر لدی ہوئی ہو

(۲) جبکہ اس کے وزن کو نظر انداز کیا جائے لیکن اس کے وسطی نقطہ پر ایک وزن و ہو

۳۔ ایک شہتیر ۸۰ فٹ لمبا اپنے وسطی نقطہ کے سہارے پر اس طرح ساکن ہے کہ کہ اس کے ایک سرے پر ۵۰ ٹن وزن لٹک رہا ہے اور دوسرا سرا ایک رسی کے ذریعہ زمین کے ساتھ بندھا ہے اس کے جذّی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کھینچو۔

۴۔ ایک شہتیر ۲۵ فٹ لمبا ہے اور ایک طرف ایک سرے پر اور دوسری طرف دوسرے سرے سے ۵ فٹ کے فاصلہ پر سہارا ہوا ہے اس کے طول پر ۵۰۰ پونڈ فی فٹ کا یکساں وزن لدا ہوا ہے اور سہارے سے بڑھے ہوئے سرے پر (۱۰۰۰) پونڈ کا وزن لٹک رہا ہے سہاروں پر کے دباؤ معلوم کرو، نیز بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر اور اس معیار اثر کی تراش کا محل معلوم کرو۔

جھکاؤ کے معیار اثر اور جذّی زور کے منحنی بھی کھینچو۔

[دباؤ ۵ر۷ ۲۱۸ پونڈ وزن اور ۵ر ۱۲ ۲۰۳ پونڈ وزن ہیں، جھکاؤ کا بڑے سے بڑا معیار اثر سہارے کے دوسرے نقطہ پر ہے]

۵ ـــــ ایک شہتیر ا ب ۱۰ فٹ لمبا ہے اور یہ دو ایسے نقطوں پر سہارا ہوا ہے جن کے فاصلے ا سے ۲ اور ۷ فٹ ہیں ا اور ب پر بالترتیب ۱ اور ۲ ٹن کے وزن بندھے ہیں اور علاوہ ازیں سہاروں کے درمیانی طول پر ۲ ٹن فی فٹ کا یکساں وزن لدا ہوا ہے ۔ جھکاؤ کے معیار اثر اور جذی زور کے نقشے کھینچو اور ترسیمی طریق پر یا کسی اور طرح سے معلوم کرو کہ جھکاؤ کا معیار اثر کہاں صفر ہے ۔

(۱۲۷) ۶ ـــــ ایک بیرم ا ب کے سرے ا کو رسی کے ذریعہ زمین کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے اور اسے وسطی نقطے ج پر سہارا گیا ہے جو ا کی ہمواری پر واقع ہے ۔ جھکاؤ کے معیار اثر اور جذی زور کے منحنی کھینچو

(۱) جبکہ ۱۰ ٹن کا وزن ب پر لٹکایا جائے اور ۵ ٹن کا وزن اج کے وسطی نقطہ پر لٹکایا جائے ۔

(۲) جب ۱۰ ٹن کا وزن ب پر لٹکایا جائے اور اج پر ۵ ٹن کا تقسیم شدہ وزن لٹکایا جائے ۔

دونوں صورتوں میں شہتیر کے وزن کو نظرانداز کر دیا گیا ہے ۔

۷ ـــــ ا ب ایک افقی شہتیر ہے جس کا طول ۱۸ فٹ ہے اور جو اپنے سروں ا اور ب پر سہارا ہوا ہے ۔ اس پر دو نقطے ج اور د ایسے ہیں کہ اج = ۶ فٹ اور اد = ۱۰ فٹ، ج اور د پر دو وزن ۴ اور ۵ ٹن کے رکھے ہیں اور اس پر ا سے ج تک ۱ ٹن فی فٹ کے حساب سے، ج سے د تک ۱٫۵ ٹن فی فٹ کے حساب سے اور د سے ب تک ۲ ٹن فی فٹ کے حساب سے یکساں وزن لدے ہوئے ہیں شہتیر کے مختلف حصوں کے لئے جذی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کھینچو ۔

۸ ـــــ ایک برقی ٹرام کا کھمبا انتصابا گڑا ہے اور اس کے اوپر کے سرے پر ایک بازو باہر کو نکلا ہوا ہے ۔ جو کھمبے کے مرکزی خط سے ۱۰ فٹ کے فاصلہ پر تاروں کو سہارے ہوئے ہے ۔ ہر ایک کھمبا ۲۰۰ پونڈ تار کو سنبھالے ہوئے ہے اور باہر نکلے ہوئے بازو کا وزن ۲۰۰ پونڈ ہے ۔ یہ فرض کر کے کہ بازو کا وزن اس کے تمام طول پر یکساں طور پر منقسم ہے بازو کے طول پر جذی زور اور جھکاؤ کے منحنی کھینچو اور کھمبے کے پیندے پر جھکاؤ کا معیار اثر محسوب کرو ۔

۹۔ ایک افقی شہتیر ۲۵ فٹ لمبا ہے، یہ ایک طرف ایک سرے ا پر اور دوسری طرف ایک نقطہ ج پر جو دوسرے سرے ب سے ۵ فٹ کے فاصلہ پر واقع ہے سہارا ہوا ہے۔ وزن کی شدت ب سے ا تک بتدریج $\frac{1}{2}$ ٹن فی فٹ سے $\frac{1}{4}$ اٹن فی فٹ تک بڑھتی ہے۔ شہتیر میں بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر اور جزی زور معلوم کرو۔ نیز جھکاؤ کے معیار اثر اور جزی زور کے منحنی کھینچو۔

۱۰۔ ا ب ایک سخت یکساں شہتیر ہے جس کا وزن د اور طول ۲ ل ہے۔ اسے دونوں سروں پر اس طرح سہارا گیا ہے کہ افق کے متوازی ہے۔ ایک شخص جس کا وزن وَ ہے شہتیر کے ایک ایسے نقطہ ن پر کھڑا ہے کہ ا ن = لا (ح ل) ثابت کرو کہ جھکاؤ کے معیار اثر کا منحنی دو ایسے مکافیوں کی دو قوسوں پر مشتمل ہے جن کے وتر خاص مساوی ہیں اور جھکاؤ کا معیار اثر اس نقطہ پر بڑے سے بڑا ہوتا ہے جس کا فاصلہ ا سے ل - $\frac{وَ}{و}$ لا ہے۔

۱۱۔ ایک شہتیر کے سروں کے درمیان ۸۰ فٹ کا فاصلہ ہے اور اس کا وزن فی فٹ طول ایک ٹن ہے۔ شہتیر کے اوپر دس فٹ لمبا متحرک بوجھ ہے جس کا وزن ۲ ٹن فی فٹ طول ہے۔ تقریبی پیمانہ پر بڑے سے بڑے مثبت اور منفی جزی زور کا منحنی کھینچو جبکہ متحرک بوجھ ایک سرے سے دوسرے سرے تک حرکت کرتا ہے۔

۱۲۔ ایک ریل گاڑی جو $\frac{1}{4}$ ا ٹن فی فٹ طول کے متحرک بوجھ کے مساوی ہے ایک ایسے گاڈر پر سے گزرتی ہے جس کے سروں کا درمیانی فاصلہ ۱۲۰ فٹ ہے شہتیر کے ہر نقطے کے لئے بڑے سے بڑے جزی زور اور بڑے سے بڑے جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کھینچو جبکہ (۱) متحرک بوجھ ۱۲۰ فٹ سے زیادہ طول رکھتا ہو نیز جبکہ (۲) اس کا طول ۶۰ فٹ ہو۔

۱۳۔ ۱۰ ٹن اور ۵ اٹن کے دو متحرک بوجھ ایک دوسرے سے $\frac{1}{2}$ ۷ فٹ کے فاصلہ پر ۷۵ فٹ لمبے گاڈر کو اس طرح عبور کرتے ہیں کہ بڑا وزن آگے چلتا ہے۔ تمام گاڈر کے لئے بڑے سے بڑے جھکاؤ کے معیار اثر اور جزی زور کے منحنی کھینچو۔

۱۴۔ ایک مسلسل بوجھ جس کا وزن و ٹن فی فٹ طول ہے ایک ہموار ریل پر کھینچا گیا

ہے۔ پل ا فٹ طول کے ایک واحد استوار گاڈر پر مشتمل ہے۔ بوجھ استوار نہیں ہے اور پل سے زیادہ لمبا ہے۔ پل کے اپنے وزن کو نظرانداز کر دیا گیا ہے۔ گاڈر پر ایک نقطہ ن ایسا ہے جو نزدیک کے سرے سے ک فٹ کے فاصلہ پر ہے، ثابت کرو کہ ن پر

بڑے سے بڑا جزّی زور $\frac{و (ا - ک)^{۲}}{۲ ا}$ ٹن ہے اور دکھاؤ کہ جب متحرک بوجھ کسی مقام پر ہو اور اس کے ایک سرے و سے ایک خط انتصابی و س کھینچا جائے جو ن پر کے جزّی زور کے متناسب ہو تو س سے جو منحنی مرتسم ہوتا ہے وہ چار مکافی کی قوسوں اور ایک خط مستقیم پر مشتمل ہوتا ہے۔

**۱۵**۔ ایک یکساں گاڈر اپنے سروں کے سہارے ساکن ہے اور وزن اس کے وسطی نقطہ پر مرتکز ہے۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر اس صورت کی نسبت جب کہ وزن یکساں طور پر تقسیم شدہ ہو دوچند بڑا ہوگا۔

**۱۶**۔ ایک پتلی یکساں سلاخ کے نچلے سرے ا کو ایک چکنے قبضہ کے ساتھ وصل کر دیا گیا ہے اور اس کا اوپر کا سرا ب ایک چکنی انتصابی سطح مستوی پر ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ ن پر ٹوٹنے کا میلان ایسے بدلتا ہے جیسے ا اور ب سے ن کے فاصلوں کا حاصل ضرب۔

**۱۷**۔ ایک تختہ جس کا وزن ن و اور طول ل ہے متوازی الافق محل میں اپنے سروں پر ساکن ہے۔ ایک آدمی جس کا وزن و ہے اس کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک اس طرح چل سکتا ہے کہ تختہ ٹوٹنے کے عین قریب ہوتا ہے۔ اگر تختہ کے ایک سرے کو ثابت کر دیا جائے اور دوسرا سرا آزادانہ حرکت کر سکے تو ثابت کرو کہ اب آدمی صرف $\frac{۱}{۴}$ ل ( ا - $\frac{۳}{۲}$ ن ) فاصلہ تک چل سکتا ہے۔

**۱۸**۔ سیدھی بے وزن وصل کی ہوئی سلاخوں کے ذریعہ ایک محراب اس طرح بنانا مقصود ہے کہ اس کے کناروں کا درمیانی فاصلہ ا اور ارتفاع ھ ہو اور اس میں $\frac{۱}{۸}$ ا کے باہمی افقی فاصلوں پر سات مساوی اوزان و بندھے ہوں اور سلاخوں کے کسی نقطہ پر کوئی جھکاؤ کا معیار اثر نہ ہو۔ بتاؤ کہ ترسیمی عمل سے سلاخ کی شکل کس طرح متعین ہو سکتی ہے اور ثابت کرو کہ سروں کو ساکن رکھنے کے لئے جو افقی قوتیں لگاتی

پڑتی ہیں وہ $\frac{\text{و ا}}{\text{۲}}$ کے مساوی ہیں۔

۱۹۔ ایک یکساں سلاخ کا طول ا اور وزن و ہے۔ اس کے سروں کے ساتھ مساوی طول ب کی رسیاں بندھی ہیں جن کے دوسرے سرے دو ایسے ثابت نقطوں کے ساتھ بندھے ہیں جن میں سے ایک دوسرے سے انتصاباً ا فاصلہ اونچا ہے۔ اگر سلاخ کو یکساں زاوئی رفتار سہ کے ساتھ انتصابی خط کے گرد گھمایا جائے تو ثابت کرو کہ کسی سرے سے فاصلہ لا پر جھکاؤ کا معیار اثر $\frac{\text{و لا (ا - لا) سہ}^{2}\text{ عہ}}{\text{۲ ا}}$ ہوگا جہاں عہ ہر ایک رسی کا میلان ہے افق کے ساتھ۔ نیز بتاؤ کہ رسیوں کے تناؤ مساوی ہیں اور ب سہ$^{2}$ جم عہ = ج

۲۰ــ ایک ہلکی افقی سلاخ جس کا طول ا ہے اپنے سروں پر ساکن ہے۔ سلاخ کو اس طرح وزنی بنایا گیا ہے کہ کسی نقطہ پر ٹوٹنے کا میلان نقطۂ مذکور پر فی اکائی طول وزن کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر کا وزن ایسے بدلتا ہے جیسے جب $\frac{\text{ π لا}}{\text{ا}}$ جہاں لا اس نقطہ کا سلاخ کے ایک سرے سے فاصلہ ہے۔

[اگر ایک سرے پر کا تعامل م ہو اور اس نقطہ پر جس کا فاصلہ سلاخ کے ایک سرے سے ٹ ہو فی اکائی طول وزن $\text{و}_{\text{ٹ}}$ ہو اور اس نقطہ پر جس کا فاصلہ اسی سرے سے لا ہے جھکاؤ کا معیار اثر له $\text{و}_{\text{لا}}$ ہو تو شرائط سوال کی رو سے

$$\text{له} \times \text{و}_{\text{لا}} = \text{م} \times \text{لا} - \int_{0}^{\text{لا}} (\text{لا} - \text{ٹ})\, \text{و}_{\text{ٹ}}\, \text{فر ٹ}$$

اس لئے لا کے لحاظ سے دو دفعہ تفرق کرنے سے

$$\text{له} \frac{\text{فر}^{2}\text{و}_{\text{لا}}}{\text{فر لا}^{2}} = -\text{و}_{\text{لا}} \quad \therefore \quad \text{و}_{\text{لا}} = \text{ا جب}\left(\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{له}}} + \text{د}\right)$$ جہاں ا اور د مستقل ہیں۔

نیز چونکہ ہر ایک سرے پر جھکاؤ کا معیار اثر صفر ہوتا ہے اس لئے $\text{و}_{\text{لا}}$ صفر ہونا چاہیئے جب کہ لا = ۰ یا ا

اس لئے د = ۰ اور $\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{له}}} = \pi$ ]

۲۱ ـــ ایک تار جس کا وزن و ہے نصف دائرہ کی شکل کا ہے جس کا نصف قطر ا ہے تار ایک انتصابی سطح مستوی میں ایک سرے ا پر اس طرح لٹک رہا ہے کہ یہ آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ کسی نقطہ پر جھکاؤ کا معیار اثر معلوم کرو۔

[دفعہ ۴۶ اشتق ا میں یہ دکھایا جائے گا کہ تار کا مرکز ثقل ث مرکز سے $\frac{۲ ا}{\pi}$ فاصلہ پر ہوتا ہے، نیز تعادل کے لئے ضروری ہے کہ ث سہارے کے مقام ا کے عین نیچے ہو۔ اس لئے ا میں سے گزرنے والا قطر خطِ انتصابی کے ساتھ ایک زاویہ عہ ایسا بنائے گا کہ جب عہ = $\frac{۲}{\pi}$

اگر تار کا کوئی نقطہ ن ایسا ہو کہ ا ن خطِ انتصابی کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو ن پر جھکاؤ کا معیار اثر = ن کی ایک طرف کی سب بیرونی قوتوں کے معیار اثروں کا مجموعہ

$$= \frac{و}{ا \pi} \int_{ط}^{\pi} ۲ ا \, فرفہ \left[ ۲ ا \text{ جب } فہ \text{ جم } (عہ - فہ) - ۲ ا \text{ جب } ط \text{ جم } (عہ - ط) \right]$$

$$= \frac{۲ ا و}{\pi} \left[ (عہ - ط) \text{ جب } (عہ - ۲ ط) + \text{ جب } ط \text{ جب } (عہ - ط) \right]$$

۲۲ ـــ ایک تپائی تین مساوی سخت یکساں سلاخوں پر مشتمل ہے۔ تینوں سلاخوں کے ایک ایک سرے کو ایک جگہ آزادانہ وصل کر دیا گیا ہے۔ اس مقام وصل سے کیتلی لٹک رہی ہے۔ باقی سرے زمین پر ٹکے ہوئے ہیں اور انھیں پھسلنے سے روکنے کے لئے ایک چکنا مستدیر حلقہ ان کے گرد زمین پر قائم ہے۔ ثابت کرو کہ ایک سلاخ کے جھکاؤ کا معیار اثر اس کے وسطی نقطہ پر بڑے سے بڑا ہوگا اور یہ سلاخ کے طول اور کیتلی کے وزن پر منحصر نہیں ہوگا۔

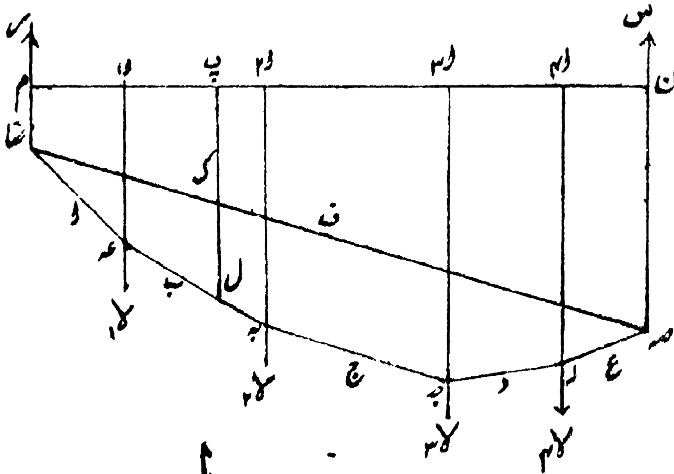
۲۳ ـــ ۲ ل طول کی ایک یکساں سلاخ دو کھونٹیوں پر جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں اور جن کا درمیانی فاصلہ ۲ ج ہے تمثاکلاً پڑی ہے۔ اگر ل > ۲ ج تو ثابت کرو کہ سلاخ کے ٹوٹنے کا بڑے سے بڑا میلان کھونٹی پر ہوگا اگر ۲ ل > (۲ + $\sqrt{۲}$) ج اور سلاخ کے وسطی نقطہ پر ہوگا اگر ۲ ل < (۲ + $\sqrt{۲}$) ج لیکن اگر ل > ۲ ج تو ٹوٹنے کا امکان بڑے سے بڑا کھونٹی پر ہوگا۔ اگر ۲ ل = (۲ + $\sqrt{۲}$) ج تو بتاؤ کہ کیا

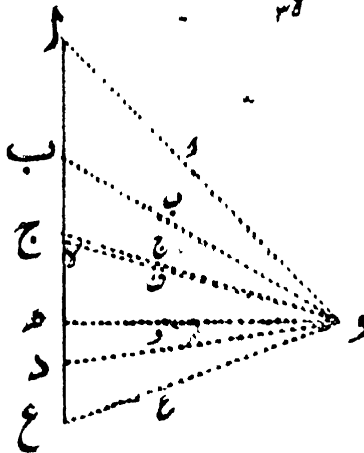
واقع ہوگا ؟

[اگر ل > ۲ ج تو ایک کھونٹی پر اور مرکز پر جھکاؤ کے معیار اثر مختلف العلامت ہوتے ہیں اور ان کی صرف مطلق قیمتوں کا مقابلہ کرنا چاہیئے]

۱۳۰ ـــ ایک سلاخ جس کا طول ۲ ل ہے یکساں طور پر لدی ہوئی ہے اور وزن کی شدت سلاخ کے وسطی نصف حصہ پر سروں پر کے چوتھائی حصوں پر کی شدت کا دوچند ہے اسے مرکز سے متساوی الفصل دو ایسی کھونٹیوں پر سہارنا مقصود ہے کہ سلاخ کا جھکاؤ کا معیار اثر کم از کم ہو۔ ثابت کرو کہ ہر ایک کھونٹی مرکز سے $\frac{ل}{۲}$ فاصلہ پر ہونی چاہیئے۔

۱۳۱ ـــ ایک شہتیر جو اپنے دونوں سروں پر سہارا ہوا ہے بہت سے مجتمع وزنوں سے لدا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ وزنوں کا رسیمانی کثیر الاضلاع شہتیر کے جھکاؤں کے معیار اثر وزن کا نقشہ ہے۔





فرض کرو کہ شہتیر م ن کے نقاط ا۱، ا۲، ا۳، ا۴ پر اوزان لا۱، لا۲، لا۳، لا۴ لٹک رہے ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ نیز فرض کرو کہ م اور ن پر کے تعامل س اور س ہیں۔

ایک انتصابی خط ا ع ایسا کھینچو کہ ا ب، ب ج، ج د، د ع بالترتیب لا۱، لا۲، لا۳، لا۴ کو تعبیر کریں۔ کوئی قطب و لو اور خطوط و ا، و ب، و ج، و د، و ع کھینچو۔

لا۱ پر کسی نقطہ عہ سے شروع کرو اور خطوط ضا عہ اور عہ بہ بالترتیب و ا، و ب کے متوازی کھینچو۔ اور پھر بہ جہ، و ج کے متوازی کھینچو اور علی ہذا القیاس حسب دفعہ ۱۱۳ عمل کرو اس طرح سے ہمیں بالآخر خط ہہ ضا حاصل ہوگا۔ و لا اس کے متوازی کھینچو، تب لا ا، لا ع سے س اور س تعبیر ہونگے۔

نیز و ھ، ا ع پر عمود نکالو اس لئے و ھ (= ھ) ا، ب، ج وغیرہ کے مستقل افقی جزو ترکیبی کو تعبیر کرے گا۔

م ن پر ا۱، ا۲ کے درمیان کوئی نقطہ ب لو اور ب پ ک ل انتصاباً کھینچو جو ریسمانی کثیر الاضلاع سے ک اور ل پر ملے۔ اب ہم ثابت کرینگے کہ ب پر جھکاؤ کا معیار اثر ک ل سے تعبیر ہوتا ہے۔

قوتوں کے نقشہ سے ظاہر ہے کہ

قوت لا۱ ≡ عہ بہ کے ساتھ قوت ب اور جہ بہ کے ساتھ قوت ج

" لا۲ ≡ بہ جہ کے ساتھ " ج اور لہ جہ کے ساتھ " د

" اور لا۳ ≡ جہ لہ کے ساتھ " د اور صہ لہ کے ساتھ " ع

اور س ≡ لہ صہ کے ساتھ " ع اور صہ ضا کے ساتھ " ف

اس لئے لا۱، لا۲، لا۳، س ≡ عہ بہ کے ساتھ قوت ب
اور صہ ضا کے ساتھ قوت ف

اس لئے پ کے گرد اُن کے معیار اثروں کا مجموعہ

= عہ بہ کے ساتھ عمل کرنے والی قوت ب کا معیار اثر پ کے گرد

معہ صہ صنا کے ساتھ عمل کرنے والی قوت ف کا معیار اثر پ کے گرد

اب ل بہ کے ساتھ عمل کرنے والی قوت ب کا ایک جزو ترکیبی انتصابی ہے جس کا پ کے گرد کوئی معیار اثر نہیں ہے اور دوسرا جزو ترکیبی افقی ہے جس کا پ کے گرد معیار اثر ۱۰ × پ ل ر ہے۔

اسی طرح صہ صنا کے ساتھ عمل کرنے والی قوت ف کا معیار اثر پ کے گرد ۱۰ × پ ک لہ ہے۔

اس لئے قوتوں لا، لا، لا ہس کا مجموعی معیار اثر ف کے گرد

= ۱۰ × پ ل - ۱۰ پ ک = ۱۰ ک ل

یعنی پ کے گرد جھکاؤ کا معیار اثر مقطوعہ ک ل سے تعبیر ہوتا ہے اور مقدار میں اس حاصل ضرب کے مساوی ہے جس کا ایک جزو مقطوعہ ہے اور دوسرا جزو قطب و سے وزنوں کے خط کا فاصلہ ہے۔

اسی طرح سے کسی دوسری صورت پر بحث ہوسکتی ہے۔

یہ بات قابل غور ہے کہ یہ مسئلہ دراصل وہی ہے جو دفعہ ۱۱۷ میں متوازی قوتوں کے لئے ثابت ہوچکا ہے۔

مشق۔ ایک شہتیر ۶۰ فٹ لمبا اپنے دونوں سروں پر سہارا ہوا ہے اس کے ان نقطوں پر جنکے فاصلے ایک سرے سے بالترتیب ۱۲ فٹ، ۲۸ فٹ، اور ۴۸ فٹ ہیں بالترتیب ۵، ۶ اور ۴ ٹن وزن لٹک رہے ہیں اس کا ریسمانی کثیر الاضلاع بناؤ اور بتاؤ کہ جھکاؤ کے معیار اثر کے لئے اسے کس پیمانہ پر پڑھنا چاہیئے۔

۱۳۲۔ جھکاؤ کے معیار اثر کے لئے دوسرا ترسیمی عمل ذیل میں مندرج ہے۔

فرض کرو کہ م ن = ل، م ا = ا، م ا = ا م ل = ا اور م ا

= ا م ب، م ن پر عمود کھینچو جو س × ل کو تعبیر کرے اور اس پر ب، ب، ب

ایسے نقطے لو کہ ب۴ ب۳، ب۳ ب۲، ب۲ ب۱، ب۱ م، بالترتیب لا۴ × ا۴،
لا۳ × ا۳ اور لا۲ × ا۲ اور لا۱ × ا۱ کو تعبیر کریں۔

ن ب۴ کو ملاؤ جو ا۴ میں سے گزرنے والے انتصابی خط سے ج۳ پر ملے ج۳ ب۳ کو ملاؤ جو ا۳ میں سے گزرنے والے انتصابی خط سے ج۲ پر ملے اور علیٰ ہذا القیاس

اس طرح سے ہمیں کثیر الاضلاع م ج۱ ج۲ ج۳ ج۴ ن حاصل ہوتا ہے جس کے کسی نقطہ ف کا معین اس نقطہ پر جھکاؤ کے معیار اثر کو تعبیر کرتا ہے۔

کیونکہ اگر یہ معین ف ء خطوط ج۱ ج۲، ج۳ ج۴ اور ج۴ ن سے و، ھ اور لا پر ملے تو ف پر جھکاؤ کا معیار اثر

$$= \text{س} \times \text{ف}_{\text{ن}} - \text{لا}_{۴} \times \text{ف}_{\text{ا}۴} - \text{لا}_{۳} \times \text{ف}_{\text{ا}۳} - \text{لا}_{۲} \times \text{ف}_{\text{ا}۲}$$

$$= \frac{\text{ف}_{\text{ن}}}{\text{م}_{\text{ن}}} \times \text{س} \times \text{ل}_{\text{ا}} - \frac{\text{ف}_{\text{ا}۴}}{\text{م}_{\text{ا}۴}} \times \text{لا}_{۴} \times \text{ا}_{۴} - \frac{\text{ف}_{\text{ا}۳}}{\text{م}_{\text{ا}۳}} \times \text{لا}_{۳} \times \text{ا}_{۳} - \frac{\text{ف}_{\text{ا}۲}}{\text{م}_{\text{ا}۲}} \times \text{لا}_{۲} \times \text{ا}_{۲}$$

پس ف پر کا جھکاؤ کا معیار اثر

$$= \frac{\text{ف}_{\text{ن}}}{\text{م}_{\text{ن}}} \times \text{م}_{\text{ا}}\text{ب}_{۴} - \frac{\text{ف}_{\text{ا}۴}}{\text{م}_{\text{ا}۴}} \times \text{ب}_{۴}\text{ب}_{۳} - \frac{\text{ف}_{\text{ا}۳}}{\text{م}_{\text{ا}۳}} \times \text{ب}_{۳}\text{ب}_{۲} - \frac{\text{ف}_{\text{ا}۲}}{\text{م}_{\text{ا}۲}} \times \text{ب}_{۲}\text{ب}_{۱}$$

$$= \text{ف لا} - \text{لا ھ} - \text{ھ و} - \text{و ع}$$

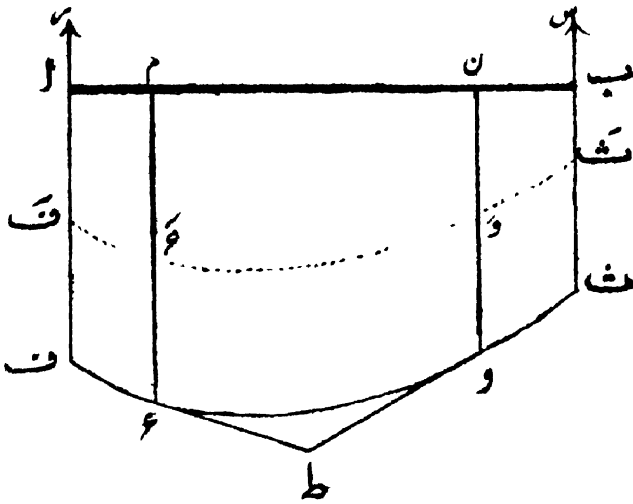
$$= \text{ف ع}$$

اسی طرح سے شہتیر کے کسی اور نقطہ کے لئے۔

**۱۳۳**۔ دفعہ ۱۳۱ سے یہ ظاہر ہے کہ وزنوں $\text{لا}_{۲}$، $\text{لا}_{۳}$، $\text{لا}_{۴}$ کا حاصل معادل ہے عہ بہ کے ساتھ عمل کرنے والی قوت سب معہ صہ لہ کے ساتھ عمل کرنے والی قوت رع کے، یعنی وزنوں $\text{لا}_{۲}$، $\text{لا}_{۳}$، $\text{لا}_{۴}$ کا حاصل ریسمانی کثیر الاضلاع کے اضلاع سب اور رع کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔ اسی طرح سے اضلاع کے کسی اور زوج کے لئے۔

پس ریسمانی کثیر الاضلاع کے کسی دو اضلاع سب اور رع کے نقطۂ تقاطع میں سے اُن وزنوں کا حاصل گزرتا ہے جو ب اور ع کے درمیان واقع ہیں۔

اب فرض کرو کہ شہتیر کو مسلسل طور پر لادا گیا ہے اس لئے ریسمانی کثیر الاضلاع مسلسل منحنی ہوگا اور اس کے نقاط ع، و پر کے دو مماس اضلاع ب اور ع ہوں گے۔




تب م ن پر کے سب وزنوں کا حاصل ط میں سے گزرتا ہے

وزنوں کا منحنی فَ عَ وَ شَ کھینچو

م ن کے حاصل وزن کا م سے افقی فاصلہ

$$= \frac{\text{و}_1 \text{لا}_1 + \text{و}_2 \text{لا}_2 + \ldots}{\text{و}_1 + \text{و}_2 + \ldots} = \frac{\int \text{ما فرلا} \times \text{لا}}{\int \text{ما فرلا}}$$

= وزنوں کے منحنی کے مرکز ثقل کا م سے فاصلہ جیساکہ دفعہ ۱۴۵ ا سے ظاہر ہوگا۔

اس لئے ط میں سے گزرنے والا انتصابی خط وزنوں کے منحنی کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہے یعنی جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کے کوئی دو مماس ایک ایسے نقطہ پر قطع کرتے ہیں جو وزنوں کے مرکز ثقل کے انتصاباً نیچے واقع ہوتا ہے۔

# آٹھواں باب

## مرکز ثقل

۱۳۴- مادہ کا ہر ایک ذرہ زمین کے مرکز کی طرف کھنچتا ہے اور وہ قوت جس سے زمین کسی ذرہ کو اپنی طرف کھینچتی ہے ذرہ کی کمیت کے تناسب ہوتی ہے۔

ہر ایک جسم کو ذرات کا ایک مجموعہ خیال کیا جا سکتا ہے۔ اگر جسم زمین کے مقابلہ میں چھوٹا ہو تو اس کے اجزا کو زمین کے مرکز کے ساتھ ملانے والے خطوط تقریباً متوازی ہونگے، باب ہذا میں ہم ان کو عین متوازی تصور کرینگے۔

پس ایک استوار جسم کے ہر ایک ذرہ پر ایک قوت انتصاباً نیچے کی طرف عمل کرتی ہے جس کو اس کا وزن کہتے ہیں۔ یہ سب قوتیں متوازی قوتوں کو ترکیب دینے کے طریقے سے جو دفعہ ۴۳ میں بیان کیا گیا ہے ترکیب پا کر ایک واحد قوت میں تحویل ہو جاتی ہیں جو بلحاظ مقدار کے سب انفرادی قوتوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے اور جسم کے ایک خاص نقطہ پر عمل کرتی ہے۔ اس نقطہ کو جسم کا مرکز ثقل کہتے ہیں۔

**مرکز ثقل۔ تعریف**۔ کسی جسم کا یا ذروں کے کسی ایسے نظام کا جو باہم استوار طور پر مربوط ہوں مرکز ثقل وہ نقطہ ہوتا ہے جس میں سے جسم کے وزن کا خطِ عمل ہمیشہ گزرتا ہے۔

۱۳۵- چونکہ متوازی قوتوں کے حاصل کا خط عمل معلوم کرنے کا عمل صرف قوتوں کے نقاط عمل اور مقداروں پر موقوف ہوتا ہے اور قوتوں کی سمت پر موقوف نہیں

ہوتا اس لئے مرکز ثقل کا نقطہ وہی رہتا ہے خواہ ہم جسم کو کسی زاویہ میں سے گھما دیں کیونکہ موخرالذکر صورت میں بھی جسم کے حصوں کے وزن متوازی ہونگے۔ اگرچہ ان کی سمت جسم کے بلحاظ دونوں صورتوں میں ایک ہی نہیں ہوگی۔

اس سے ہم دکھا سکتے ہیں کہ جسم کا صرف ایک ہی مرکز ثقل ہوسکتا ہے کیونکہ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ اس کے دو مرکز ثقل ث۱ اور ث۲ ہیں، اب جسم کو اس طرح گھماؤ کہ ث۱ ث۲ افقی ہوجائے۔ اس طرح سے ہمیں انتصابی قوتوں کا ایک ایسا نظام مل جائے گا جن کا حاصل ث۱ اور ث۲ دونوں میں سے گزرے گا۔ لیکن چونکہ حاصل قوت خود لازمی طور پر انتصابی ہونی چاہیئے اس لئے یہ قوت افقی خط ث۱ ث۲ میں سے نہیں گزر سکتی۔

اس لئے ہر جسم کا صرف ایک ہی مرکز ثقل ہوسکتا ہے۔

۱۳۶۔ اگر جسم اس قدر چھوٹا نہ ہو کہ اس کے سب جزوی حصوں کے وزنوں کو تقریباً متوازی خیال کیا جاسکے تو جسم کا مرکز ثقل ہونا ضروری نہیں ہے۔

بہرحال جسم کا وہ نقطہ جو ہمیں دفعہ ۱۳۳ کے عمل سے حاصل ہوتا ہے بہت ضروری اور اہم خواص رکھتا ہے، اس کو جسم کا مرکزِ کمیت یا مرکز جمود بھی کہتے ہیں۔ اگر جسم یکساں کثافت کا ہو تو اس کا مرکز کمیت مرکز ہندسی یا اوسط مرکز پر منطبق ہوتا ہے۔

۱۳۷۔ پتلی یکساں سلاخ ا ب۔ اس کا مرکز ثقل صریحاً اس کا وسطی نقطہ ث ہے کیونکہ ث اور ا کے درمیان ہر ایک ذرہ کے متناظر دوسری طرف ث اور ب کے درمیان ث سے اُسی فاصلہ پر ایک مساوی ذرہ موجود ہے۔

## ایک یکساں متوازی الاضلاع ا ب ج د۔ ا د کے متوازی

خط کھینچنے سے متوازی الاضلاع کو بہت سے پتلے ٹکڑوں میں تقسیم کرو۔ اب چونکہ ہر ایک ٹکڑے کا مرکز ثقل اس کا وسطی نقطہ ہے اس لئے کل شکل کا وسطی نقطہ ا د اور ب ج کے وسطی نقطوں کو ملانے والے خط پر واقع ہے۔ اسی استدلال سے مرکز ثقل ا ب اور ج د کے وسطی نقطوں کو ملانے والے خط پر بھی واقع ہے۔ اس لئے مرکز ثقل مطلوبہ وتروں کے تقاطع پر واقع ہے۔

**یکساں مثلثی پترا ا ب ج** ۔ فرض کرو کہ ب ج اور ج ا کے وسطی نقطے د اور ع ہیں ۔ ب ج کے متوازی خط کھینچ کر شکل کو بہت سے پتلے ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ان سب ٹکڑوں کے مرکز ثقل اور بنائً علیہ کل شکل کا مرکز ثقل ا د پر واقع ہے ۔ اسی طرح سے یہ ب ع پر بھی واقع ہے ۔ پس مطلوبہ مرکز ثقل ا د اور ب ع کے نقطہ وصل پر واقع ہے ۔ متشابہ مثلثوں ث ا ب اور ث د ع سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ

ث د = $\frac{1}{2}$ ث ا اور اس لئے ث د = $\frac{1}{3}$ د ا ، اس سے ث کا مقام متعین ہو جاتا ہے ۔

ظاہر ہے کہ اگر ا ب اور ج پر مساوی وزن رکھے جائیں تو ان کا مرکز ثقل بھی یہی نقطہ ث ہوگا ، کیونکہ ب اور ج پر دو مساوی وزن د ، د پر ایک وزن ۲ و کے مساوی ہوتے ہیں اور یہ وزن اور ا پر کا ایک وزن و دونوں مل کر ث پر کے ایک وزن ۳ و کے معادل ہو جاتے ہیں ( دیکھو دفعہ ۳۱ ) اس لئے کوئی یکساں مثلث جہاں تک اس کے وزن سے تعلق ہے تین ایسے وزنوں کے نظام کے معادل متصور ہو سکتا ہے جن میں سے ہر ایک مثلث مذکور کے وزن کا ایک تہائی ہو اور اس کے کونوں پر رکھا جائے ۔

**یکساں چار سطحی ا ب ج د** ۔ فرض کرو کہ رخوں ا ب ج اور د ا ب کے مرکز ثقل ث۱ اور ث۲ ہیں ۔ رخ ا ب ج کے متوازی بہت سی مستوی سطوح کھینچ کر بہت سے پتلے ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ ہر ایک ٹکڑے کا مرکز ثقل اور بنائً علیہ کل چار سطحی کا مرکز ثقل د ث۱ پر واقع ہوتا ہے ۔ اسی طرح سے یہ ج ث۲ پر بھی واقع ہوتا ہے ۔ پس مطلوبہ مرکز ثقل ث ان خطوط کا نقطۂ تقاطع ہے ۔ اب متشابہ مثلثوں سے ظاہر ہے کہ اگر ا ب کا وسطی نقطہ ع ہو تو

$$\frac{ث\, ث_{\text{ہ}}}{ث\, د} = \frac{ث\, ث_{\text{ہ}}}{د\, ج} = \frac{ع\, ث_{\text{ہ}}}{ع\, ج} = \frac{1}{3}$$

پس $ث_{\text{ہ}}\, ث = \frac{1}{\text{ہ}}\, ث_{\text{ہ}}\, د$ جس سے ث کا مقام معلوم ہو جاتا ہے۔

چارسطحی کو چار ایسے وزنوں کے معادل خیال کیا جا سکتا ہے جن میں سے ہر ایک چارسطحی کے وزن کا ایک چوتھائی ہو اور ہر ایک کو جداگانہ اس کے کونوں پر رکھا جائے۔ کیونکہ ا، ب، ج میں سے ہر ایک پر ایک وزن و، رُخ ا ب ج کے مرکز ثقل $ث_{\text{ہ}}$ پر ایک وزن ۳ و کے معادل ہے اور $ث_{\text{ہ}}$ پر کا وزن ۳ و اور د پر کا وزن و مل کر ث پر کے ایک وزن ۴ و کے مساوی ہیں۔ (دیکھو دفعہ ۱۳۱)۔

**کسی قاعدہ پر مخروط مضلع۔ ٹھوس مخروط۔** اگر مخروط مضلع کا قاعدہ مستوی شکل ا ب ج ل م ن .... ہو جس کا مرکز ثقل $ث_{1}$ ہو تو اسی قسم کے استدلال سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ مرکز ثقل د اور $ث_{1}$ کو ملانے والے خط پر واقع ہوگا۔

نیز مستوی سطوح د ا $ث_{1}$، د ب $ث_{1}$ .... کھینچنے سے پورے مخروط مضلع کو مثلثی قاعدوں والے مضلع مخروطوں میں منقسم کیا جا سکتا ہے جن میں ہر ایک کا مرکز ثقل ا ب ج ل .... کے متوازی اُس سطح مستوی میں واقع ہے جس کا فاصلہ د سے موخر الذکر سطح مستوی ا ب ج ل .... کے فاصلہ کا تین چوتھائی ہے۔ پس کل جسم کا مرکز ثقل خط $ث_{1}$ د پر واقع ہے اور اس کو نسبت ۱ : ۳ میں تقسیم کرتا ہے۔

اب فرض کرو کہ مستوی قاعدہ کے اضلاع ایک منتظم کثیر الاضلاع بناتے ہیں اور ان کی تعداد کو لاانتہا بڑھایا گیا ہے بالآخر مستوی قاعدہ دائرہ بن جاتا ہے۔ اور مخروط مضلع مجسم مخروط بن جاتا ہے جس کا راس د ہے، نیز نقطہ $ث_{1}$ اب مستدیر قاعدہ کا مرکز ہو جاتا ہے۔

اس لئے ایک ٹھوس قایم مستدیر مخروط کا مرکز ثقل اُس خط پر واقع ہوتا ہے

جو قاعدہ کے مرکز کو راس کے ساتھ ملاتا ہے اور قاعدہ سے اس کا فاصلہ اس خط کے طول کا ایک چوتھائی ہوتا ہے۔

**قائم مستدیر مخروط کی سطح** - چونکہ مخروط کے راس کو اس کے مستدیر قاعدہ پر کے لاانتہا قریب قریب کے نقطوں کے ساتھ ملانے سے اس کی سطح کو لا انتہا مثلثی پتروں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے اور ان سب کے مرکز ثقل مخروط کے قاعدہ کے متوازی اس سطح مستوی میں واقع ہوتے ہیں جس کا فاصلہ قاعدہ سے قاعدہ اور راس کے فاصلہ کا ایک تہائی ہو اس لئے کل مخروط کا مرکز ثقل بھی اسی طرح اس مستوی میں واقع ہوگا لیکن تشاکل سے ظاہر ہے کہ مرکز ثقل مطلوبہ مخروط کے محور پر واقع ہے اس لئے یہ وہ نقطہ ہے جہاں مذکورہ بالا سطح مستوی محور سے ملتی ہے۔ پس مطلوبہ مرکز ثقل محور پر کا وہ نقطہ ہے جس کا فاصلہ قاعدہ سے مخروط کے ارتفاع کا ایک تہائی ہو۔

۱۳۸- **مرکز ثقل معلوم کرنے کے لئے عام ضوابط** - ذروں کا ایک نظام ہے جن کے وزن $و_۱$، $و_۲$، $و_۳$ ..... $و_ن$ ہیں اور جن کے محدد ثابت محوروں ولا، وما، وی کے لحاظ سے $(لا_۱، ما_۱، ی_۱)$، $(لا_۲، ما_۲، ی_۲)$، ...... $(لا_ن، ما_ن، ی_ن)$ ہیں ان کے مرکز ثقل ث کے محدد $(\bar{لا}، \bar{ما}، \bar{ی})$ حسب ذیل طور پر حاصل ہوتے ہیں۔

$$\bar{لا} = \frac{و_۱ لا_۱ + و_۲ لا_۲ + \cdots\cdots و_ن لا_ن}{و_۱ + و_۲ + \cdots\cdots و_ن} = \frac{\Sigma (و_۱ لا_۱)}{\Sigma (و_۱)}$$

$$\bar{ما} = \frac{\Sigma (و_۱ ما_۱)}{\Sigma و_۱} \quad \text{اور} \quad \bar{ی} = \frac{\Sigma و_۱ ی_۱}{\Sigma و_۱}$$

ان ضابطوں کو دفعہ ۳۴ میں ثابت کیا گیا ہے کیوں کہ ذروں کے وزن متوازی قوتوں کے نظام کی ایک خاص صورت ہیں۔

اگر سب ذرّے ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوں تو پہلے ضابطہ سے ث کا مقام معلوم ہو سکتا ہے۔
اگر سب ذرّے ایک سطح مستوی میں واقع ہوں تو صرف پہلے دو ضابطوں کی ضرورت پڑتی ہے۔

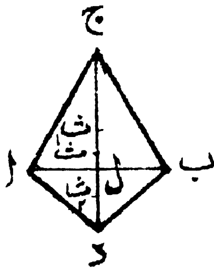
**۱۳۹۔ جسم کے دو حصوں کا مرکز ثقل معلوم ہے کل جسم کا مرکز ثقل معلوم کرو۔**

فرض کرو کہ معلومہ مرکز ثقل $ث_۱$ اور $ث_۲$ ہیں اور دو حصوں کے وزن $و_۱$ اور $و_۲$ ہیں تب مطلوبہ نقطہ ث دفعہ ۱۳۱ کی رو سے $ث_۱ ث_۲$ کو اس طرح تقسیم کرتا ہے کہ

$$\frac{ث_۱ ث}{ث ث_۲} = \frac{و_۲}{و_۱}$$

نقطہ ث دفعہ ۱۳۸ کے استعمال سے بھی معلوم ہو سکتا ہے۔

مشق۔ ایک ہی قاعدہ اب پر اس کی مختلف جانبوں پر دو مساوی الساقین مثلث اب ج اور اب د بنائے گئے ہیں جن کے ارتفاع بالترتیب ۱۲ انچ اور ۶ انچ ہیں۔ اب سے ذوار بعۃ الاضلاع ج ا د ب کے مرکز ثقل کا فاصلہ معلوم کرو۔




فرض کرو کہ ج ل د، اب پر عمود ہے اور اب سے ل پر ملتا ہے اور دونوں مثلثوں ج اب اور ب ا د کے مرکز ثقل بالترتیب $ث_۱$ اور $ث_۲$ ہیں تب

$$ج ث_۱ = \frac{۲}{۳} \times ج ل = ۸$$

اور $ج ث_۲ = ج ل + ل ث_۲ = ۱۲ + ۲ = ۱۴$

مثلثوں کے وزن اُن کے رقبوں کے متناسب ہوتے ہیں، اس لئے بالترتیب $\frac{۱}{۲}$ اب × ۱۲ اور $\frac{۱}{۲}$ اب × ۶ کے مساوی ہیں۔

اگر ث کل شکل کا مرکز ثقل ہو تو

$$ج ث = \frac{\triangle ج اب \times ج ث_۱ + \triangle د اب \times ج ث_۲}{\triangle ج اب + \triangle د اب} = \frac{۱۴ \times ۶ + ۸ \times ۱۲}{۶ + ۱۲} = ۱۰$$

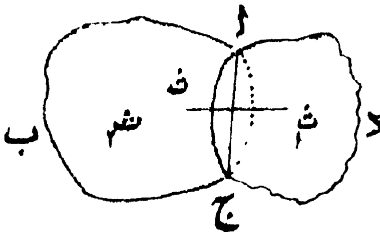
اس لئے ل ث = ج ل - ج ث = ۲ انچ

اس شکل کو پتلے مقوے میں کاٹ کر اس نتیجہ کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

۱۴۰ - کسی پورے جسم کا مرکز ثقل اور اس جسم کے ایک حصہ کا مرکز ثقل دونوں معلوم ہیں۔ باقی ماندہ حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ایک جسم اب ج د کا مرکز ثقل ث ہے اور حصہ ا د ج کا مرکز ثقل $ث_۱$ ہے۔ نیز فرض کرو کہ کل جسم کا وزن و اور حصہ اج د کا وزن $و_۱$ ہے۔ پس $و_۲$ (= و - $و_۱$) حصہ اب ج کا وزن ہے۔

فرض کرو کہ حصہ اب ج کا مرکز ثقل $ث_۲$ ہے چونکہ $ث_۱$ پر $و_۱$ اور $ث_۲$ پر $و_۲$ کا مرکز ثقل ث ہے اس لئے ث لازمی طور پر خط $ث_۱ ث_۲$ پر واقع ہوگا۔ اور



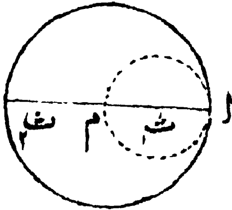

$و_۱ \times ث ث_۱ = و_۲ \times ث ث_۲$

اس لئے اگر $ث ث_۱$ معلوم ہوں تو ہمیں $ث_۱ ث$ کو $ث_۲$ تک خارج کرنے سے $ث_۲$ ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$ث ث_۲ = \frac{و_۱}{و_۲} \times ث ث_۱ = \frac{و_۱}{و - و_۱} \times ث ث_۱$$

مطلوبہ نقطہ دفعہ ۱۳۸ کے ضابطہ سے بھی حاصل ہو سکتا ہے۔

مشق - ایک مستدیر قرص ہے جس کا نصف قطر ر ہے اس میں سے ایک دائرہ اس طرح کاٹا گیا ہے کہ دائرہ کا قطر قرص کا ایک نصف قطر ہے۔ باقی حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرو۔




چونکہ دائروں کے رقبے اُن کے نصف قطروں کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں اس لئے مقطوعہ حصہ کل قرص کا ایک چوتھائی ہے اور باقی ماندہ حصہ کا تین چوتھائی ہے۔

$$\text{پس}\quad \text{و}_1 = \frac{1}{3}\,\text{و}_2$$

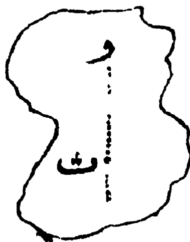
$$\text{اس لئے}\quad \text{و}_2 \times \text{م ث}_2 = \text{و}_1 \times \text{م ث}_1 = \frac{1}{3}\,\text{و}_2 \times \frac{1}{2}\,\text{ر}$$

$$\therefore\quad \text{م ث}_2 = \frac{1}{6}\,\text{ر}$$

تجربہ سے اس نتیجہ کی تصدیق ہوسکتی ہے۔

۱۴۱۔ اگر ایک استوار جسم تعادل میں ہو اور اس کا صرف ایک نقطہ ثابت ہو تو جسم مذکور کا مرکز ثقل ثابت نقطہ میں سے گزرنے والے انتصابی خط پر واقع ہوگا۔

فرض کرو کہ جسم کا ثابت نقطہ و ہے اور اس کا مرکز ثقل ث ہے اب جسم پر عمل کرنے والی صرف دو قوتیں ہیں جن میں ایک قوت جسم کو سہارنے والے ثابت نقطہ میں سے گزرنے والا تعامل ہے اور دوسری قوت جسم کے ترکیبی حصوں کے وزن ہیں جو جسم کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والی ایک واحد انتصابی قوت کے معادل ہیں۔





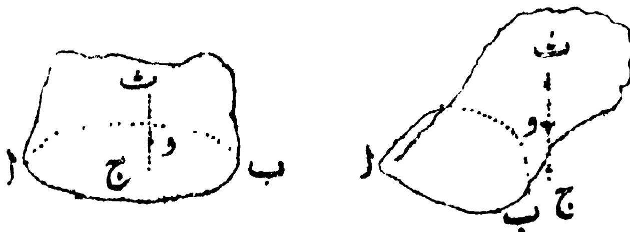


اب ظاہر ہے کہ جب دو قوتیں جسم کو تعادل میں رکھیں تو ضروری ہے کہ وہ

مساوی اور متقابل ہوں اور اُن کا خط عمل ایک ہی ہو، پس ث میں سے گزرنے والے انتصابی خط کو لازماً نقطہ و میں سے بھی گزرنا چاہیئے۔

اب دو صورتیں پیدا ہوتی ہیں پہلی وہ جس میں مرکز ثقل ث سہارے کے مقام و سے نیچے ہو اور دوسری وہ جس میں نقطہ و کے اوپر ہو۔ پہلی صورت میں اگر جسم کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو یہ پھر خود بخود اپنے اصلی مقام کی طرف آنے کو رجوع ہوگا لیکن دوسری طرف اگر جسم کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو یہ تعادل کے ابتدائی محل میں واپس نہ آئے گا۔

۲۴۱۔ اگر ایک جسم کو افقی سطح مستوی پر اس طرح رکھا جائے کہ جسم کا مستوی قاعدہ سطح مذکور سے مس کرے اور اگر اس کے مرکز ثقل ث میں سے ایک انتصابی خط کھینچا جائے تو جسم کھڑا رہے گا اگر یہ انتصابی خط سطح مستوی سے جسم کے قاعدے کے اندر ملے اور گر جائیگا اگر یہ قاعدہ کے باہر ملے۔

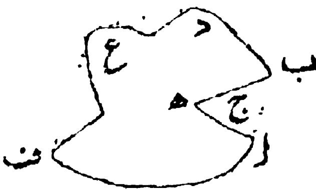



جسم پر جو قوتیں عمل کرتی ہیں وہ یہ ہیں جسم کا وزن جو اس کے مرکز ثقل ث میں سے عمل کرتا ہے اور سطح مستوی کے تعامل جو جسم کے قاعدہ کے مختلف نقطوں پر عمل کرتے ہیں۔ تعامل سب انتصابی ہیں اور اس لئے ان کی ترکیب سے ہمیں ایک واحد انتصابی قوت حاصل ہوتی ہے جو قاعدہ کے کسی نقطہ پر عمل کرتی ہے۔

چونکہ دو یکسان متوازی قوتوں کا حاصل ہمیشہ ان قوتوں کے اندر کے کسی نقطہ پر عمل کرتا ہے اس لئے جسم کے قاعدے کے تمام تعاملوں کا حاصل قاعدے کے باہر کے کسی نقطہ میں سے نہیں گزر سکتا۔

اس لئے اگر جسم کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والا انتصابی خط سطح مستوی

سے قاعدہ کے باہر کے کسی نقطہ پر ملے تو یہ حاصل تعامل سے متعادل نہیں ہوسکتا اور اس لئے جسم کھڑا نہیں رہ سکتا بلکہ لازماً گر جاے گا۔ اگر جسم کا قاعدہ ایک ایسی شکل ہو جس کا ایک زاویہ متداخل زاویہ ہو جیسا کہ ساتھ کی شکل میں دکھایا گیا ہے تو اُس صورت میں لفظ "قاعدہ" میں وہ رقبہ شریک ہوگا جو ہندسی قاعدہ کے گرد مضبوطی سے بندھے ہوئے تاگے کے اندر واقع ہے۔ پس اوپر کی شکل میں "قاعدہ" سے شکل ا ب د ع ف ا کا رقبہ مراد ہے۔




مثلاً نقطہ ج جس پر حاصل تعامل عمل کرتا ہے رقبہ ا ھ ب کے اندر واقع ہوسکتا ہے مگر خط ا ب کے باہر واقع نہیں ہوسکتا۔ اگر نقطہ ج خط ا ب پر واقع ہو تو جسم گرنے کے عین قریب ہوگا۔

## مثالیں

ا ۔ ایک مثلث کا قاعدہ ثابت ہے اور اس کا راس ایک معلومہ خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے ثابت کرو کہ مرکز ثقل بھی ایک خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے

۲ ۔ ایک مثلث کا قاعدہ ثابت ہے اور اس کا راسی زاویہ بلحاظ مقدار کے معین ہے ثابت کرو کہ اس کا مرکز ثقل ایک خاص دائرہ کی قوس پر حرکت کرتا ہے۔

۳ ۔ ایک مثلث پر کسی جگہ ایک معلومہ وزن رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کل نظام کا مرکز ثقل ایک خاص مثلث کے اندر واقع ہوتا ہے۔

۴ ۔ ثابت کرو کہ تین یکساں سلاخوں سے بنے ہوئے مثلث کا مرکز ثقل اُس مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز ہوگا جس کے راسی نقطے سلاخوں کے وسطی نقطے ہیں۔

۵ ۔ اگر تین قوتیں ایک نقطہ ن پر عمل کریں اور بالترتیب م × ن ا، م × ن ب اور م × ن ج سے تعبیر ہوں تو ثابت کرو کہ حاصل ۳ م × ن ث سے تعبیر ہوگا جہاں ث مثلث ا ب ج کا مرکز ثقل ہے۔

۶ ۔ ایک ذرہ ن نقاط ا، ب، ج ..... کی طرف ان قوتوں سے جو لہ × ن ا،

مہ × ن ب، سہ × ن ج، ..... سے تعبیر ہوتی ہیں کھینچ رہا ہے ثابت کرو کہ اُن کا حاصل (لہ + مہ + سہ + .....) × ن ث سے تعبیر ہوتا ہے جہاں ث مرکزِ ثقل ہے اُن وزنوں کا جو ا، ب، ج ..... پر رکھے جائیں اور بالترتیب لہ، مہ، سہ ..... کے متناسب ہوں۔

(یہ دفعہ ۲۵ کی تعمیمی صورت ہے اور اس دفعہ کے نتائج کے متواتر استعمال سے ثابت ہوسکتی ہے۔)

۷۔ ایک منحرف پترے کا مرکزِ ثقل معلوم کرو۔

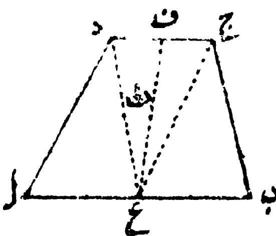
فرض کرو کہ ا ب ج د ایک منحرف ہے جس کے اضلاع ا ب اور ج د متوازی ہیں اور بالترتیب ۲ ا، ۲ ب کے مساوی ہیں۔

فرض کرو کہ ا ب اور ج د کے وسطی نقطے بالترتیب ع اور ف ہیں، د ع اور ع ج کو ملاؤ۔ مثلثوں ا د ع، د ع ج اور ب ع ج کے رقبے ان کے قاعدوں ا ع، د ج اور ع ب کے متناسب ہیں یعنی ا، ۲ ب، ا کے متناسب ہیں۔

اب ہر ایک مثلث کی بجائے اس کے وزن کا ایک تہائی اس کے راسوں پر رکھو۔

اس طرح سے ہمیں ج اور د پر (ا + ۲ب)/۳ کے، ا اور ب پر ا/۳ کے اور ع پر (۲ا + ۲ب)/۳ کے متناسب وزن حاصل ہوتے ہیں۔

نیز ج اور د پر کے مساوی وزنوں کی بجائے ج د کے وسطی نقطہ ف پر ۲ا/۳ + ۴ب/۳ کے متناسب وزن لے لو




اور ا ب پر کے مساوی وزنوں کی بجائے ا ب کے وسطی نقطہ ع پر ۲ا/۳ کے متناسب وزن رکھو اس طرح سے ہمیں ف پر ۲ا/۳ + ۴ب/۳ کے اور ع پر ۴ا/۳ + ۲ب/۳ کے متناسب وزن حاصل ہوتے ہیں۔

پس مطلوبہ مرکز ثقل ث خط ع ف پر ایسی جگہ ہے کہ

$$\frac{ع\,ث}{ث\,ف} = \frac{ف \text{ پر کا وزن}}{ع \text{ پر کا وزن}} = \frac{ا_۱ + ۲ب_۱}{۲ا_۱ + ب_۱}$$

۸ — ایک مستوی ذوار بعۃ الاضلاع پتر ے کے راسی نقطوں اور وتروں کے نقطۂ تقاطع کا فاصلہ اسی سطح مستوی میں ایک خط و لا سے بالترتیب $ا_۱$، $ب_۱$، $ج_۱$، $د_۱$ اور $ع_۱$ ہے ثابت کرو کہ مرکز جمود کا فاصلہ اسی خط سے $\frac{۱}{۳}(ا_۱ + ب_۱ + ج_۱ + د_۱ - ع_۱)$ ہے۔

فرض کرو کہ راسی نقطہ ا، ب، ج، د ہیں اور قطروں کا تقاطع ع ہے تب

$$\frac{\triangle\, ا ج د}{\triangle\, ا ج ب} = \frac{د \text{ سے } ا ج \text{ پر عمود}}{ب \text{ سے } ا ج \text{ پر عمود}} = \frac{د ع}{ع ب} = \frac{د_۱ - ع_۱}{ع_۱ - ب_۱}$$

دفعہ ۱۳۷ و ۱۳۸ کی رو سے △ ا ج د کے مرکز ثقل کا فاصلہ و لا سے

$\frac{ا_۱ + ج_۱ + د_۱}{۳}$ ہے اور △ ا ج ب کا فاصلہ $\frac{ا_۱ ج_۱ + ب_۱}{۳}$ ہے۔

اس لئے و لا سے مطلوبہ مرکز ثقل کا فاصلہ

$$= \frac{\triangle\, ا ج د \times \frac{۱}{۳}(ا_۱ + ج_۱ + د_۱) + \triangle\, ا ج ب \times \frac{۱}{۳}(ا_۱ + ب_۱ + ج_۱)}{\triangle\, ا ج د + \triangle\, ا ج ب}$$

$$= \frac{۱}{۳}\,\frac{(د_۱ - ع_۱)(ا_۱ + ج_۱ + د_۱) + (ع_۱ - ب_۱)(ا_۱ + ب_۱ + ج_۱)}{(د_۱ - ع_۱) + (ع_۱ - ب_۱)} = \frac{۱}{۳}(ا_۱ + ب_۱ + ج_۱ + د_۱ - ع_۱)$$

۹ — ایک مستوی ذوار بعۃ الاضلاع ا ب ج د کے رقبہ کا مرکز ثقل ث معلوم کرنے کے لئے ذیل کا عمل ثابت کرو۔ فرض کرو کہ مثلثوں ا ب ج اور ا د ج کے مرکز ثقل ل اور م ہیں اور ل م، ا ج سے ن پر ملتا ہے تب مرکز ثقل ث خط ل م پر ایسے واقع ہوگا کہ م ث = ل ن

۱۰ — ایک مثلثی رقبہ ا ب ج میں ب ج کے متوازی ایک خط مستقیم کھینچنے سے اس کے رقبہ کا ن واں حصہ منقطع کر دیا گیا ہے ثابت کرو کہ باقی ماندہ حصہ کا مرکز ثقل ا میں سے گزرنے والے وسطی خط کو نسبت $ن + \sqrt{ن} - ۲ : ۲(ن + \sqrt{ن} + ۱)$ میں تقسیم

کرتا ہے۔

۱۱۔ کاغذ کے ایک مثلثی پترے کو دو اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے والے خط پر تہ کیا گیا ہے اور اس طرح مثلث کے راس کو اس کے قاعدہ پر لایا گیا ہے ثابت کرو کہ مثلث کے قاعدہ سے اس محل میں کاغذ کے مرکز جمود کا فاصلہ ابتدائی حالت میں مثلثی پترے کے مرکز جمود کے فاصلہ کا تین چوتھائی ہے۔

۱۲۔ ایک یکساں سلاخ دو رسیوں کے ذریعے جو اس کے سروں کے ساتھ بندھی ہیں اور دوسری طرف ایک ثابت نقطہ کے ساتھ بندھی ہیں لٹک رہی ہے۔ ثابت کرو کہ رسیوں کے تناؤ ان کے طولوں کے متناسب ہیں۔

ثابت کرو کہ اگر ایک مثلثی پترے کو اس کے تینوں کونوں کے ساتھ رسیاں باندھ کر ایک کھونٹی سے لٹکایا جائے تو بھی رسیوں کے تناؤ ان کے طولوں کے متناسب ہوں گے۔

۱۳۔ چاند کی کمیت زمین کی کمیت کا ۰۱۳ء گنا ہے۔ اگر زمین کے نصف قطر کو ۴۰۰۰ میل مان لیا جائے اور زمین اور چاند کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کو زمین کے نصف قطر کا ۶۰ گنا فرض کیا جائے تو زمین اور چاند کے مرکز ثقل کا فاصلہ زمین کے مرکز سے معلوم کرو۔ (۳۰۸۰ میل تقریباً)

۱۴۔ بتاؤ کہ ایک مخروط کا راسی زاویہ کیا ہونا چاہیئے کہ اس کی کل سطح (بشمول اس کے مستوی قاعدہ کے) کا مرکز ثقل اس کے حجم کے مرکز ثقل پر منطبق ہو $\left(۲\ \text{جب}^{-1}\ \frac{1}{3}\right)$۔

۱۵۔ ایک ٹھوس قائم مستدیر مخروط کے قاعدہ کو اس طرح چھیلا گیا کہ مجوف حصہ اسی قاعدہ پر ایک قائم مخروط ہے بتاؤ کہ کتنا حصہ چھیلا جائے کہ باقی ماندہ حصہ کا مرکز ثقل مجوف حصہ کے راس پر منطبق ہو۔

(اندرونی مخروط کا ارتفاع = $\frac{1}{3}$ بیرونی مخروط کا ارتفاع)

۱۶۔ بتاؤ کہ ایک ٹھوس یکساں اسطوانہ سے ایک مخروط کس طرح کاٹا جائے جس کا قاعدہ اسطوانہ کے قاعدہ پر منطبق ہو اور باقی ماندہ مجسم کا مرکز ثقل مخروط کے راس پر منطبق ہو۔

[مخروط کا ارتفاع = (۲ - $\sqrt{3}$) گنا اسطوانہ کا ارتفاع]

۱۷- ایک ستدیر پترے میں ایک ایسا مربع سوراخ کیا گیا ہے کہ مربع کا قطر دائرہ کا نصف قطر ہے۔ ثابت کرو کہ باقی ماندہ حصہ کا مرکز ثقل دائرہ کے مرکز سے $\frac{ا}{۸ ط - ۴}$ فاصلہ پر ہے جہاں ا دائرہ کا قطر ہے۔

۱۸- ایک یکساں مثلثی پترے میں سے ایک حصہ جس کا رقبہ پترے کے اندرونی دائرے کے رقبہ کے مساوی ہے کاٹا گیا ہے ثابت کرو کہ باقی ماندہ حصہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ کسی ضلع ا سے

$$\frac{س}{۳ س ا} \times \frac{۲ س^۲ - ۳ ط ا س}{س^۲ - ط س}$$

ہے جہاں س پترے کا رقبہ ہے اور س اس کا نصف محیط ہے۔

۱۹- ایک معلومہ مقدار کا مستدیر سوراخ ایک یکساں مستدیر پترے کے اندر کیا گیا ہے ثابت کرو کہ مرکز ثقل ایک خاص دائرہ کے اندر واقع ہے۔

۲۰- ایک مثلثی پترا ا ب ج ہے جس کا زاویہ ج منفرجہ ہے۔ یہ ایک میز پر ضلع ا ج کے بل کھڑا ہے۔ ثابت کرو کہ کم سے کم وزن جو ب سے لٹکایا جائے اور مثلث کو الٹنے کے لئے کافی ہو

$$\frac{۱}{۳} و \frac{ا^۲ + ب^۲ - ج^۲}{ج^۲ - ا^۲ - ب^۲}$$ ہے جہاں و مثلث کا وزن ہے۔

اگر $ج^۲ > ا^۲ + ۳ ب^۲$ ہے تو نتیجہ کا مطلب بیان کرو۔

۲۱- ایک مخروط کا ارتفاع اس کے قاعدہ کے نصف قطر کا چار گنا ہے اس کو قاعدہ کے محیط پر کے کسی نقطہ سے لٹکایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ حالت سکون میں اس کا قاعدہ اور محور انتصابی سے مساوی المیلان ہونگے۔

۲۲- دو کمیتیں م اور ن کے محل ا اور ب ہیں اور ان کا مرکز ثقل ث ہے، اگر ق کوئی اور نقطہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$م \times ا ق^۲ + ن \times ب ق^۲ = م \times ا ث^۲ + ن \times ب ث^۲ + (م + ن) ق ث^۲$$

اسی طرح اگر بہت سی کمیتیں م، ن، ک ..... ہوں اور ان کے محل ا، ب، ج، ...

ہوں اوران کا مرکز ثقل ث ہو، اور ق کوئی اور نقطہ ہو تو

م × ( ق ا^۲ + ن × ب ق^۲ + ک × ج ق^۲ + ....

= م × ( ث ا^۲ + ن × ب ث^۲ + ک × ج ث^۲ + .... + ( م + ن + ک + ..... ) ق ث^۲

۴۳ — ایک ٹھوس قائم مقطوع مخروط ایک کھردری مائل سطح مستوی پر پڑا ہے۔ سطح مائل کے میلان کو بتدریج بڑھایا جاتا ہے اگر مقطوع کی بڑی اور چھوٹی تراشوں کے نصف قطر بالترتیب س اور ر ہوں اور مقطوع مجسم کا ارتفاع ھ ہو تو ثابت کرو کہ بالآخر مقطوع مجسم الٹ جائے گا یا پھسل جائے گا اگر رگڑ کی قدر

≷ ۴س/ھ × (س^۲ + س ر + ر^۲)/(س^۲ + ۲ س ر + ۳ ر^۲)

۴۴ — ایک قائم مخروط کا راسی زاویہ ۲ عہ ہے اس کو ایک سطح مستوی سے جو اس کے محور کے ساتھ زاویہ بہ بناتی ہے کاٹا گیا ہے اس مجسم کو ایک مکمل کھردری سطح مائل پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور خط میلان اعظم پر واقع ہوتا ہے۔ اس محل میں یہ الٹنے کے عین قریب ہے۔ ثابت کرو کہ افق کے ساتھ سطح مائل کے میلان کا ماس ان میں سے ایک قیمت رکھتا ہے

(۴ جب ۲ عہ ± جب ۲ بہ)/(جم ۲ عہ − جم ۲ بہ)

۴۵ — ایک پتلے اسطوانہ نما ظرف کے اندر جس کا وزن و، تراش س ہے اور جس کے مرکز ثقل کا فاصلہ اس کے قاعدہ سے ب ہے کثافت ک کا مائع ڈالا گیا ہے۔ جب کل کے مرکز ثقل کا ارتفاع کم سے کم ہو تو ثابت کرو کہ مائع کا وزن

√(و (و + ۲ س ب ک)) − و ہوگا۔

۱۴۳ — دفعہ ۱۳۸ کے ضوابط کی مدد سے معلومہ شکل کی کسی قوس یا رقبہ یا مجسم کا مرکز ثقل معلوم کیا جا سکتا ہے۔

**کسی قوس کا مرکز ثقل** — اگر ایک مستوی قوس پر کوئی نقطہ ت (لا، ما) ہو

اور ن ف چھوٹا قوسی جزو سف س ہو جس کی کثافت نقطہ ن پر ک ہو اور اس لئے جس کا وزن ک سف س کے متناسب ہو تو مذکورہ بالا ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\bar{لا} = \frac{\sum (ک\ سف\ س \times لا)}{\sum ک\ سف\ س} = \frac{\int ک\ لا\ فر\ س}{\int ک\ فر\ س}$$

جب کہ اس میں تکملات کی انتہائیں قوس زیر بحث کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک لی جائیں۔

اسی طرح $\bar{ما} = \frac{\int ک\ ما\ فر\ س}{\int ک\ فر\ س}$

نیز $\frac{فر\ س}{فر\ لا} = \sqrt{1 + \left(\frac{فر\ ما}{فر\ لا}\right)^2}$ اور $\frac{فر\ ما}{فر\ لا}$ کی قیمتیں منحنی کی مساوات سے معلوم ہو سکتی ہیں۔

اگر قوس یکساں کثافت کی ہو جیسا کہ عام طور پر ہوتا ہے تو ک مستقل رہیگا اور اوپر اور نیچے سے کٹ جائے گا۔ اگر قوس کی کثافت متغیر ہو تو ک کی قیمت لا، ما کی رقوم میں معلوم ہونی چاہیئے۔

اسی قسم کے ضوابط تین ابعاد کے منحنی پر صادق آتے ہیں لیکن اب

$$\frac{فر\ س}{فر\ لا} = \sqrt{1 + \left(\frac{فر\ ما}{فر\ لا}\right)^2 + \left(\frac{فر\ ی}{فر\ لا}\right)^2}$$

اگر قوس کی مساوات قطبی محددوں میں معلوم ہو

یعنی اس کی مساوات ر = ف (طہ) ہو تو

$$سف\ س = \sqrt{سف\ ر^2 + ر^2\ سف\ طہ^2}$$

اور ان ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int \text{ک رجم ط فرس}}{\int \text{ک فرس}} \quad \text{اور} \quad \bar{\text{ما}} = \frac{\int \text{ک رجب ط فرس}}{\int \text{ک فرس}}$$

اسی قسم کے ضوابط تین ابعاد کے لئے بھی حاصل ہو سکتے ہیں۔

۱۴۴ - مشق ۱ - مکافی $\text{ما}^۲ = ۴\,\text{و لا}$ کی اس قوس کا مرکز ثقل معلوم کرو جو راس اور راس سے افقی فاصلہ $\text{و ت}^۲$ پر کے معین کے درمیان منقطع ہوتی ہے۔

$$\text{یہاں} \quad \text{ما} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۲\,\text{و}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} = \sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲} = \sqrt{۱ + \frac{۴\,\text{و}^۲}{\text{ما}^۲}} = \sqrt{\frac{\text{لا} + \text{و}}{\text{لا}}}$$

$$\therefore \quad \bar{\text{لا}} = \frac{\int_{\text{ب}}^{\text{و ت}^۲} \text{لا فرس}}{\int_{\text{ب}}^{\text{و ت}^۲} \text{فرس}} = \frac{\int_{\text{ب}}^{\text{و ت}^۲} \sqrt{\text{لا}(\text{لا} + \text{و})}\ \text{فرلا}}{\int_{\text{ب}}^{\text{و ت}^۲} \sqrt{\frac{\text{لا} + \text{و}}{\text{لا}}}\ \text{فرلا}}$$

$$\text{اور} \quad \bar{\text{ما}} = \frac{\int_{\text{ب}}^{\text{و ت}^۲} \text{فرس} \times \text{ما}}{\int_{\text{ب}}^{\text{و ت}^۲} \text{فرس}} = ۲\sqrt{\text{و}} \times \frac{\int_{\text{ب}}^{\text{و ت}^۲} \sqrt{\text{لا} + \text{و}}\ \text{فرلا}}{\int_{\text{ب}}^{\text{و ت}^۲} \sqrt{\frac{\text{لا} + \text{و}}{\text{لا}}}\ \text{فرلا}}$$

$$\text{اب} \int_{\text{ب}}^{\text{و ت}^۲} \sqrt{\text{لا}(\text{لا} + \text{و})}\ \text{لا فرلا} = \int_{\text{ب}}^{\text{و ت}^۲} \sqrt{\left(\text{لا} + \frac{\text{و}}{۲}\right)^۲ - \frac{\text{و}^۲}{۴}}\ \text{فرلا}$$

$$= \left[\frac{۱}{۲}\left(\text{لا} + \frac{\text{و}}{۲}\right)\sqrt{\text{لا}^۲ + \text{و لا}} - \frac{\text{و}^۲}{۸}\,\text{لوک}\left(\text{لا} + \frac{\text{و}}{۲} + \sqrt{\text{لا}^۲ + \text{و لا}}\right)\right]_{\text{ب}}^{\text{و ت}^۲}$$

$$= \frac{\text{و}^۲}{۴}\left[\text{ت}(۲\,\text{ت}^۲ + ۱)\sqrt{۱ + \text{ت}^۲} - \text{لوک}\left(\text{ت} + \sqrt{۱ + \text{ت}^۲}\right)\right]$$

نیز $\int_{ب}^{اُت^2} \sqrt{\frac{لا+اُ}{لا}}\ فرلا = \int_{ب}^{ت} ۲اُ\sqrt{۱+و^2}\ فرو$

ادراج $لا = اُو^2$ کی رو سے

$$= اُ\left[ت\sqrt{۱+ت^2} + لوک\left(ت+\sqrt{۱+ت^2}\right)\right]$$

اور $\int_{ب}^{اُت^2} \sqrt{لا+اُ}\ فرلا = \left[\frac{۲}{۳}(لا+اُ)^{\frac{۳}{۲}}\right]_{ب}^{اُت^2}$

$$= \frac{۲}{۳} اُ^{\frac{۳}{۲}} \left[(۱+ت^2)^{\frac{۳}{۲}} - ۱\right]$$

یہ قیمتیں مندرج کرنے سے

$$\bar{لا} = \frac{اُ}{۴} \times \frac{ت(۱+۲ت^2)\sqrt{۱+ت^2} - لوک\left[ت+\sqrt{۱+ت^2}\right]}{ت\sqrt{۱+ت^2} + لوک\left[ت+\sqrt{۱+ت^2}\right]}$$

$$\text{اور}\ \bar{ما} = \frac{۴اُ}{۳} \times \frac{(۱+ت^2)^{\frac{۳}{۲}} - ۱}{ت\sqrt{۱+ت^2} + لوک\left[ت+\sqrt{۱+ت^2}\right]}$$

**مشق ۲** — زنجیرہ $ما = \frac{ج}{۲}\left(و^{\frac{لا}{ج}} + و^{-\frac{لا}{ج}}\right)$ کی اس قوس کا مرکز ثقل معلوم کرو جو مبدا اور کسی نقطہ (لا ، ما) کے درمیان ہو۔

یہاں $\left(\frac{فرس}{فرلا}\right)^2 = ۱ + \left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^2 = ۱ + \frac{۱}{۴}\left(و^{\frac{لا}{ج}} - و^{-\frac{لا}{ج}}\right)^2 = \frac{۱}{۴}\left(و^{\frac{لا}{ج}} + و^{-\frac{لا}{ج}}\right)^2$

پس $\frac{فرس}{فرلا} = \frac{۱}{۲}\left(و^{\frac{لا}{ج}} + و^{-\frac{لا}{ج}}\right) = جمز\frac{لا}{ج}$ اور $س = ج\ جبز\frac{لا}{ج}$

$$\therefore\ \bar{لا} = \frac{\int_{ب}^{لا} لا\ فرس}{\int_{ب}^{لا} فرس} = \frac{\int_{ب}^{لا} لا\ جمز\frac{لا}{ج}\ فرلا}{\int_{ب}^{لا} جمز\frac{لا}{ج}\ فرلا}$$

$$= \frac{\text{ج لا جبز}\frac{\text{لا}}{\text{ج}} - \text{ج}^{۲}\,\text{جمز}\frac{\text{لا}}{\text{ج}} + \text{ج}^{۲}}{\text{ج جبز}\frac{\text{لا}}{\text{ج}}} = \text{لا} - \frac{\text{ج}\,(\text{ما} - \text{ج})}{\text{س}}$$

$$\text{نیز}\ \overline{\text{ما}} = \frac{\int \text{ما فرس}}{\int \text{فرس}} = \frac{\int_{\text{ب}}^{\text{لا}} \text{ج جمز}^{۲}\frac{\text{لا}}{\text{ج}}\ \text{فرلا}}{\int_{\text{ب}}^{\text{لا}} \text{جمز}\frac{\text{لا}}{\text{ج}}\ \text{فرلا}}$$

$$= \frac{\text{ج}}{۲} \times \frac{\int_{\text{ب}}^{\text{لا}} \left(۱ + \text{جمز}\frac{۲\text{لا}}{\text{ج}}\right)\text{فرلا}}{\int_{\text{ب}}^{\text{لا}} \text{جمز}\frac{\text{لا}}{\text{ج}}\ \text{فرلا}} = \frac{\text{لا} + \frac{\text{ج}}{۲}\,\text{جبز}\frac{۲\text{لا}}{\text{ج}}}{۲\,\text{جبز}\frac{\text{لا}}{\text{ج}}}$$

$$= \frac{\text{لا} + \text{ج جبز}\frac{\text{لا}}{\text{ج}}\ \text{جمز}\frac{\text{لا}}{\text{ج}}}{۲\,\text{جبز}\frac{\text{لا}}{\text{ج}}} = \frac{\text{ما}}{۲} + \frac{\text{ج لا}}{۲\,\text{س}}$$

## مثالیں

ذیل کی قوسوں کے مرکز ثقلوں کے مقام معلوم کرو۔

۱ — خط تدویر $\text{لا} = \text{د}\,(\text{ط} + \text{جب ط})$، $\text{ما} = \text{د}\,(۱ - \text{جم ط})$ کی وہ قوس جو مثبت ربع میں ہے۔

$$\left[\overline{\text{لا}} = \left(\pi - \frac{۴}{\text{س}}\right)\text{د}،\ \ \overline{\text{ما}} = \frac{۲\text{د}}{۳}\right]$$

۲ — $\text{لا}^{\frac{۲}{۳}} + \text{ما}^{\frac{۲}{۳}} = \text{د}^{\frac{۲}{۳}}$ دو قرنوں کے درمیان $\left[\overline{\text{لا}} = \overline{\text{ما}} = \frac{۲\text{د}}{۵}\right]$

۳ — مرغولہ $\text{لا} = \text{د جم ط}$، $\text{ما} = \text{د جب ط}$، $\text{ی} = \text{ب ط}$ کی وہ قوس جو مبدا اور نقطہ $\text{ط} = \text{عہ}$ کے درمیان ہے۔

$$\left[\overline{\text{لا}} = \frac{\text{د جب عہ}}{\text{عہ}}،\ \ \overline{\text{ما}} = \frac{\text{د}\,(۱ - \text{جم عہ})}{\text{عہ}}،\ \ \overline{\text{ی}} = \frac{۱}{۲}\,\text{ب عہ}\right]$$

۴ — اگر ایک مکمل مستدیر قوس کی کثافت، قوس پر کے ایک ثابت نقطہ د سے فاصلہ کے مربع کے متناسب بدلے تو ثابت کرو کہ اس کا مرکز ثقل د میں سے گزرنے والے

قطر کو نسبت ۳ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے۔

۵ ۔ ایک کاگ نکالنے کے پیچ کا طول، نصف قطر اور گھائی معلوم ہیں اور پیچ کی چوڑی کے کسی نقطہ پر چوڑی کی موٹائی ب + ن ہی کے مساوی ہے (جہاں ہی اس نقطہ کا پیچ کے ایک سرے سے محور کے متوازی فاصلہ ہے) تار کے مرکز ثقل کا مقام معلوم کرو۔

**۱۴۵ ۔ کسی مستوی رقبہ کا مرکز ثقل** ۔ کارٹیزی محددوں میں رقبہ کا جزو مف لا مف ما ہوتا ہے اور اگر اس کی کثافت ک ہو تو اس جزو کا وزن ک × مف لا مف ما کے متناسب ہوگا۔ اس لئے اساسی ضابطے ہو جاتے ہیں

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\sum \text{ک مف لا مف ما} \times \text{لا}}{\sum \text{ک مف لا مف ما}} = \frac{\iint \text{ک لا فرلا فرما}}{\iint \text{ک فرلا فرما}}$$

اور

$$\bar{\text{ما}} = \frac{\iint \text{ک ما فرلا فرما}}{\iint \text{ک فرلا فرما}}$$

جہاں انتہائیں اس طرح منتخب کی گئی ہیں کہ ان کے اندر زیر غور پورا رقبہ آجاتا ہے۔

اگر رقبہ یکساں کثافت کا ہو اور لا فاصلہ کا معین، منحنی کو جن نقطوں پر قطع کرتا ہے اُن کے معین $\text{ما}_1$ اور $\text{ما}_2$ ہوں تو ہم رقبہ کے جزو کو $(\text{ما}_1 - \text{ما}_2)$ مف لا کے مساوی لے سکتے ہیں اور انتہا میں جبکہ مف لا بہت چھوٹا ہو تو اس جزو کے مرکز ثقل کے محدد لا اور $\frac{\text{ما}_1 + \text{ما}_2}{2}$ ہونگے۔

(۱۴۷) اب اساسی ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\sum (\text{ما}_1 - \text{ما}_2)\,\text{مف لا} \times \text{لا}}{\sum (\text{ما}_1 - \text{ما}_2)\,\text{مف لا}} = \frac{\int \text{لا}\,(\text{ما}_1 - \text{ما}_2)\,\text{فرلا}}{\int (\text{ما}_1 - \text{ما}_2)\,\text{فرلا}}$$

$$\text{اور } \bar{\text{آ}} = \frac{\sum (\text{ما}_1 - \text{ما}_2)\ \text{مف لا} \times \frac{\text{ما}_1 + \text{ما}_2}{2}}{\sum (\text{ما}_1 - \text{ما}_2)\ \text{مف لا}} = \frac{1}{2} \times \frac{\int (\text{ما}_1^2 - \text{ما}_2^2)\ \text{فرلا}}{\int (\text{ما}_1 - \text{ما}_2)\ \text{فرلا}}$$

$\text{ما}_1$ اور $\text{ما}_2$ کی قیمتیں منحنی کی مساوات سے معلوم ہوتی ہیں اور لا کی انتہائیں ایسی لینی چاہئیں کہ سب رقبہ شامل ہو جائے۔

اگر منحنی قطبی محددوں میں دیا ہوا ہو اور اس کی مساوات بلحاظ قطب د کے ر = ف (طہ) ہو اور اگر ف اور ق ایسے نقطے ہوں جن کے سمتی زاویے طہ اور طہ + مف طہ ہوں تو رقبہ کا قطبی جزو $\frac{1}{2}$ ر$^2$ مف طہ ہوگا اور اس کا مرکز ثقل جبکہ مف طہ بہت چھوٹا ہو وہ نقطہ ہوگا جس کے قطبی محدد $\frac{2}{3}$ ر اور طہ ہیں اور جس کے کارٹیزی محدد $\frac{2}{3}$ ر جم طہ اور $\frac{2}{3}$ ر جب طہ ہیں۔

$$\therefore\ \bar{\text{لا}} = \frac{\sum \frac{1}{2}\text{ر}^2\ \text{مف طہ} \times \frac{2}{3}\text{ر جم طہ}}{\sum \frac{1}{2}\text{ر}^2\ \text{مف طہ}} = \frac{2}{3}\,\frac{\int \text{ر}^3\ \text{جم طہ فرطہ}}{\int \text{ر}^2\ \text{فرطہ}}$$

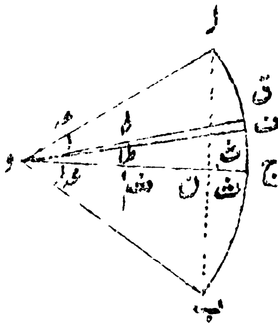
جہاں ر = ف (طہ) نیز اسی طرح کی ایک مساوات $\bar{\text{ما}}$ کے لئے ہے جس سے قطاعی رقبہ ا د ب کا مرکز ثقل معلوم ہوتا ہے۔ طہ کی انتہائیں ا اور ب کے سمتی زاویے ہونی چاہئیں۔

اگر یہ قطاعی رقبہ متغیر کثافت یا موٹائی کا ہو تو ہمیں رقبہ کے جزو ر مف طہ مف ر کو کثافت ک کا لینا چاہیئے اور تب قطاعی رقبہ ا د ب کے لئے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\sum \text{ر مف طہ} \times \text{مف رک} \times \text{ر جم طہ}}{\sum \text{ر مف طہ} \times \text{مف ر} \times \text{ک} \times \text{طہ}} = \frac{\iint \text{ک ر}^2\ \text{جم طہ فرطہ فرر}}{\iint \text{ک ر فرطہ فرر}}$$

اور اسی طرح $\bar{\text{ما}}$ کے لئے ک کی قیمت ر اور طہ کے تفاعل کے طور پر دی ہوئی ہوگی۔ ر کے لئے تکملہ کی انتہائیں صفر سے ف (طہ) تک ہونی چاہئیں اور طہ کی انتہائیں ا اور ب کے سمتی زاویے ہونی چاہئیں

۱۴۲ــ مشق ۱ــ ایک دائرہ کی قوس، قطاع اور قطعہ کا مرکز ثقل معلوم کرنا۔




فرض کرو کہ قوس ا ج ب کے
جس کا نصف قطر $\text{ا}_1$ ہے، مرکز و پر زاویہ ۲ عہ بنتا ہے
اور ج قوس کا وسطی نقطہ ہے۔
و ج کو لا کا محور مانو، تب قوس
کے لئے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int \text{قرس} \times \text{لا}}{\int \text{قرس}} = \frac{\int_{-\text{عہ}}^{+\text{عہ}} \text{ا}_1 \text{قرط} \times \text{ا}_1 \text{جم ط}}{\int_{-\text{عہ}}^{+\text{عہ}} \text{ا}_1 \text{قرط}} = \text{ا}_1 \times \frac{\text{جب عہ}}{\text{عہ}}$$

قطاع ا و ب کے لئے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int \frac{1}{2} \text{ا}_1^2 \text{قرط} \times \frac{2}{3} \text{ا}_1 \text{جم ط}}{\int \frac{1}{2} \text{ا}_1^2 \text{قرط}} = \frac{2}{3} \text{ا}_1 \frac{\text{جب عہ}}{\text{عہ}} = \text{و ث}_1$$

فرض کرو کہ $\text{ث}_2$ مثلث ا و ب کا مرکز ثقل ہے۔ اس لئے

$$\text{و ث}_2 = \frac{2}{3} \text{و ن} = \frac{2}{3} \text{ا}_1 \text{جم عہ}$$

تب قطعہ ا ن ب ج کا وزن جو اس کے مرکز ثقل ث پر عمل کرتا ہے اور مثلث ا و ب کا وزن دونوں $\text{ث}_1$ کے گرد متوازن ہیں۔

$$\therefore \frac{2}{3} \frac{\text{ا}_1 \text{جب عہ}}{\text{عہ}} = \text{و ث}_1 = \frac{\triangle \text{ا و ب} \times \text{و ث}_2 + [\text{قطاع ا و ب} - \triangle \text{ا و ب}] \times \text{و ث}}{\text{قطاع ا و ب}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \text{ا}_1^2 \text{جب ۲ عہ} \times \frac{2}{3} \text{ا}_1 \text{جم عہ} + [\frac{1}{2} \text{ا}_1^2 \times \text{۲ عہ} - \frac{1}{2} \text{ا}_1^2 \text{جب ۲ عہ}] \text{و ث}}{\frac{1}{2} \text{ا}_1^2 \times \text{۲ عہ}}$$

اس سے حاصل ہوتا ہے $\text{و ث} = \frac{2 \text{ا}_1}{3} \times \frac{\text{جب}^3 \text{عہ}}{\text{عہ} - \text{جب عہ جم عہ}}$

**نتیجہ صریح** ۔ $\text{ع} = \frac{\pi}{\text{۲}}$ رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ نصف دائرہ کی قوس کا مرکز ثقل مرکز سے $\frac{\text{۲ا}}{\pi}$ فاصلہ پر ہے اور نصف دائری رقبہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے $\frac{\text{۴ا}}{\text{۳}\pi}$ ہے۔

**مشق ۲** ۔ خط تدویر لا = ا(ط + جب ط)

ما = ا(۱ − جم ط) اور اس کے قاعدہ اور ما محور سے گھرے ہوئے رقبہ کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

ظاہر ہے کہ

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int \text{لا فرما} \times \frac{\text{لا}}{\text{۲}}}{\int \text{لا فرما}} = \frac{\text{ا}}{\text{۲}} \times \frac{\int_0^{\pi} (\text{ط} + \text{جب ط})^2\, \text{جب ط فرط}}{\int_0^{\pi} (\text{ط} + \text{جب ط})\, \text{جب ط} \times \text{فرط}}$$

$$= \frac{\text{ا}}{\text{۲}} \; \frac{\int_0^{\pi} \left\{ \text{ط}^2 \text{جب ط} + \text{ط}(\text{۱} - \text{جم ۲ط}) + \frac{\text{۱}}{\text{۴}} (\text{۳ جب ط} - \text{جب ۳ط}) \right\} \text{فرط}}{\int_0^{\pi} \left( \text{ط جب ط} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{جم ۲ط} \right) \text{فرط}}$$

اب تکمل بالحصص کے توسیع شدہ قواعد کے مطابق

$$\int \text{ط}^2 \text{جب ط فرط} = -\text{ط}^2 \text{جم ط} + \text{۲ ط جب ط} + \text{۲ جم ط}$$

$$\int \text{ط جم ۲ط فرط} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{ط جب ۲ط} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}} \text{جم ۲ط}$$

$$\int \text{ط جب ط فرط} = -\text{ط جم ط} + \text{جب ط}$$

$$\int \text{ط جب ۲ط فرط} = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{ط جم ۲ط} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}} \text{جب ۲ط}$$

$$\bar{لا} = \frac{ا}{۲} \times \frac{\left[ ط^۲ \left( \frac{۱}{۲} - جم ط \right) + ط \left( ۲ جب ط - \frac{۱}{۲} جب ۲ ط \right) + \frac{۵}{۴} جم ط - \frac{۱}{۴} جم ۲ ط + \frac{۱}{۱۲} جم ۳ ط \right]_۰^{\pi}}{\left[ ط \left( \frac{۱}{۲} - جم ط \right) + جب ط - \frac{۱}{۴} جب ۲ ط \right]_۰^{\pi}}$$

$$= \frac{ا}{۲} \times \frac{\frac{\pi^۲ ۳}{۲} - \frac{۸}{۳}}{\frac{۳\pi}{۲}} = \frac{۹ \pi^۲ - ۱۶}{۱۸ \pi} \times ا$$

$$نیز\ \bar{ما} = \frac{\int لا\ فرما \times ما}{\int لا\ فرما} = ا \frac{\int_۰^{\pi} (ط + جب ط)\ جب ط\ (۱ - جم ط)\ فرط}{\int_۰^{\pi} (ط + جب ط)\ جب ط\ فرط}$$

$$= ا \times \frac{\int_۰^{\pi} \left[ ط \left( جب ط - \frac{۱}{۲} جب ۲ ط \right) + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} جم ۲ ط - جب^۲ ط\ جم ط \right] فرط}{\int_۰^{\pi} \left[ ط\ جب ط + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} جم ۲ ط \right] فرط}$$

$$= ا \times \frac{\left[ ط \left( \frac{۱}{۴} جم ۲ ط + \frac{۱}{۲} - جم ط \right) + جب ط - \frac{۳}{۸} جب ۲ ط - \frac{جب^۳ ط}{۳} \right]_۰^{\pi}}{\left[ ط \left( \frac{۱}{۲} - جم ط \right) + جب ط - \frac{۱}{۴} جب ۲ ط \right]_۰^{\pi}}$$

$$= \frac{۷ ا}{۶}$$

**مشق ۳۔** منحنی $ر = ا\ جم ۳ ط$ کے اُس حلقہ کا مرکزِ ثقل معلوم کرو جس کے اندر ابتدائی خط ہے۔ ط کی وہ قیمتیں جن سے یہ حلقہ حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{\pi}{۶}-$ سے $\frac{\pi}{۶}$ تک ہیں۔

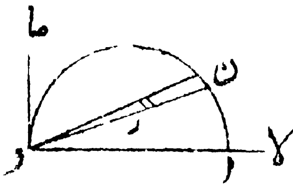
$$اس\ لئے\ \bar{لا} = \frac{\int \frac{۱}{۲} ر^۲ فرط \times \frac{۲}{۳} ر\ جم ط}{\int \frac{۱}{۲} ر^۲ فرط}$$ انتہاؤں $\frac{\pi}{۶}-$ اور $\frac{\pi}{۶}$ کے درمیان

$$= \frac{۲ ا}{۳} \frac{\int_{-\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۶}} جم^۳ ۳ ط \times جم ط\ فرط}{\int_{-\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۶}} جم^۲ ۳ ط\ فرط} = \frac{ا}{۳} \frac{\int_{-\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۶}} (۳ جم ۳ ط + جم ۹ ط)\ جم ط\ فرط}{\int_{-\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۶}} (۱ + جم ۶ ط)\ فرط}$$

$$= \frac{\text{ا}}{\text{٢}} \times \frac{\int_{-\frac{\pi}{\text{٤}}}^{\frac{\pi}{\text{٤}}} \left[\text{٣جم}^{\text{٢}}\text{ط} + \text{٣جم}^{\text{٤}}\text{ط} + \text{جم}^{\text{٨}}\text{ط} + \text{جم}^{\text{١٠}}\text{ط}\right] \text{فرط}}{\int_{-\frac{\pi}{\text{٤}}}^{\frac{\pi}{\text{٤}}} (\text{١} + \text{جم}^{\text{٦}}\text{ط})\,\text{فرط}} = \frac{\text{١٨١}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٣٨٠}\pi} \times \text{ا}$$

مشق ۴۔ ایک نیم دائری قرص ہے جو قطر و ا سے گھرا ہوا ہے۔ اس کے کسی نقطہ پر کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے اس نقطہ کا فاصلہ و سے۔

اس کے مرکز ثقل کا مقام معلوم کرو۔




یہاں کثافت ک = لہ ر

اس لئے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\iint \text{ر فرط} \times \text{فر} \times \text{لہ ر} \times \text{ر جم ط}}{\iint \text{ر فرط فر} \times \text{لہ ر}} = \frac{\iint \text{ر}^{\text{٣}}\,\text{جم ط فر فرط}}{\iint \text{ر}^{\text{٢}}\,\text{فر فرط}}$$

اور

$$\bar{\text{ما}} = \frac{\iint \text{ر}^{\text{٣}}\,\text{جب ط فرط فر}}{\iint \text{ر}^{\text{٢}}\,\text{فر فرط}}$$

تکملوں کی انتہائیں یہ ہیں ر = ٠ سے ر = ٢ا جم ط جہاں ا نصف قطر ہے اور ط = ٠ سے ط = $\frac{\pi}{\text{٢}}$ تک

$$\therefore\ \bar{\text{لا}} = \frac{\int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \text{جم ط} \left[\frac{\text{ر}^{\text{٤}}}{\text{٤}}\right]_{\text{٠}}^{\text{٢ا جم ط}} \text{فرط}}{\int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \left[\frac{\text{ر}^{\text{٣}}}{\text{٣}}\right]_{\text{٠}}^{\text{٢ا جم ط}} \text{فرط}}$$

$$= \frac{\text{٣ا}}{\text{٢}} \frac{\int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \text{جم}^{\text{٥}}\text{ط فرط}}{\int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \text{جم}^{\text{٣}}\text{ط فرط}} = \frac{\frac{\text{٣ا}}{\text{٢}} \times \frac{\text{٤}}{\text{٥}} \times \frac{\text{٢}}{\text{٣}} \times \text{١}}{\frac{\text{٢}}{\text{٣}} \times \text{١}} = \frac{\text{٦ا}}{\text{٥}}$$

$$\text{نیز } \bar{\text{م}} = \frac{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب ط} \left[\frac{\text{ر}}{۳}\right]^{\text{۲ ا جم ط}} \text{فرط}}{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\text{ر}}{۲}\right]^{\text{۲ ا جم ط}} \text{فرط}} = \frac{۳ \text{ ا}}{۲} \cdot \frac{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{۳}\text{ط جب ط فرط}}{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{۳}\text{ط فرط}} = \frac{۶}{۲۰}\text{ ر ا}$$

# مثالیں

منحنیات ذیل کے رقبوں کے مرکز کمیت معلوم کرو۔

۱۔ مکافی $\text{م}^2 = ۴\text{ ا لا}$ ، محور لا اور معین لا = ھ کے درمیان۔

$$\left[\bar{\text{لا}} = \frac{۳\text{ھ}}{۵} \text{ ، } \bar{\text{م}} = \frac{۳}{۴}\sqrt{\text{ا ھ}}\right]$$

۲۔ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{م}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کا وہ حصہ جو مثبت ربع میں واقع ہے۔

$$\left(\frac{\bar{\text{لا}}}{\text{ا}} = \frac{\bar{\text{م}}}{\text{ب}} = \frac{۴}{۳\pi}\right)$$

۳۔ مکافی $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\text{م}}{\text{ب}}\right)^{\frac{1}{2}} = ۱$ منحنی اور محوروں کے درمیان۔

$$\left(\frac{\bar{\text{لا}}}{\text{ا}} = \frac{\bar{\text{م}}}{\text{ب}} = \frac{۱}{۵}\right)$$

۴۔ $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\text{م}}{\text{ب}}\right)^{\frac{2}{3}} = ۱$ کا وہ حصہ جو مثبت ربع میں واقع ہے۔

$$\left(\frac{\bar{\text{لا}}}{\text{ا}} = \frac{\bar{\text{م}}}{\text{ب}} = \frac{۲۵۶}{۳۱۵\pi}\right)$$

۵ — م = جب لا ، لا = ۰ ، لا = $\pi$ کے درمیان۔

$$\left[\bar{\text{لا}} = \frac{\pi}{۲} \text{ ، } \bar{\text{م}} = \frac{\pi}{۸}\right]$$

۶ — ا $\text{م}^2 = \text{لا}^3$ ، مبدا اور لا = ب کے درمیان۔

[ لاَ = $\frac{۵ب}{۷}$ ]

۷ — منحنی ما$^{۲}$ (۲ا − لا) = لا$^{۳}$ اور اس کے متقارب کے درمیان۔

[ لاَ = $\frac{۵ا}{۳}$ ]

۸ — منحنی ما$^{۲}$ (ا + لا) = لا$^{۲}$ (ا − لا) کا ایک حلقہ۔

[ لاَ = $\frac{ا}{۳} \times \frac{۳\pi - ۸}{۴ - \pi}$ ]

۹ — خط صنوبری ر = ا(۱ + جم ط)، [ لاَ = $\frac{۵ا}{۶}$ ]

۱۰ — ر = ا جم ۲ط کا ایک حلقہ

[ لاَ = $\frac{۱۲۸\sqrt{۲}}{۱۰۵} \times \frac{ا}{\pi}$ ]

۱۱ — برنولی کے اٹیرن ر$^{۲}$ = ا$^{۲}$ جم ۲ط کا ایک حلقہ۔

[ لاَ = $\frac{\pi ا \sqrt{۲}}{۸}$ ]

۱۲ — ر = ا جم ن ط کا ایک حلقہ۔

[ لاَ = $\frac{۱۶ ا ن^{۲} \text{ جم } \frac{\pi}{۲ن}}{\pi (۹ن^{۲} - ۱)(ن^{۲} - ۱)}$ ]

۱۳ — $(\frac{لا}{ا})^{ن} + (\frac{ما}{ب})^{ن} = ۱$ کا وہ حصہ جو محوروں کے مثبت ربع میں ہے۔

[ $\frac{لاَ}{ا} = \frac{ماَ}{ب} = \frac{۲}{۳} \frac{\{جا(\frac{۲}{ن})\}^{۲}}{جا(\frac{۱}{ن})\, جا(\frac{۳}{ن})}$ ]

ذیل کے منحنیوں کے درمیان جو رقبے گھر جاتے ہیں اُن کے مرکز کمیت کے مقام معلوم کرو۔

۱۴ — ما$^{۲}$ = ا لا اور لا$^{۲}$ = ب ما

[ لاَ = $\frac{۹}{۲۰}$ ا$^{\frac{۱}{۳}}$ ب$^{\frac{۲}{۳}}$، ماَ = $\frac{۹}{۲۰}$ ا$^{\frac{۲}{۳}}$ ب$^{\frac{۱}{۳}}$ ]

۱۵ — ما$^{۲}$ = ا لا، ما$^{۲}$ = ۲ا لا − لا$^{۲}$ محور لا کی مثبت جانب میں۔

$$\left[ \bar{\text{لا}} = \frac{\text{۵ا}}{\text{۱۵}\pi - \text{۴۴}} ، \bar{\text{ما}} = \frac{\text{ا}}{\text{۳}\pi - \text{۸}} \right]$$

۱۶ــ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - \text{۲ا لا} = ۰$ اور $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - \text{۲ب لا} = ۰$ محور لا کے مثبت میں حصہ ۔

$$\left[ \bar{\text{لا}} = \frac{\text{ا}^2 + \text{اب} + \text{ب}^2}{\text{ا} + \text{ب}} ، \bar{\text{ما}} = \frac{\text{۴}}{\text{۳}} \frac{\text{ا}^2 + \text{اب} + \text{ب}^2}{\pi (\text{ا} + \text{ب})} \right]$$

۱۷ــ $\text{ما}^2 = \text{۴ ا لا}$ ، $\text{ما} = \text{م لا}$

$$\left[ \bar{\text{لا}} = \frac{\text{۸ا}}{\text{۵م}^2} ، \bar{\text{ما}} = \frac{\text{۲ا}}{\text{م}} \right]$$

۱۸ــ $\text{ما}^2 = \text{۴ ا لا}$ ، $\text{ما}^2 = \text{۴ب لا}$ ، $\text{لا}^2 = \text{۴ج ما}$ اور $\text{لا}^2 = \text{۴د ما}$

$$\left[ \bar{\text{لا}} = \frac{\text{۹}}{\text{۵}} \times \frac{(\text{ب}^{\frac{5}{3}} - \text{ا}^{\frac{5}{3}})(\text{د}^{\frac{4}{3}} - \text{ج}^{\frac{4}{3}})}{(\text{ب} - \text{ا})(\text{د} - \text{ج})} \right]$$

۱۹ــ ایک مستدیر پترے کے کسی نقطہ پر کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے اس کے محیط پر کے ایک ثابت نقطہ و سے اس نقطہ کے فاصلہ کی ن ویں قوت۔ ثابت کرو کہ پترے کا مرکز ثقل و میں سے گزرنے والے قطر کو نسبت ن + ۲ : ۲ میں تقسیم کرتا ہے۔

۲۰ــ نصف قطر ا کا ایک مستدیر قرص ہے جس کے کسی نقطہ پر کثافت مرکز سے فاصلہ کے متناسب ہوتی ہے اس میں سے ایک دائرہ کاٹ لیا گیا ہے جس کا قطر ب ہے اور جو قرص کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ قرص کے مرکز میں سے باقی حصہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ $\frac{\text{۶ ب}^4}{\text{۱۵}\pi \text{ا}^3 - \text{۱۰ ب}^3}$ ہے

۲۱ــ ایک مستدیر قرص ہے جس کے کسی نقطہ پر کثافت قرص کی سطح مستوی میں کسی بیرونی نقطہ و سے اس نقطہ کے فاصلہ کی چوتھی قوت کے بالعکس متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا مرکز جمود قرص کے محیط کے لحاظ سے نقطہ و کا مقلوب نقطہ ہے۔

۲۲ــ خط صنوبری ر = ا (۱ + جم طہ) کے کسی نقطہ پر کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے نقطہ قرن سے نقطۂ مذکور کے فاصلہ کی ن ویں قوت۔ بتاؤ کہ مرکز ثقل کا

فاصلہ قرن سے $\frac{(ن+۲)(۲ن+۵)}{(ن+۳)(ن+۴)} \times و$ ہے۔

۲۳۔ ایک منحنی کی شکل ناقص کا ایک ربع ا و ب ہے اس کے کسی نقطہ پر اس کی موٹائی و ا اور و ب سے نقطۂ مذکور کے فاصلوں کے حاصل ضرب کے متناسب ہے اس کا مرکز ثقل معلوم کرو۔
$$\left[\frac{\bar{لا}}{ا} = \frac{\bar{ما}}{ب} = \frac{۸}{۱۵}\right]$$

۲۴۔ ایک پتر امنحنی $\left(\frac{لا}{ا}\right)^{\frac{۲}{۳}} + \left(\frac{ما}{ب}\right)^{\frac{۲}{۳}} = ۱$ کے ایک ربع کی شکل کا ہے۔ اس کے مرکز ثقل کے محدد معلوم کرو جب کہ کسی نقطہ پر کثافت ک = م لاما
$$\left[\frac{\bar{لا}}{ا} = \frac{\bar{ما}}{ب} = \frac{۱۲۸}{۴۲۹}\right]$$

۲۵۔ ناقص کا ایک وتر اس میں سے مستقل رقبہ کا ایک قطعہ کاٹ لیتا ہے۔ ثابت کرو کہ قطعہ کے مرکز ثقل کا طریق ایک متشابہ / متشابہ طور پر رکھا ہوا اور ہم مرکز قطع ناقص ہے۔

۲۶۔ ایک مکافی سے مساوی رقبہ کے جتنے قطعے کاٹے جا سکتے ہیں اُن کے مرکز ثقلوں کا طریق ایک مساوی قطع مکافی ہوتا ہے۔

۲۷۔ اگر اٹیرن ر۲ = ا۲ جم ۲طہ کی کسی قوس ف ق کا مرکز ثقل ث ہے تو ثابت کرو کہ و ث زاویہ ف و ق کی تنصیف کرتا ہے جہاں و محددوں کا قطب ہے۔

۲۸۔ ایک منحنی ایسا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کے جو دو سمتی نیم قطر کھینچے جا سکتے ہیں اور اُن قطروں کے اندر اس کا جو رقبہ منقطع ہوتا ہے اس کا مرکز ثقل ہمیشہ ان سمتی نیم قطروں کے درمیانی زاویہ کے خطِ ناصف پر واقع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ منحنی کوئی دائرہ ہوگا یا برنولی کا اٹیرن ہوگا

زاویہ ہہ کی تمام قیمتوں کے لئے ہمیں معلوم ہے کہ مس $\frac{ہہ}{۲} = \frac{\int^{ہہ} فرس ر جب طہ}{\int^{ہہ} فرس ر جم طہ}$

اس لئے اگر $\frac{رفرس}{فرطہ} = ف(طہ)$ تو

آ ب ف (ط) جب (ط) فرط = س آ ب ف (ط) جم ط فرط

ب کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

ف (ب) جب ب = س ف (ب) جم ب + ۱/۲ قط^۲ آ ب ف (ط) جم ط فرط

∴ جب ب ف (ب) = آ ب ف (ط) جم ط فرط

پھر تفرق کرنے سے

جم ب ف (ب) + جب ب فَ (ب) = ف (ب) جم ب

اس لئے فَ (ب) = ۰ اور اس لئے ف (ب) = مستقل

∴ ر^۲ + (فرر / فرط)^۲ = مستقل = ا^۲

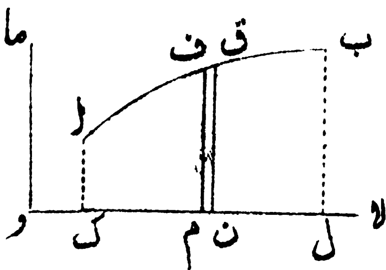
جس سے ہمیں آسانی سے حاصل ہوتا ہے کہ ر یا مستقل ہے یا ر^۲ = ا^۲ جم (۲ط + ج)

۲۹ — ثابت کرو کہ دائرہ ہی صرف ایک ایسا منحنی ہے جس میں منحنی اور ایک ثابت نقطہ سے کھنچے ہوئے دو نیم قطروں کے درمیانی رقبہ کا مرکز ثقل ہمیشہ ان سمتی نیم قطروں کے درمیانی زاویہ کے خط تنصیف پر واقع ہوتا ہے۔

## ۱۴۷ — کسی گردشی سطح یا گردشی مجسم کا مرکز ثقل۔

فرض کرو کہ منحنی ا ب محور لا کے گرد گردش کرتا ہے۔

محور ما سے فاصلوں لا اور لا + معف لا پر معین ف م اور ق ن نکالو۔




تب جزدی رقبہ ف ق ن م سے حجم تکوین پاتا ہے اوس کا رقبہ π ما^۲ معف لا ہے اور اس کا مرکز ثقل و سے فاصلہ لا پر ہے جبکہ معف لا بہت چھوٹا ہو۔

پس اگر مجسم یکساں کثافت کا ہو تو

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\sum \pi\,\text{ما}^2\,\text{مف لا} \times \text{لا}}{\sum \pi\,\text{ما}^2\,\text{مف لا}} = \frac{\int \text{ما}^2\,\text{لا فرلا}}{\int \text{ما}^2\,\text{فرلا}}$$

جہاں ما کی قیمت منحنی کی مساوات سے لا کی رقوم میں حاصل ہوسکتی ہے اور لا کی انتہائیں وک اور ول ہیں۔

ولا کے گرد قوس ف ق (مف س) کی گردش سے جو سطح تکوین پاتی ہے اس کا رقبہ ۲ π ما مف س ہے اس لئے سطح کے لئے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\sum 2\pi\,\text{ما مف س} \times \text{لا}}{\sum 2\pi\,\text{ما مف س}} = \frac{\int \text{ما لا فرس}}{\int \text{ما فرس}}$$

اب $\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} = \left[1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2\right]^{1/2}$ اور ما کی قیمت منحنی کی مساوات سے معلوم ہے، اس لئے تکمل کا عمل ہوسکتا ہے۔

اگر کوئی منحنی کی مساوات قطبی محددوں میں $\text{ر} = \text{ف}(\text{طہ})$ دی ہوئی ہو تو قطبی عنصر ر مف طہ مف ر کو گردش دینے سے یہ نصف قطر رجب طہ کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ اس لئے

$$\text{جسم کا } \bar{\text{لا}} = \frac{\sum \text{ر مف طہ مف ر} \times 2\pi\,\text{رجب طہ رجم طہ}}{\sum \text{ر مف طہ مف ر} \times 2\pi\,\text{رجب طہ}} = \frac{\iint \text{ر}^3\,\text{جب طہ جم طہ فرر فرطہ}}{\iint \text{ر}^2\,\text{جب طہ فرر فرطہ}}$$

ر کی انتہائیں صفر سے ف (طہ) ہیں اور طہ کی انتہائیں زیر غور منحنی کے حصہ پر منحصر ہیں۔

اسی طرح

$$\text{سطح کا } \bar{\text{لا}} = \frac{\sum \text{مف س} \times 2\pi\,\text{رجب طہ} \times \text{رجم طہ}}{\sum \text{مف س} \times 2\pi\,\text{رجب طہ}} = \frac{\int \text{ر}^2\,\text{جب طہ جم طہ فرس}}{\int \text{رجب طہ فرس}}$$

جہاں ر = ف (ط) اور $\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرط}}\right)^2 = ر^2 + \left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فرط}}\right)^2$

**۱۴۸ – مشق ۱** – ایک کرہ کا نصف قطر ا رہے۔ اس کا جو حصہ مرکز سے فاصلوں ب اور ج پر متوازی مستویوں کے درمیان منقطع ہوتا ہے اُس کی سطح اور حجم کے مرکزِ ثقل معلوم کرو۔



کرہ کو نصف قطر کے نصف دائرہ کی گردش سے تکوین یافتہ خیال کرو تب $لا^2 + ما^2 = ر^2$

سطح کے لئے $\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}\right)^2 = ۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2 = ۱ + \frac{لا^2}{ما^2} = \frac{ا^2}{ما^2}$

$$\bar{لا} = \frac{\int ما\, لا\, \text{فرس}}{\int ما\, \text{فرس}} = \frac{\int_ب^ج ا\, لا\, \text{فرلا}}{\int_ب^ج ا\, \text{فرلا}} = \frac{\frac{ا}{۲}(ج^2 - ب^2)}{ا\,(ج - ب)} = \frac{ب + ج}{۲}$$

نیز $\bar{آ}$ صریحاً صفر ہے۔

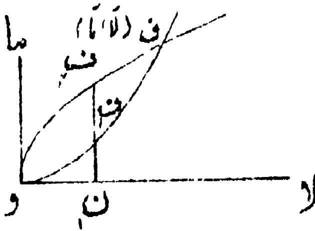
اس لئے کرہ کے کسی منطقہ کا مرکزِ ثقل اس کی مستوی سطحوں کے عین بیچ میں ہوتا ہے

حجم کے لئے $\bar{لا} = \frac{\int \pi ما^2\, \text{فرلا} \times لا}{\int \pi ما^2\, \text{فرلا}} = \frac{\int_ب^ج لا\,(ا^2 - لا^2)\, \text{فرلا}}{\int_ب^ج (ا^2 - لا^2)\, \text{فرلا}}$

$$= \frac{۳}{۴}(ب + ج)\frac{۲ا^2 - ب^2 - ج^2}{۳ا^2 - ب^2 - ب\,ج - ج^2}$$

**نتیجہ صحیح** اگر ج = ا اور ب = ۰ رکھا جائے تو ہمیں نصف کرہ حاصل ہو جاتا ہے اگر یہ کھوکھلا ہو تو $\bar{لا} = \frac{ا}{۲}$ اور اگر یہ ٹھوس ہو تو $\bar{لا} = \frac{۳ا}{۸}$

مشق ۲ — اس حجم کا مرکز ثقل معلوم کرو جو مکافیوں $ما^2 = ۴ ا لا$ اور $لا^2 = ۴ ب ما$ سے گھرے ہوئے رقبہ کو محور لا کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے۔




ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں منحنیوں کے نقطہ تقاطع ف کے محدد ہیں۔

$$لاَ = ۴ ا^{\frac{۲}{۳}} ب^{\frac{۱}{۳}} \text{ ، } ماَ = ۴ ا^{\frac{۱}{۳}} ب^{\frac{۲}{۳}}$$

اگر $و ن_۱ = لا$ ، $ن_۱ ف_۱ = ما_۱$ ، $ن_۱ ف_۲ = ما_۲$ ، تب

$$\bar{لا} = \frac{\int_{لا=۰}^{لا=لاَ} \int_{ما=ما_۱}^{ما=ما_۲} ۲\pi\, ما \times فرلا\, فرما \times لا}{\int_{لا=۰}^{لا=لاَ} \int_{ما=ما_۱}^{ما=ما_۲} ۲\pi\, ما \times فرلا\, فرما}$$

$$= \frac{\int_۰^{لاَ} (ما_۲^2 - ما_۱^2)\, لا\, فرلا}{\int_۰^{لاَ} (ما_۲^2 - ما_۱^2)\, فرلا} = \frac{\int_۰^{لاَ} \left[۴ ا لا - \frac{لا^4}{۱۶ ب^2}\right] لا\, فرلا}{\int_۰^{لاَ} \left[۴ ا لا - \frac{لا^4}{۱۶ ب^2}\right] فرلا} = \frac{۲۰}{۹} ا^{\frac{۲}{۳}} ب^{\frac{۱}{۳}}$$

# مثالیں

ذیل کے منحنیوں کی گردش سے جو سطحیں بنتی ہیں اُن کے مرکز ثقل معلوم کرو

۱ — مکافی $ما^2 = ۴ و لا$ کو $لا = ج$ سے کاٹ کر محور کے گرد گھمانے سے

$$\left[\bar{لا} = \frac{(۳ج - و)(و + ۲ج)^{\frac{۳}{۲}} + و^{\frac{۵}{۲}}}{۵\left\{(و + ۲ج)^{\frac{۳}{۲}} - و^{\frac{۳}{۲}}\right\}}\right]$$

۲ — خط تدویر $لا = و(ط + جیب\, ط)$ ، $ما = و(۱ - جم\, ط)$ کو محور ما کے گرد۔

[$\bar{\text{ما}} = \frac{\text{۲ا}}{\text{۱۵}} \times \frac{\text{۱۵}\pi - \text{۸}}{\text{۳}\pi - \text{۴}}$]

۳۔ صنوبری ر = ا (۱ + جم طہ) کو اس کے محور کے گرد۔ [$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{۵۰}}{\text{۶۳}}$ ا]

۴۔ ر۲ = ا۲ جم ۲طہ کا ایک حلقہ خط ابتدائی کے گرد۔ [$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{ا}}{\text{۹}}$ (۲ + ۳√۲)]

ذیل کے منحنیوں کی گردش سے جو مجسم بنتے ہیں اُن کے مجموعوں کے مرکز ثقل معلوم کرو۔

۵۔ مکافی ما۲ = ۴ ا لا کا وہ حصہ جو معین لا = ھ سے منقطع ہوتا ہے اور محور لا کے گرد گھمانے سے۔ [$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{۲}}{\text{۳}}$ھ]

۶۔ ما$^{\text{م + ن}}$ = ا$^{\text{م}}$ لا$^{\text{ن}}$ کو محور لا کے گرد [$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{م + ۳ ن}}{\text{م + ۲ ن}} \times \frac{\text{ا}}{\text{۲}}$]

۷۔ ما۴ ـ ا لا ما۲ + لا۴ = ۰ کو محور لا کے گرد

[$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{۳ ا}\pi}{\text{۳۲}}$]

۸۔ نصف قطر ا کے دائرہ کو خطِ مماس کے گرد دو قائموں میں سے گھمانے سے جو مجسم بنتا ہے۔ [$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{۱۵ ا}}{\text{۱۱۲}}$]

۹۔ خط تدویر لا = ا (طہ + جیب طہ)، ما = ا (۱ - جم طہ) کو محور ما کے گرد گھمانے سے۔

[$\bar{\text{ما}} = \frac{\text{۶۳}\pi^{\text{۲}} - \text{۶۴}}{\text{۹}\pi^{\text{۲}} - \text{۱۶}} \times \frac{\text{ا}}{\text{۶}}$]

۱۰۔ ر = ا (۱ + جم طہ) کو اس کے محور کے گرد [$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{۴ ا}}{\text{۵}}$]

۱۱۔ ثابت کرو کہ کرہ کی ایک پھانک کا مرکز ثقل جس کا زاویہ ۲ عہ ہے اس کے محور سے $\frac{\pi}{\text{۴}} \times \frac{\text{ا جب عہ}}{\text{عہ}}$ فاصلہ پر ہوتا ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ نصف قطر ا کے ایک کرہ کے قطاع کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے $\frac{\text{۳}}{\text{۸}}$ ا (۱ + جم عہ) ہے جہاں عہ وہ زاویہ ہے جو قطاع کے کروی قاعدہ پر کسی

نقطہ میں سے گزرنے والا نصف قطر قطاع کے محور کے ساتھ بناتا ہے۔

۱۳ — ایک کرہ کا نصف قطر ا ہے اس کے کسی نقطہ پر کثافت مرکز سے اس نقطہ کے فاصلہ کے متناسب ہے اگر اس میں ایک کرہ جس کا قطر اول الذکر کرہ کا نصف قطر ہو کاٹ لیا جائے تو ثابت کرو کہ باقی ماندہ مجسم کا مرکزِ ثقل مرکز سے $\frac{۳}{۴۳}$ ا فاصلہ پر ہوگا۔

۱۴ — ایک کرہ کے کسی نقطہ پر کثافت سطح پر کے ایک ثابت نقطہ سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ کرہ کا مرکزِ ثقل ثابت نقطہ میں سے گزرنے والے نصف قطر کی تنصیف کرتا ہے۔

۱۵ — ایک نصف کرہ کی کثافت کسی نقطہ پر مرکز سے اس نقطہ کے فاصلہ کی ن ویں قوت کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ مرکزِ ثقل اس نصف قطر کی جو نصف کرہ کی مستوی سطح پر عمود وار ہے نسبت ن + ۳ : ن + ۵ میں تقسیم کرتا ہے۔

۱۶ — اگر زمین کو نصف قطر ا کا ایک کرہ فرض کیا جائے تو لاپلاس کے کلیہ کی مطابق

$$ک = ک \frac{جب\ ط}{ط} \quad جہاں\ ط = \frac{م\ لا}{ا}$$ اور ک فاصلہ لا پر کی کثافت ہے۔

ثابت کرو کہ نصف کرۂ زمین کے مرکزِ ثقل کا فاصلہ مرکز سے

$$ا \frac{(۲ - م^{۲})\ جم\ م + ۲\ م\ جب\ م - ۲}{۲\ م\ (جب\ م - م\ جم\ م)}$$ ہے۔

۱۷ — نصف قطر ا کے ایک دائرہ کو اس کی سطحِ مستوی میں ایک ایسے خط کے گرد جس کا فاصلہ اس دائرہ کے مرکز سے (ج > ا) ہے گھمانے سے ایک نامکمل حلقہ بنایا گیا ہے۔ اگر وہ زاویہ جس میں سے دائرہ گھومے ۲ ع ہو تو

مجسم کا مرکزِ ثقل خط مذکور سے $\frac{۴ ج^{۲} + ا^{۲}}{۴ ج} \times \frac{جب\ ع}{ع}$ ہے

۱۸ — ایک یکساں مجسم ایسی سطح سے گھرا ہوا ہے جو خط تدویر کو قاعدہ کے گرد گھمانے سے بنتی ہے۔ محورِ گردش میں سے گزرنے والے مستوی سے اس مجسم کو دو حصوں میں کاٹا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ مجسم کے ہر دو حصوں کا مرکزِ ثقل مستوی رخ سے $\frac{۷ ل}{۳ \pi}$ فاصلہ پر ہے

جہاں ا خط تدویر کے تکوینی دائرہ کا نصف قطر ہے۔

۱۹ — صنوبری ر = ا (ا + جم طہ) کو محور کے گرد دو قائمہ زاویوں میں سے گھمانے سے جو سطح بنتی ہے اس کی نصف سطح اور محور میں سے گزرنے والے مستوی سے ایک مجسم بنایا گیا ہے ثابت کرو کہ محور سے اس کے مرکز ثقل کا فاصلہ $\frac{۶۳}{۱۲۸}$ ا ہے اور محور کے متوازی قطب سے اس کا فاصلہ $\frac{۱۶}{۱۵}$ ا ہے۔

۲۰ — نصف قطر ا کے ایک ربع دائرہ کو حائط نصف قطروں میں سے ایک کے متوازی خط کے گرد گھمانے سے ایک مجسم تیار کیا گیا ہے متوازی خط کا نصف قطر سے فاصلہ ب ہے جہاں ب > ا ثابت کرو کہ اس طرح سے جو منحنی سطح اور حجم پیدا ہوتا ہے ان کے مرکز ثقلوں کے فاصلے اس کی مستوی سطح سے بالترتیب $\frac{\text{ا}\,(۲\,\text{ب} \pm \text{ا})}{\pi\,\text{ب} \pm ۲\,\text{ا}}$ اور $\frac{\text{ا}}{۲}\cdot\frac{۸\,\text{ب} \pm ۳\,\text{ا}}{۳\pi\,\text{ب} \pm ۴\,\text{ا}}$ ہیں۔

## ۱۴۹ — کسی حجم کے مرکز ثقل کے لئے عام ضوابط۔

اگر حجم کا کوئی نقطہ ف (لا، ما، ی) ہو اور اس کے قریب کا نقطہ ق (لا + مف لا، ما + مف ما، ی + مف ی) ہو تو ف اور ق میں سے ما ی، ی لا اور لا ما مستویوں کے متوازی سطوح مستوی کھینچنے سے جو چھوٹا سا متوازی السطوح بنتا ہے اُس کا حجم مف لا × مف ما × مف ی ہے اگر اس کی کثافت ک ہے تو مندرجہ بالا اساسی ضابطے یہ ہو جاتے ہیں

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\sum \text{مف لا} \times \text{مف ما} \times \text{مف ی} \times \text{ک} \times \text{لا}}{\sum \text{مف لا} \times \text{مف ما} \times \text{مف ی} \times \text{ک}} = \frac{\iiint \text{ک لا} \times \text{فرلا فرما فری}}{\iiint \text{ک فرلا فرما فری}}$$

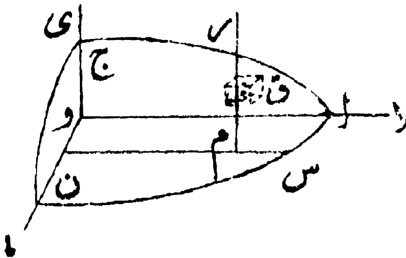
اسی طرح $\bar{\text{ما}} = \frac{\iiint \text{ک ما} \times \text{فرلا فرما فری}}{\iiint \text{ک فرلا فرما فری}}$ اور $\bar{\text{ی}} = \frac{\iiint \text{ک ی} \times \text{فرلا فرما فری}}{\iiint \text{ک فرلا فرما فری}}$

انتہائیں ایسی ہونی چاہئیں کہ اوپر کے تکملوں کے اندر سب حجم آ جائے۔

مشق ۱ ـ ناقص نما $\frac{لا^2}{ا^2}+\frac{ما^2}{ب^2}+\frac{ی^2}{ج^2}=1$ کے مثبت ثمن کے مرکز ثقل کا مقام معلوم کرو۔ کثافت یکساں ہے۔

یہاں $\bar{لا}=\frac{\iiint لا\ فرلا\ فرما\ فری}{\iiint فرلا\ فرما\ فری}$ ............(۱)

ی کے لئے انتہائیں صفر سے ھم ما




یعنی $ج\sqrt{1-\frac{لا^2}{ا^2}-\frac{ما^2}{ب^2}}$ ہیں۔

لا کے لئے صفر سے ن س

یعنی $ا\sqrt{1-\frac{ما^2}{ب^2}}$ تک اور ما کے لئے صفر سے ب تک۔

اس لئے (۱) کا شمار کنندہ

$$=\iint ج\ لا\sqrt{1-\frac{لا^2}{ا^2}-\frac{ما^2}{ب^2}}\ فرلا\ فرما$$

$$=\int\left[-\frac{ا^2ج}{3}\left(1-\frac{لا^2}{ا^2}-\frac{ما^2}{ب^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{ن س} فرما$$

$$=\int_0^{ب}\frac{ا^2ج}{3}\left(1-\frac{ما^2}{ب^2}\right)^{\frac{3}{2}} فرما=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{ا^2ج}{3}جم^3ط\ ب\ جم ط\ فرط$$ (اگر ما = ب جب ط)

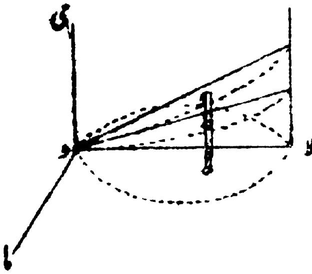
$$=\frac{ا^2ب ج}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}\times ا^2ب ج$$

نیز (۱) کا نسب نما = ثمن کا حجم $=\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}\times\pi\ ا ب ج$

اس لئے $\bar{لا}=\frac{3ا}{8}$

اسی طرح سے $\bar{ما}=\frac{3ب}{8}$ اور $\bar{ی}=\frac{3ج}{8}$

**مشق ۲** - اسطوانہ $\text{۲ لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}} = \text{۲ و لا}$ کو سطوح مستوی $\text{ی} = \text{م لا}$ اور $\text{ی} = \text{ن لا}$ سے کاٹنے سے جو مجسم حاصل ہوتا ہے اس کا مرکز ثقل معلوم کرو۔




اگر ہم سطح مستوی لا ما سے اسطوانے کی تراش کا کوئی عنصر مفـ لا مفـ ما لیں تو اس کے اوپر کا حجم صریحاً

$\text{مفـ لا} \times \text{مفـ ما} \times (\text{م} - \text{ن})\ \text{لا}$ کے مساوی ہے اور مستوی لا ما کے اوپر اس کے مرکز ثقل کی بلندی $\dfrac{\text{م} + \text{ن}}{\text{۲}}$ لا ہے۔

اس لئے $\bar{\text{لا}} = \dfrac{\iint \text{فرلا فرما} (\text{م} - \text{ن})\ \text{لا} \times \text{لا}}{\iint \text{فرلا فرما} (\text{م} - \text{ن})\ \text{لا}}$ جہاں ما کی انتہائیں $-\sqrt{\text{۲ و لا} - \text{۲ لا}^{\text{۲}}}$ سے $\sqrt{\text{۲ و لا} - \text{۲ لا}^{\text{۲}}}$ اور لا کی انتہائیں صفر سے و تک ہیں۔

$$\text{اس لئے } \bar{\text{لا}} = \frac{\int_{\text{۰}}^{\text{و}} \text{لا}^{\frac{\text{۵}}{\text{۲}}} \sqrt{\text{و} - \text{لا}}\ \text{فرلا}}{\int_{\text{۰}}^{\text{و}} \text{لا}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} \sqrt{\text{و} - \text{لا}}\ \text{فرلا}} = \text{و} \frac{\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} \text{جب}^{\text{۶}}\text{فہ جم}^{\text{۲}}\text{فہ فرفہ}}{\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} \text{جب}^{\text{۴}}\text{فہ جم}^{\text{۲}}\text{فہ فرفہ}}$$

اگر $\text{لا} = \text{و جب}^{\text{۲}}\text{فہ}$ تو

$$= \text{و} \frac{\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} (\text{جب}^{\text{۶}}\text{فہ} - \text{جب}^{\text{۸}}\text{فہ})\ \text{فرفہ}}{\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} (\text{جب}^{\text{۴}}\text{فہ} - \text{جب}^{\text{۶}}\text{فہ})\ \text{فرفہ}} = \frac{\text{۵و}}{\text{۸}}$$

$$\text{اسی طرح } \bar{\text{ی}} = \frac{\iint \text{فرلا فرما} (\text{م} - \text{ن})\ \text{لا} \times \frac{\text{م} + \text{ن}}{\text{۲}}\ \text{لا}}{\iint \text{فرلا فرما} (\text{م} - \text{ن})\ \text{لا}} = \frac{\text{م} + \text{ن}}{\text{۲}}\ \bar{\text{لا}} = \frac{\text{۵و}}{\text{۱۶}} (\text{م} + \text{ن})$$

مشق ۳۴ ـ اگر ناقص نما $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2}=1$ کے ایک ثمن کے کسی نقطہ پر کثافت $\text{لا}^{\text{ف}}\,\text{ما}^{\text{ق}}\,\text{ی}^{\text{ر}}$ کے متناسب ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\overline{\text{لا}}}{\text{ا}}=\frac{\text{جا}\left(\frac{\text{ف}}{2}+1\right)\text{جا}\left(\frac{\text{ف}+\text{ق}+\text{ر}}{2}+\frac{5}{2}\right)}{\text{جا}\left(\frac{\text{ف}}{2}+\frac{1}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{\text{ف}+\text{ق}+\text{ر}}{2}+3\right)}$$

نیز ان صورتوں پر غور کرو جبکہ ف = ق = ر = ۰ ، ف = ق = ر = ۱ ، ف = ق = ر = ۲

چونکہ کثافت = $\text{ل}\,\text{لا}^{\text{ف}}\,\text{ما}^{\text{ق}}\,\text{ی}^{\text{ر}}$ ∴ $\overline{\text{لا}}=\frac{\iiint \text{فرلا فرما فری}\ \text{ل}\,\text{لا}^{\text{ف}}\,\text{ما}^{\text{ق}}\,\text{ی}^{\text{ر}}\times\text{لا}}{\iiint \text{فرلا فرما فری}\times\text{ل}\,\text{لا}^{\text{ف}}\,\text{ما}^{\text{ق}}\,\text{ی}^{\text{ر}}}$

جہاں لا ، ما ، ی بشرط

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2}\leq 1$$

کے ماتحت سب مثبت قیمتیں اختیار کر سکتے ہیں۔

$\text{لا}=\text{ا}\,\text{لا}^{\frac{1}{2}}$ ، $\text{ما}=\text{ب}\,\text{ما}^{\frac{1}{2}}$ اور $\text{ی}=\text{ج}\,\text{ے}^{\frac{1}{2}}$ رکھو

$$\therefore\ \overline{\text{لا}}=\text{ا}\times\frac{\iiint \text{لا}^{\frac{\text{ف}}{2}}\,\text{ما}^{\frac{\text{ق}}{2}-\frac{1}{2}}\,\text{ے}^{\frac{\text{ر}}{2}-\frac{1}{2}}\ \text{فرلا فرما فرے}}{\iiint \text{لا}^{\frac{\text{ف}}{2}-\frac{1}{2}}\,\text{ما}^{\frac{\text{ق}}{2}-\frac{1}{2}}\,\text{ے}^{\frac{\text{ر}}{2}-\frac{1}{2}}\ \text{فرلا فرما فرے}}$$

جہاں لا ، ما ، ے سب مثبت قیمتیں اختیار کر سکتے ہیں جو شرط لا + ما + ے $\leq$ ۱ کو پورا کریں

اس لئے ڈرشلے کے تکملوں کی رو سے

$$\frac{\bar{\text{لا}}}{\text{ا}} = \frac{\text{جا}(\frac{\text{ف}}{۲}+۱)\,\text{جا}(\frac{\text{ق}}{۲}+\frac{۱}{۲})\,\text{جا}(\frac{\text{ر}}{۲}+\frac{۱}{۲})}{\text{جا}(\frac{\text{ف}+\text{ق}+\text{ر}}{۲}+۳)} \div \frac{\text{جا}(\frac{\text{ف}}{۲}+\frac{۱}{۲})\,\text{جا}(\frac{\text{ق}}{۲}+\frac{۱}{۲})\,\text{جا}(\frac{\text{ر}}{۲}+\frac{۱}{۲})}{\text{جا}(\frac{\text{ف}+\text{ق}+\text{ر}}{۲}+\frac{۵}{۲})}$$

$$= \text{ا} \times \frac{\text{جا}(\frac{\text{ف}}{۲}+۱)\,\text{جا}(\frac{\text{ف}+\text{ق}+\text{ر}}{۲}+\frac{۵}{۲})}{\text{جا}(\frac{\text{ف}}{۲}+\frac{۱}{۲})\,\text{جا}(\frac{\text{ف}+\text{ق}+\text{ر}}{۲}+۳)}$$

اگر ف = ق = ر = ۰ تو $\frac{\bar{\text{لا}}}{\text{ا}} = \frac{\text{جا}(۱)\,\text{جا}(\frac{۵}{۲})}{\text{جا}(\frac{۱}{۲})\,\text{جا}(۳)} = \frac{\text{جا}(۱)\,\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\text{جا}(\frac{۱}{۲})}{\text{جا}(\frac{۱}{۲})\times ۲\times ۱\times\text{جا}(۱)}$

$= \frac{۳}{۸}$ جیساکہ مشق ا میں

اگر ف = ق = ر = ۱ تو $\frac{\bar{\text{لا}}}{\text{ا}} = \frac{\text{جا}(\frac{۳}{۲})\,\text{جا}(۴)}{\text{جا}(۱)\,\text{جا}(\frac{۹}{۲})}$

$$= \frac{\text{جا}(\frac{۳}{۲})\times ۳\times ۲\times ۱\,\text{جا}(۱)}{\text{جا}(۱)\times\frac{۷}{۲}\times\frac{۵}{۲}\times\frac{۳}{۲}\times\text{جا}(\frac{۳}{۲})} = \frac{۱۶}{۳۵}$$

اگر ف = ق = ر = ۲ تو $\frac{\bar{\text{لا}}}{\text{ا}} = \frac{\text{جا}(۲)\,\text{جا}(\frac{۱۱}{۲})}{\text{جا}(\frac{۵}{۲})\,\text{جا}(۶)} = \frac{\text{جا}(۲)\,\frac{۹}{۲}\times\frac{۷}{۲}\times\frac{۵}{۲}\times\frac{۳}{۲}\,\text{جا}(\frac{۳}{۲})}{\text{جا}(\frac{۳}{۲})\times ۵\times ۴\times ۳\times ۲\times\text{جا}(۲)}$

$= \frac{۶۳}{۱۲۸}$

۱۵۰۔ اگر مجسم کی مساوات قطبی محددوں میں دی ہوئی ہو اور کسی نقطہ ن کے محدد (ر، طہ، فہ) ہوں جہاں و ن = ر، ی و ن = طہ، اور فہ وہ زاویہ ہو جو سطح مستوی ی و ن، ی و لا کے ساتھ بناتی ہے تو

حجم کا عنصر مف ر × ر مف طہ × ر جب طہ مف فہ یعنی ر² جب طہ مف ر مف طہ مف فہ ہوگا اس لئے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\sum \text{ر}^۲\times\text{جب طہ مف ر مف طہ}\times\text{مف فہ}\times\text{ر جم فہ جب طہ}}{\sum \text{ر}^۲\,\text{جب طہ مف ر}\times\text{مف طہ}\times\text{مف فہ}}$$

$$= \frac{\iiint \text{ر}^۳\,\text{جب}^۲\text{طہ جم فہ فر ر فر طہ فر فہ}}{\iiint \text{ر}^۲\,\text{جب طہ فر ر فر طہ فر فہ}}$$

$$\text{لا} = \frac{\sum \text{ر جب طہ مف ر × مف طہ مف فہ ر جب فہ جب طہ}}{\sum \text{ر جب طہ مف ر مف طہ × مف فہ}} = \frac{\iiint \text{ر}^3 \text{ جب}^2 \text{ طہ جب فہ فر ر فر طہ فر فہ}}{\iiint \text{ر}^2 \text{ جب طہ فر ر فر طہ فر فہ}}$$

$$\text{اور ی} = \frac{\sum \text{ر جب طہ مف ر مف طہ × مف فہ × ر جم طہ}}{\sum \text{ر}^2 \text{ جب طہ مف ر مف طہ مف فہ}} = \frac{\iiint \text{ر}^3 \text{ جب طہ جم طہ فر ر فر طہ فر فہ}}{\iiint \text{ر}^2 \text{ جب طہ فر ر فر طہ فر فہ}}$$

انتہائیں ایسی ہونی چاہیئیں کہ سب حجم آجائے۔

مشق۔ ایک نصف کرہ کے کسی نقطہ پر کثافت مستوی کنارے پر کے ایک نقطہ سے فاصلہ کے متناسب بدلتی ہے اس کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

نصف کرہ کی مساوات ہے

$(\text{لا} - \text{ا})^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2 = \text{ا}^2$ یا قطبی محددوں میں س = ۲ ا جم فہ جب طہ اس میں ر کی انتہائیں صفر سے ۲ ا جم فہ جب طہ ہیں، فہ کی انتہائیں $-\frac{\pi}{2}$ سے $\frac{\pi}{2}$ تک ہیں اور طہ کی صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک ہیں۔

اگر کسی نقطہ پر کثافت لہ ر ہو تو کمیت کا عنصر ہے

$$\text{مف ر × ر مف طہ × ر جب طہ مف فہ × لہ ر}$$

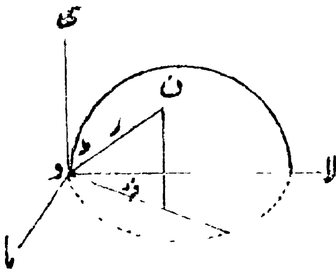
اس لئے

$$\text{لا} = \frac{\iiint \text{لہ ر}^3 \text{ جب طہ فر ر فر طہ فر فہ × ر جم فہ جب طہ}}{\iiint \text{لہ ر}^3 \text{ جب طہ فر ر فر طہ فر فہ}}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}\iint (\text{۲ ا جم فہ جب طہ})^5 \text{ جب}^2 \text{ طہ جم فہ فر طہ فر فہ}}{\frac{1}{4}\iint (\text{۲ ا جم فہ جب طہ})^4 \text{ جب طہ فر طہ فر فہ}} = \frac{8\text{ا}}{5} \frac{\iint \text{جم}^6 \text{ فہ جب}^7 \text{ طہ فر طہ فر فہ}}{\iint \text{جم}^4 \text{ فہ جب}^5 \text{ طہ فر طہ فر فہ}}$$

$$= \frac{8\text{ا}}{5} \times \frac{\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}} = \frac{8\text{ا}}{7}$$

صریحاً تشاکل سے $\bar{\text{ما}} = 0$




$$\text{نیز } \bar{\text{ی}} = \frac{\iiint \text{ر}^{3} \text{ جب ط فر ر فرط فرف ر جم ط}}{\iiint \text{ر}^{2} \text{ جب ط فر ر فرط فرف}}$$

$$= \frac{\text{۸ا}}{\text{۵}} \times \frac{\iint \text{جم}^{5}\text{ف جب}^{6}\text{ط جم ط فرط فرف}}{\iint \text{جم}^{4}\text{ف جب}^{5}\text{ط فرط فرف}}$$

$$= \frac{\frac{\text{۸ا}}{\text{۵}} \times \frac{2\times 4}{1\times 3\times 5} \times \frac{1}{7}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{2\times 4}{1\times 3\times 5}} = \frac{128}{105} \times \frac{\text{ا}}{\pi}$$

# مثالیں

ذیل کی سطحوں کے درمیان جو حجم گھر جاتے ہیں اُن کے مرکز کمیت معلوم کرو۔

۱ ۔ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 2\text{ا لا}$ ، ی = م لا ، ی = ن لا

$$\left[\frac{\text{۵ا}}{4} ، 0 ، \frac{\text{۵ا(م + ن)}}{8}\right]$$

۲ ۔ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ ، ی = ۰ ، ی = لا مس ھ + ھ

$$\left[\frac{\text{ا}}{\text{۴ھ}}\text{ مس ع} ، 0 ، \frac{\text{ا}^2}{\text{۸ھ}}\text{ مس ع}^2 + \frac{\text{ھ}}{2}\right]$$

۳ ۔ $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ ، ی = ۰ اور ل لا + م ما + ن ی = ۱

$$\left[\frac{\text{ا}^2\text{ل}}{4} ، \frac{\text{ب}^2\text{م}}{4} ، \frac{\text{ل}^2\text{ا}^2 + \text{م}^2\text{ب}^2 + 4}{\text{۸ن}}\right]$$

۴ ۔ $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = 1$ ، لا = ۰ اور ی = ± ج

$$\left[\frac{\text{ا}}{128}\left\{7\sqrt{2} + 3\text{ لوک}(1 + \sqrt{2})\right\}\right]$$

۵ — $\frac{ما^2}{ب^2} + \frac{ی^2}{ج^2} - \frac{۲لا}{ا} = ۰$ ، لا = ۲ا ، ما = ۰ ، ی = ۰

$$\left[ \frac{۴ا}{۳} ، \frac{۳۲ب}{۱۵\pi} ، \frac{۳۲ج}{۱۵\pi} \right]$$

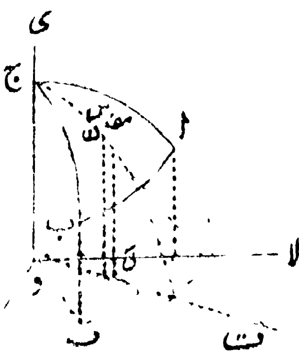
۶ — $\left(\frac{لا}{ا}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{ما}{ب}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{ی}{ج}\right)^{\frac{2}{3}} = ۱$ کا وہ حصہ جو مثبت ثمن میں واقع ہے۔

$$\left[ \frac{۲۱ا}{۱۲۸} ، \frac{۲۱ب}{۱۲۸} ، \frac{۲۱ج}{۱۲۸} \right]$$

۷ — ایک کرہ کا نصف قطر ا ہے اس میں سے قطر ا کا ایک مستدیر اسطوانہ اس طرح کاٹا گیا ہے کہ اسطوانہ کرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ کے اندر والے کرہ کے حصہ کا مرکز ثقل کرہ کے مرکز سے $\frac{۱۲ا}{۱۵\pi - ۱۰}$ فاصلہ پر ہے۔

## ۱۵۱ — کسی کروی مثلث کا مرکز ثقل۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج ہے اور کرہ کا مرکز و ہے نیز فرض کرو کہ و ج، ی کا محور ہے اور و لا اور و ما دو عمودی محور ہیں جن میں سے و لا مستوی ج و ا میں واقع ہے۔ فرض کرو کہ مثلث پر کوئی نقطہ ن ہے اور دائرہ ج ن کا ن پر مماس لا و ما مستوی سے ت پر ملتا ہے۔ ن نَ اس مستوی پر عمود کھینچو۔ ن پر مثلث کا ایک چھوٹا عنصر مف س لو اور فرض کرو کہ اس کا ظل مستوی لا و ما پر مف صہ ہے۔




تب $\frac{مف\ صہ}{مف\ س}$ = جم نَ ت ن = جب ن و ت = $\frac{ی}{ر}$ جہاں ہعین

ہے ن کا اور رؔ کرہ کا نصف قطر ہے۔

$$\therefore \quad \text{ی} \times \text{مف س} = \text{ر} \times \text{مف صہ}$$

اس لئے اگر یؔ مطلوبہ مرکز ثقل کا معین ہو تو

$$\bar{\text{ی}} = \frac{\sum \text{ی} \times \text{مف س}}{\sum \text{مف س}} = \frac{\int \text{ر ف صہ}}{\int \text{ف س}} = \text{ر} \frac{\text{صہ}}{\text{س}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

جہاں س مثلث کا رقبہ ہے اور صہ سطح لا و ما پر اس مثلث کے ظل کا رقبہ ہے۔

اب صہ = رقبہ ا ج ب کا ظل مستوی لا و ما پر

= رقبہ ا و ب کا ظل مستوی لا و ما پر

$= \frac{1}{2}\text{ر}^2 \times$ (زاویہ ا و ب) × جم (اس زاویہ کا جو ا و ب اور لا و ما کے درمیان ہے)

$= \frac{1}{2}\text{ر} \times \text{ج} \times$ جب (اس زاویہ کا جو وج اور ا و ب کے درمیان ہے)

$= \frac{1}{2}\text{ر}^2 \times \text{ج}$ جب ع، جہاں ع، وہ قوس ہے جو ج سے ا ب پر عمود وار نکالی جائے۔

$= \frac{1}{2}\text{ر}^2$ ج جب ب جب ا

نیز $\text{س} = \text{ر}^2 \times \text{ذ}$ جہاں ذ کروی اضافہ ہے

$$\therefore \quad \bar{\text{ی}} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{رج جب ب جب ا}}{\text{ذ}}$$

اس سے وج پر مرکز ثقل کے ظل کا و سے فاصلہ معلوم ہوتا ہے اسی قسم کے ضابطوں سے و ا اور و ب پر ظلوں کے فاصلے معلوم ہوتے ہیں۔ اس لئے اس کا مقام معلوم ہو گیا۔

۲۵۱۔ دفعہ گزشتہ کا ربط (۱) یقیناً کرہ پر کے ہر ایک رقبہ پر صادق آتا ہے خواہ وہ رقبہ مثلث ہو یا نہیں۔

اس لئے معلوم ہوا کہ اگر کرہ کی سطح پر کوئی رقبہ س ہو تو اس کے مرکز ثقل کا

فاصلہ سطح مستوی لا وما سے جو کرہ کے مرکز میں سے گزرتی ہے مساوی ہوتا ہے اس حاصل ضرب کے جس کا ایک جزو کرہ کا نصف قطر ہے اور دوسرا جزو وہ نسبت ہے جو سطح لا وما پر رقبہ س کے ظل کو خود رقبہ س سے ہے۔

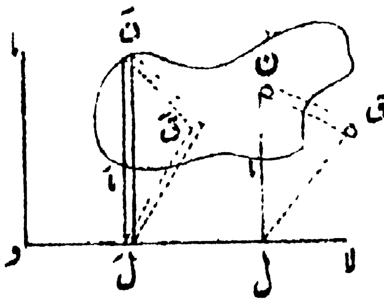
مشق ۔ ثابت کرو کہ کروی مثلث کے مرکز ثقل کا فاصلہ اس سطح مستوی سے جو مثلث کے ضلع اب اور کرہ کے مرکز میں سے گزرتی ہے

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{ر(ج - ب\ جم\ ا - ا\ جم\ ب)}{ذ}$$ ہے۔

**۱۵۳ پے پس کا مسئلہ۔** اگر کوئی مستوی رقبہ اپنے مستوی میں کسی محور کے گرد کسی زاویے میں سے گھومے تو (۱) جو حجم اس طرح سے تکوین پائے گا وہ رقبہ اور رقبہ کے مرکز ثقل نے جو فاصلہ طے کیا ہے ان دونوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا اور (۲) جو سطح اس طرح مرتسم ہوگی اس کا رقبہ گھومنے والے رقبہ کے محیط اور جو فاصلہ محیط کے مرکز ثقل نے طے کیا ہے ان دونوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا۔

فرض کرو کہ منحنی کا رقبہ ا اور منحنی کا محیط س ہے اور گھومنے کے محور سے جس کو لا کا محور مانا گیا ہے منحنی کے رقبہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مآ اور منحنی کے محیط کے مرکز ثقل کا فاصلہ مآ' ہے۔

(۱) فرض کرو کہ رقبہ کا کوئی نقطہ ن ہے جس کا معین ما ہے تب اگر گھومنے کا زاویہ طہ ہو تو ن سے جو قوس




ہے اس کا طول = ما طہ

اس لئے رقبہ کے عنصر فرل سے جو حجم مرتسم ہوتا ہے وہ مساوی ہے ما طہ × فرل کے۔

اس لئے کل حجم جو رقبہ مرتسم کرتا ہے

= ∑ ما طہ × فرا = طہ ∑ (ما × فرل) = طہ × مآ ا (دفعہ ۱۴۵ کی رو سے)

= ا × مآ طہ

= منحنی کا رقبہ × اس قوس کا طول جو رقبہ کا مرکز ثقل طے کرتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ منحنی کے محیط پر کوئی نقطہ نَ ہے جس کا معین مَا ہے۔ دوران گردش میں نَ جو منحنی مرتسم کرتا ہے اس کا طول = مَا طہ

اس لئے نَ پر محیط کے عنصر مفس سے جو سطح مرتسم ہوتی ہے وہ

= مَا طہ × مفس

اس لئے محیط سے کل سطح جو مرتسم ہوتی ہے وہ

= $\sum$ (مَا طہ × مفس) = طہ $\sum$ (مَا مفس) = طہ مَا آس (دفعہ ۱۴۳ کی رو سے)

= س × مَا × طہ

= منحنی کا محیط × اس قوس کا طول جو محیط کا مرکز ثقل طے کرتا ہے۔

# مثالیں

۱۔ ایک لنگر چھلے کا حجم اور سطح معلوم کرو۔

ایک لنگر چھلے سے وہ سطح مراد ہوتی ہے جو کوئی دائرہ اپنی سطح میں ایک محور کے گرد گھومنے سے تکوین کرتا ہے۔ اگر دائرہ کا نصف قطر ا ہو اور اس کے مرکز کا فاصلہ گردش کے محور سے ب ہو تو ایک مکمل گردش میں دائرہ کا مرکز جو فاصلہ مرتسم کرتا ہے وہ = ۲ $\pi$ ب

اس لئے لنگر چھلے کا حجم = $\pi$ ا$^2$ × ۲ $\pi$ ب = ۲ $\pi^2$ ا$^2$ ب

اور اس کی سطح = ۲ $\pi$ ا × ۲ $\pi$ ب = ۴ $\pi^2$ ا ب

۲۔ ایک کرہ کا نصف قطر ا ہے اس میں سے ایک ٹھوس قطاع کاٹ لیا گیا ہے جس کے قاعدہ کا محیط مستدیر ہے اور اس محیط کے قطر کے محاذی کرہ کے مرکز پر زاویہ ۲ عہ بنتا ہے

ثابت کرو کہ قطاع کا حجم $\frac{4\pi}{3}$ ا$^3$ × جب$^2$ $\frac{عہ}{2}$ ہے اور اس کی منحنی سطح ۴ $\pi$ ا$^2$ جب$^2$ $\frac{عہ}{2}$ ہے

(دائرہ کے ایک قطاع کو اس کے ایک حائط نصف قطر کے گرد گھماؤ)

۳۔ پے پس کے مسئلہ کی مدد سے ایک قائم مخروط کے مقطوع کی سطح اور حجم اس کے

مستوی سروں کے نصف قطروں اور ارتفاع کی رقوم میں معلوم کرو۔

۴ ــــ پے پس کے مسئلوں سے ایک نصف دائرہ کی قوس اور رقبہ کے مرکز ثقلوں کے مقام معلوم کرو۔

۵ ــــ ایک مثلث کا رقبہ ق ہے اور یہ اپنی سطح مستوی میں ایک خط کے گرد گھومتا ہے مثلث کے راسوں سے اس خط پر عمود کھینچے گئے ہیں اور ان کے طول بالترتیب

ع۱، ع۲، ع۳ ہیں۔ ثابت کرو کہ حجم $\frac{\pi ۲}{۳}$ ق × (ع۱ + ع۲ + ع۳) ہے۔

۶ ــــ صفحہ (۲۲۱) مثال (۱) اور صفحہ (۲۲۵) مشق ۲ کے نتیجوں کو استعمال کرنے سے اُس جسم کا حجم اور سطح معلوم کرو جو ایک خط تدویر کو اس کے قاعدہ کے گرد مکمل گردش دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

---

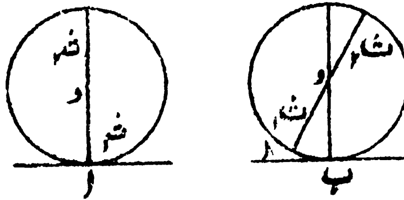
# نواں باب

## قائم اور غیر قائم تعادل

۲۵۱۔ ہم حصہ ۱۴۱ میں بتا چکے ہیں کہ اگر اُس دفعہ کی شکل (۱) کے جسم کو خفیف سا ہٹا دیا جائے تو وہ اسی محل تعادل میں واپس آنے کی کوشش کرتا ہے اگر شکل (۲) کے جسم کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو وہ ابتدائی محل میں آنے کی کوشش نہیں کرے گا۔ بلکہ اس محل تعادل سے اور دور ہٹ جائیگا۔

پہلے جسم کے تعادل کو قائم تعادل اور دوسرے جسم کے تعادل کو غیر قائم تعادل کہتے ہیں۔

اب ایک وزنی کرہ پر غور کرو جو افقی مستوی پر رکھا ہوا ہے اور جس کا مرکز ثقل اُس کے مرکز پر منطبق نہیں ہے۔




فرض کرو کہ پہلی شکل سے کرہ کا محل تعادل ظاہر کیا گیا ہے اور کرہ کا مرکز ثقل یا تو کرہ کے مرکز و سے نیچے نقطہ ث۱ پر ہوگا یا اوپر نقطہ ث۲ پر ہوگا۔

نیز فرض کرو کہ دوسری شکل میں کرہ کا محل جبکہ وہ چھوٹے زاویہ میں سے گھوم جاتا ہے دکھایا گیا ہے۔

اب کرہ اور مستوی سطح کا نقطہ تماس ت ب ہوگا۔
سطح مستوی کا تعامل اب بھی کرہ کے مرکز میں سے گزریگا۔
اگر جسم کا وزن ش میں سے عمل کرے تو ظاہر ہے کہ جسم اپنے ابتدائی محل توازن میں واپس آجائے گا اور جسم کی ابتدائی حالت قائم تعادل کی تھی۔
اگر وزن نقطہ ش، میں سے عمل کرے تو جسم ہٹاؤ کے بعد اپنے ابتدائی محل توازن سے اور دور ہٹ جائیگا۔ اس لئے ابتدا جسم غیر قائم تعادل کی حالت میں تھا۔

اگر جسم کا مرکز ثقل و پر ہوتا تو دوسری شکل میں بھی جسم کا وزن سطح مستوی کے تعامل کے ساتھ متوازن ہوتا۔ اس لئے نئے محل میں بھی جسم تعادل میں رہتا ایسی صورت میں تعادل کو تعدیلی تعادل کہتے ہیں۔

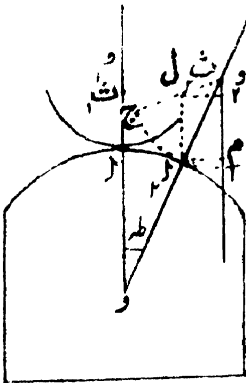
۱۰۵۔ **تعریف**۔ کوئی جسم قائم تعادل میں اس وقت ہوتا ہے جبکہ محل تعادل میں سے تھوڑا سا ہٹانے کے بعد جسم پر عمل کرنے والی قوتیں جسم کو ابتدائی محل تعادل میں لانے کی طرف میلان رکھتی ہوں۔ یہ غیر قائم تعادل میں اس وقت کہلاتا ہے جبکہ خفیف سے ہٹاؤ کے بعد جسم پر عمل کرنے والی قوتیں جسم کو ابتدائی محل تعادل سے اور پرے ہٹانے کا میلان رکھتی ہوں۔ یہ تعادل تعدیلی میں اس وقت کہلاتا ہے جبکہ ذرا سے ہٹاؤ کے بعد اس پر عمل کرنے والی قوتیں متوازن ہوں۔
عام طور پر ان اجسام کا تعادل جو اوپر سے بھاری ہوں یا جن کے پیندے چھوٹے ہوں غیر قائم ہوتا ہے۔
پس نظری طور پر ممکن ہے کہ ایک پن افقی میز پر نوک کے بل تعادل حالت میں سیدھی کھڑی رہ سکے۔ لیکن عمل میں "قاعدہ" اتنا چھوٹا ہوگا کہ ذرا سے ہٹاؤ سے بھی اس کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والا انتصابی خط اس کے قاعدہ کے باہر سے گزرے گا اور پن گر جائے گی۔ اور یہی کیفیت ملیڈبال کی چھڑی کی ہوتی ہے جبکہ اس کو ایک سرے کے بل میز پر انتصاباً رکھا جائے۔
عام اصول یہ ہے کہ جسم قائم تعادل میں اس وقت ہوتا ہے جبکہ اس کا مرکز ثقل ان سب مقاموں سے جو یہ اختیار کر سکتا ہے زیر تر مقام میں ہو اس کی مثالیں

دفعہ ماقبل کی صورت اور گھڑیال کا رقاص ہیں۔ گھڑیال کا رقاص ہٹاؤ کے بعد ہمیشہ اپنے ابتدائی محل سکون کی طرف آتا ہے۔

اب اُس آدمی کی حالت پر غور کرو جو ایک کسے ہوئے رستے پر چل رہا ہو عام طور پر اس کے ہاتھ میں ایک بانس ہوتا ہے جس کا ایک سرا بہت وزنی ہوتا ہے وہ اسے اس طرح رکھتا ہے کہ اس کا اور بانس کا مرکز ثقل ہمیشہ پاؤں کے نیچے رہتا ہے۔ جب وہ ایک طرف کو گرنے لگتا ہے تو وہ بانس کے مقام کو اس طرح بدلتا ہے کہ اس کا اور بانس کا مرکز ثقل اس کے پاؤں کی دوسری جانب آجاتا ہے اور حاصل وزن پھر اس کو کھینچ کر سیدھے محل میں لے آتا ہے۔

اگر نظری طور پر جسم کے ایک سے زیادہ محل توازن ہوں تو وہ محل جس میں اس کا مرکز ثقل سب سے نچلے مقام پر ہو بالعموم تعادل قائم کا محل ہوگا اور وہ محل جس میں اس کا مرکز ثقل بلند ترین مقام پر ہو تعادل غیر قائم کا محل ہوگا۔

۱۵۶- ایک جسم دوسرے ثابت جسم پر حالت توازن میں ساکن ہے اور دونوں جسموں کے جو حصے ایک دوسرے سے مس کرتے ہیں وہ کرے ہیں جن کے نصف قطر بالترتیب ر اور ر$_1$ ہیں اور وہ خطِ مستقیم جو کروں کے مرکزوں کو ملاتا ہے انتصابی ہے اگر اوپر کے جسم کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو معلوم کرو کہ تعادل قائم ہوگا یا غیر قائم اجسام اس قدر کھردرے ہیں کہ پھسلنا ممکن نہیں ہے۔




فرض کرو کہ نچلے جسم کی کروی سطح کا مرکز و ہے اور اوپر کے جسم کا و$_1$ نیز ا$_1$ ث$_1$ کا طول ھ ہے۔

فرض کرو کہ اوپر کے جسم کو لڑھکا کر ذرا سا ہٹا دیا گیا ہے اب اوپر کے جسم کے مرکز ثقل کا نیا محل و$_2$ ہوگا نیا نقطہ تماس ا$_2$ مرکز ثقل کا نیا محل ث$_2$ اور ا$_1$ کا مقام ج ہوگا۔ اس لئے ج ث$_2$ کا طول ھ ہوگا۔

$ا_۲ل$ انتصاباً کھینچو جو $و_۲ج$ سے ل پر ملے اور $و_۲ھم$ انتصاباً کھینچو جو $ث_۲$ میں سے گزرنے والے افقی خط سے ھم پر ملے۔

فرض کروکہ $\angle$ $ا_۲و ل_۲$ = ط اور $\angle$ $ا_۲و_۲ج$ = فہ

اس لئے زاویہ ج $ا_۲$ھم = (ط + فہ)

چونکہ جسم دوسرے محل میں لڑھک کر آیا ہے اس لئے

قوس $ا ا_۲$ = قوس ج $ا_۲$، اس لئے

سا ط = ر فہ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (۱)

جہاں سا اور ر بالترتیب نچلی اور اوپر کی سطحوں کے نصف قطر ہیں۔

اب تعادل کا قائم یا غیر قائم ہونا اس بات پر منحصر ہے کہ $ث_۲$ خط $ا_۲ل$ کے بائیں طرف واقع ہے یا دائیں طرف واقع ہے

یعنی $ث_۲$ کا فاصلہ $و_۲$ھم سے > یا < $ا_۲$ھم

یعنی (ر - ھ) جب (ط + فہ) > یا < ر جب ط

یعنی (ر - ھ) جب$\left(\frac{سا + ر}{ر}ط\right)$ > یا < ر جب ط

یعنی زاویہ کی جیب کے پھیلاؤ کو زاویہ مذکور کی رقوم میں مندرج کرنے سے

$$(ر - ھ)\left[\frac{سا+ر}{ر}ط - \frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{سا+ر}{ر}\right)^3ط^3 + \ldots\right]$$

$$> یا < ر\left[ط - \frac{ط^3}{\underline{|3}} + \ldots\right] \quad \ldots \quad (۲)$$

یعنی $(ر - ھ)\left[\frac{سا+ر}{ر} - \frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{سا+ر}{ر}\right)^3ط^2 + \ldots\right] > یا < ر\left[1 - \frac{ط^2}{\underline{|3}} \ldots\right]$

یعنی (ر - ھ) (ر + سا) / ر > یا < ر

یعنی ر سا > یا < ھ (سا + ر)

یعنی $\frac{1}{ھ}$ > یا < $\frac{1}{سا} + \frac{1}{ر}$ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (۳)

اس خاص صورت میں جبکہ $\frac{1}{سا} + \frac{1}{ر} = \frac{1}{ھ}$ یعنی $ھ = \frac{سا\, ر}{سا + ر}$

تو ہمیں مساوات (۲) پر پھر غور کرنا چاہیے لہذا تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا

اگر بالترتیب $\frac{ر^2}{سا + ر}\left[\frac{سا + ر}{ر} ط - \frac{1}{\lfloor 3}\left(\frac{سا + ر}{ر}\right)^3 ط^3 + \ldots\right]$

$< \text{یا} > ر\left(ط - \frac{ط^3}{\lfloor 3} + \ldots\right)$

یعنی اگر بالترتیب $-\frac{1}{6}(سا + ر)^2 ط^3 +$ ط کی بڑی قوتیں

$< \text{یا} > -\frac{1}{6} ر^2 ط^3 + \ldots$

یعنی اگر بالترتیب $(سا + ر)^2 -$ ط کی دوسری قوت وغیرہ $< \text{یا} > ر^2 -$ ط کی دوسری قوت وغیرہ سے

یعنی اگر $(سا + ر)^2 < \text{یا} > ر^2$ جبکہ ط کو لا انتہا چھوٹا بنایا جائے

اس سے ظاہر ہے کہ اس صورت میں تعادل غیر قائم ہوگا۔ پس تعادل قائم صرف اسی صورت میں ہوگا جبکہ $\frac{1}{ھ} > \frac{1}{ر} + \frac{1}{سا}$ باقی تمام صورتوں میں یہ غیر قائم ہوگا۔

اگر نیچے کی سطح کا انحنا دوسری جانب ہو جیسے ذیل کی شکل دکھایا گیا ہے تو اس صورت میں زاویہ ج $د_2$ م = ف - ط

$= \frac{سا - ر}{ر} ط$

اور تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا اگر بالترتیب $ش_2$، خط $ا_2$ل کے بائیں طرف ہو یا دائیں طرف ہو۔

یعنی اگر بالترتیب $د_2 ش_2$ جب(ف - ط) $\gtrless$ م $ا_2$

یعنی اگر (ھ - ر) جیب $\frac{\text{ما} - \text{ر}}{\text{ر}}$ طہ $\gtrless$ ر جیب طہ

یعنی اگر $(\text{ھ} - \text{ر})\left[\frac{\text{ما} - \text{ر}}{\text{ر}}\,\text{طہ} - \frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{\text{ما} - \text{ر}}{\text{ر}}\right)^3 \text{طہ}^3 + \dots\right] \gtrless \text{ر}\left(\text{طہ} - \frac{\text{طہ}^3}{\underline{|3}} + \dots\right)$ ..... (۴)

یعنی اگر $(\text{ھ} - \text{ر})\left[\frac{\text{ما} - \text{ر}}{\text{ر}} - \frac{1}{6}\left(\frac{\text{ما} - \text{ر}}{\text{ر}}\right)^3 \text{طہ}^2 + \dots\right] \gtrless \text{ر}\left(1 - \frac{\text{طہ}^2}{6} + \dots\right)$

یعنی اگر $(\text{ھ} - \text{ر})\,\frac{\text{ما} - \text{ر}}{\text{ر}} \gtrless \text{ر}$ جبکہ طہ کو لاانتہا چھوٹا بنا دیا جائے

یعنی اگر $\text{ھ} \gtrless \frac{\text{ما}\,\text{ر}}{\text{ما} - \text{ر}}$ یعنی اگر $\frac{1}{\text{ھ}} \lessgtr \frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\text{ما}}$

انتہائی صورت میں جبکہ $\text{ھ} = \frac{\text{ما}\,\text{ر}}{\text{ما} - \text{ر}}$ تو مساوات (۴) میں طہ کی اعلیٰ تر قوتیں لینی چاہیئں۔

اس صورت میں مساوات (۴) ذیل کی شکل اختیار کرتی ہے

$$\frac{\text{ر}^2}{\text{ما} - \text{ر}}\left[\frac{\text{ما} - \text{ر}}{\text{ر}}\,\text{طہ} - \frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{\text{ما} - \text{ر}}{\text{ر}}\,\text{طہ}\right)^3 + \dots\right] \gtrless \text{ر}\left(\text{طہ} - \frac{\text{طہ}^3}{\underline{|3}} + \dots\right)$$

یعنی اگر $-\frac{1}{6}\left(\frac{\text{ما} - \text{ر}}{\text{ر}}\right)^2 \text{طہ}^3 + \dots \gtrless -\frac{\text{طہ}^3}{6} + \dots$

یعنی اگر $\left(\frac{\text{ما} - \text{ر}}{\text{ر}}\right)^2$ طہ کی قوتیں $\lessgtr$ ۱ - طہ کی قوتیں

اس لئے جب زاویہ طہ لاانتہا چھوٹا ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ تعادل قائم ہوگا یا غیر قائم

اگر بالترتیب $(\text{ما} - \text{ر})^2 \lessgtr \text{ر}^2$

یعنی اگر ما $\lessgtr$ ۲ر

اس صورت میں جبکہ ما = ۲ر اور اس لئے $\text{ھ} = \frac{\text{ما}\,\text{ر}}{\text{ما} - \text{ر}} = ۲\text{ر}$ تو

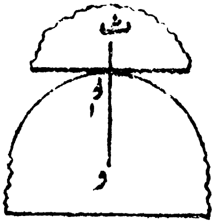
$\text{ف} = \frac{\text{ما}}{\text{ر}}\,\text{طہ} = ۲\,\text{طہ}$

اور $و_۲ ش_۲$ جب (فہ - طہ) = (ھ - ر) جب (فہ - طہ) = ر جب طہ = ھم $ا_۲$ ہمیشہ -

اس خاص صورت میں $ش_۲$ ہمیشہ ل پر منطبق ہوتا ہے اور اوپر کا جسم ہمیشہ تعادل میں رہے گا خواہ اس کو کسی زاویہ میں سے گھمایا جائے کیونکہ ہر صورت میں اس کا مرکز ثقل نقطہ تماس کے انتصابًا اوپر ہوگا -

**نتیجہ صریح ۱-** اگر اوپر کے جسم کی سطح تماس مستوی ہو جیسا کہ ذیل کی شکل میں، تو ر کی قیمت لا متناہی ہوگی - پس تعادل قائم ہوگا اگر

$$\frac{۱}{ھ} > \frac{۱}{ر_۱} \quad \text{یعنی اگر } ھ < ر_۱$$




پس اگر اوپر کے جسم کے مرکز ثقل کا اس کی سطح مستوی سے فاصلہ نچلے جسم کے نصف قطر سے کم ہو تو تعادل قائم ہوگا ورنہ تعادل غیر قائم ہوگا -

**نتیجہ صریح ۲-** اگر نیچے کا جسم مستوی ہو یعنی $ر_۱$ لا متناہی ہو تو تعادل قائم ہوگا اگر

$$\frac{۱}{ھ} > \frac{۱}{ر} \quad \text{یعنی اگر } ھ < ر$$

اس لئے اگر کسی جسم کا پیندا کروی ہو اور اس کو کسی میز پر رکھا جائے تو اس کا تعادل قائم ہوگا بشرطیکہ نقطہ تماس سے اس کے مرکز ثقل کا فاصلہ کروی سطح کے نصف قطر سے کم ہو -

**۱۵۷ -** سطحوں کے وہ حصے جو ایک دوسرے سے مس کرتے ہیں کروی نہ ہوں بلکہ ایسی سطحیں ہوں جن کے انحنا کے نصف قطر بالترتیب $ر_۱$ اور ر ہوں تو بھی اسی طرح سے معلوم ہو سکتا ہے کہ تعادل قائم ہوگا یا غیر قائم اگر بالترتیب

$$\frac{۱}{ھ} \gtrless \frac{۱}{ر_۱} + \frac{۱}{ر}$$

تعدیلی یا انتہائی صورت میں جبکہ $\frac{1}{\text{ھ}} = \frac{1}{\text{ر}_1} + \frac{1}{\text{ر}}$ تعادل کے قیام پر غور کرنا قدرے مشکل کام ہے۔ اس مسئلہ کے متعلق طالب علم کو چاہیئے کہ راؤ تھ کی تحلیلی سکونیات یا منشن Minchin. کی سکونیات کا مطالعہ کرے۔

وہاں یہ بتایا گیا ہے کہ تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا اگر بالترتیب

$$\frac{\text{فر}}{\text{فس}}\left(\frac{1}{\text{ر}_1}\right) + \frac{\text{فر}_1}{\text{فس}}\left(\frac{1}{\text{ر}}\right)$$

منفی ہو یا مثبت۔

اگر یہ شرط ناکام رہے اور یہ شرط یقیناً ناکام رہے گی جبکہ نقاط تماس اعظم اور اقل انحنا کے نقطے ہیں تو تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا اگر بالترتیب

$$\frac{\text{فر}^2}{\text{فس}^2}\left(\frac{1}{\text{ر}_1}\right) + \frac{\text{فر}_1^2}{\text{فس}^2}\left(\frac{1}{\text{ر}}\right) + \frac{(\text{ر}_1 + \text{ر})(\text{ر}_1 + 2\text{ر})}{\text{ر}_1^3\ \text{ر}^2}$$

منفی ہو یا مثبت ہو۔

## امثلہ

۱۔ ایک جسم ایک نصف کرہ اور ایک مخروط کے مساوی مستوی قاعدوں کو جوڑنے سے بنایا گیا ہے اور اسے ایک مستوی کھردری میز پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ نصف کرہ میز سے مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مخروط کی بڑی سے بڑی اونچائی جس سے جسم قائم تعادل کی حالت میں ساکن رہ سکتا ہے نصف کرہ کے نصف قطر کی $\sqrt{3}$ گنا ہے۔

۲۔ ایک نصف کرہ مساوی نصف قطر کے ایک کرہ پر بحالت توازن ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ اگر نصف کرہ کی منحنی سطح کرہ سے مس کرتی ہو تو تعادل غیر قائم ہوگا اور اگر مستوی سطح کرہ سے مس کرتی ہو تو تعادل قائم ہوگا۔

۳۔ ایک یکساں سلاخ جس کی موٹائی ۲ ب ہے نصف قطر د کے بالکل کھردرے افقی اسطوانہ پر متشاکلاً ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا اگر بالترتیب ب < د یا ب > د۔

۴ —— ایک وزنی یکساں مکعب ایک کرہ کے بالاترین نقطہ پر ساکن ہے کرہ کا نصف قطر ر ہے۔ اگر کرہ اس قدر کھردرا ہو کہ مکعب پھسل نہ سکے اور اگر مکعب کا ہر ضلع $\frac{\pi ر}{۲}$ ہو تو ثابت کرو کہ مکعب گرنے کے بغیر ایک زاویہ قائمہ میں سے جھول سکتا ہے۔

۵ —— ایک مساوی الساقین مثلث کی شکل کا ایک پترا ہے جس کا راسی زاویہ عہ ہے اس کو ایک کرہ پر جس کا نصف قطر ر ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کی سطح مستوی انتصابی ہے اس کے مساوی اضلاع میں سے ایک ضلع کرہ سے مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر مثلث کو اپنی سطح مستوی میں ذرا سا ہلا دیا جائے تو تعادل قائم ہوگا اگر جب عہ کم ہو $\frac{۳ر}{ا}$ سے جہاں ا مثلث کے مساوی اضلاع میں سے ایک کا طول ہے۔

۶ —— ایک ٹھوس متجانس نصف کرہ کا نصف قطر ر ہے۔ اس کے مستوی قاعدہ پر اُسی شئے کا ایک قائم مخروط بنایا گیا ہے اس جسم کو نصف قطر س کے ایک دوسرے ثابت کرہ کی محدب سطح پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ مخروط کا محور انتصابی ہے۔ ثابت کرو کہ ذرا سے ہٹاؤ کے لئے تعادل قائم رکھنا مقصود ہو تو مخروط کا ارتفاع زیادہ سے زیادہ

$$\frac{ر}{س+۴ر}\left[\sqrt{ر(۳س+ر)(س-ر)}-۲ر\right]$$ ہوسکتا ہے۔

۷ —— ایک معلومہ وزن ث ایک رسی کے ذریعے جو ثابت چرخی پر سے گزرتی ہے اور جس کا مقام معلوم ہے کسی چکنی سطح مائل پر ایک اور وزن و کو سنبھالے ہوئے ہے۔ سطح مستوی پر و کے تعادل کا محل معلوم کرو۔ بتاؤ کہ یہ قائم ہے۔

۸ —— ایک کھردرا یکساں مستدیر قرص ہے جس کا نصف قطر ر اور وزن ع ہے یہ قرص ایک ایسے نقطہ کے گرد جس کا فاصلہ اس کے مرکز سے ج ہے حرکت کرسکتا ہے۔ ایک رسی جو اس قدر کھردری ہے کہ پھسل نہیں سکتی اس کے محیط پر لٹک رہی ہے اور اس کے سروں سے اوزان و اور وَ بندھے ہیں۔ تعادل کے محل معلوم کرو اور بتاؤ کہ یہ قائم ہیں یا غیر قائم۔

۹ —— ایک ٹھوس کرہ ایک اور ثابت کھردرے نصف کروی پیالے کے اندر جس کا نصف قطر اس کے نصف قطر کا دوچند ہے ساکن پڑا ہے۔ ثابت کرو کہ کرہ کے بالاترین نقطے پر خواہ کتنا ہی وزن رکھا جائے ہر حالت میں تعادل قائم ہوگا۔

۱۰ — ایک پتلا نصف کروی پیالہ جس کا نصف قطر ب اور وزن و ہے ایک اور ثابت کرہ کے بالاترین نقطہ پر بحالت تعادل ساکن ہے ثابت کرو کہ اگر نصف قطر ا ہے اور یہ اس قدر کھردرا ہے کہ پیالہ پھسل نہیں سکتا پیالہ کے اندر ایک چھوٹا اور چکنا کرہ پڑا ہے جس کا وزن و' ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل قائم نہیں ہوسکتا بجز اس صورت کے جب کہ

$$و' > و \frac{ا - ب}{۲ب}$$

۱۱ — ایک کرہ پانی کے ایک برتن کے اندر جزوتاً ڈوبا ہوا ہے ثابت کرو کہ کرہ قاعدہ کے کسی محدب حصہ کی چوٹی پر بحالت قائم تعادل ساکن نہیں رہ سکتا۔

۱۲ — تین مساوی ذرے ہیں جو ایک دوسرے کو [illegible] قوت سے کھینچتے ہیں جو ان کے فاصلوں کے ن ویں قوت کی نسبت سے ہیں۔ ان کو تین مساوی لچکدار رسیوں سے مربوط کیا گیا ہے۔ تعادل کا محل معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ قائم ہوگا اگر $ن > \frac{ل}{ل - ا}$ جہاں ا کسی رسی کا بغیر کھچاؤ کے طول ہے اور ل کھچاؤ کے بعد اس کا طول ہے۔

۱۳ — ایک ٹھوس ناقص نما جس کے محوروں کے طول ۲ا، ۲ب، ۲ج ہیں۔ ایک کھردرے مستوی پر اس طرح ساکن ہے کہ ج کا محور انتصابی ہے۔ مرکز ثقل انتصابی محور پر نچلے راس سے فاصلہ ھ پر ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل قائم ہوگا اگر ھ کم ہو $\frac{ا^۲}{ج}$ اور $\frac{ب^۲}{ج}$ دونوں سے۔

۱۴ — ایک [illegible] مخروط ایک ثابت کروی مکافی نما پر اس طرح ساکن ہے کہ اس کے قاعدہ کا مرکز مکافی نما کے [illegible] کون مکافی کے [illegible] سے ثابت کرو [illegible] تعادل [illegible] ہے۔

۱۵ — ایک ذرّی جسم جس کی تراش [illegible] ایک کھردرے [illegible] سطح مستوی پر ساکن ہے اور اس کا مرکز ثقل نقطہ تماس پر کے [illegible] پر منطبق [illegible] ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل غیر قائم ہے۔

۱۶۔ گردشی مکافی نما سے کے ایک ٹھوس مقطوع ع کی بلندی ھ اور وترخاص ۴ا ہے۔ یہ ایک اور گردشی مکافی نما پر اس طرح ساکن ہے کہ دونوں کے راس ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ موخرالذکر مکافی نما کا وتر خاص ۴ب ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل قائم ہوگا

اگر ھ < $\frac{۳ اب}{ا + ب}$

۱۷۔ ایک پتیر اخط تدویر کی شکل کا ہے جس کا کون دائرہ کا نصف قطر ا ہے۔ یہ ایک اور خط تدویر پر جس کا کون دائرہ کا نصف قطر ب ہے اس طرح ساکن ہے کہ دونوں کے راس ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ اور دونوں کے محور انتصابی ہیں۔ اگر اوپر کے خط تدویر کے مرکز ثقل کی بلندی اس کے راس کے اوپر ھ ہو تو ثابت کرو کہ تعادل قائم صرف اسی صورت میں ہوگا جبکہ ھ < $\frac{۴ اب}{ا + ب}$ ورنہ غیر قائم ہوگا۔

۱۸۔ ایک مکافی نما پیالہ جس کا وزن و ہے ایک افقی میز پر پڑا ہے۔ اس کے اندر کچھ پانی ہے جس کا وزن ن و ہے اگر پیالہ اور پانی کے مرکز ثقل کی بلندی ھ ہو تو ثابت کرو کہ تعادل قائم ہوگا اگر مکافی کا وتر خاص > ۲ (ن + ۱) ھ۔

۱۵۸۔ فرض کرو کہ ہمارے پاس ایک جسم یا جسموں کا ایک نظام ہے جن پر سوائے اُن کے وزنوں کے اور کوئی قوت عمل نہیں کر رہی ہے اور جو چکنی ثابت سطحوں کے تعامل سے یا دیگر قوتوں سے جو موہوم کام کی مساوات میں نہیں آتیں سہارے ہوئے ہیں۔ تب اگر جسموں کے وزن $و_۱$، $و_۲$ .... ہوں اور کسی ثابت سطح مستوی کے اوپر ان کے مرکز ثقلوں کی بلندیاں $ی_۱$، $ی_۲$ .... ہوں تو موہوم کام کی مساوات ہوجاتی ہے

$$- و_۱ \text{ مف } ی_۱ - و_۲ \text{ مف } ی_۲ - و_۳ \text{ مف } ی_۳ + ..... = ۰$$

اگر پورے نظام کا کل وزن د ہو اور اس کے مرکز ثقل کی بلندی $\bar{ی}$ ہو تو موہوم کام کی مساوات ہوتی ہے

$$- د \text{ مف } \bar{ی} = ۰$$

لیکن مف ی = ۰ اس بات کی شرط ہے کہ مرکز ثقل کی بلندی کی اعظم یا اقل قیمت ہو۔

اگر مرکز ثقل کی بلندی حقیقتاً بڑی سے بڑی ہے تو نظام کے کسی چھوٹے سے چھوٹے ہٹاؤ کے لئے مرکز ثقل نیچا ہو جائیگا۔ اب اگر اس قسم کے ہٹاؤ کے بعد نظام کو لمحہ بھر کے لئے ساکن کرکے چھوڑ دیا جائے تو ظاہر ہے کہ یہ اپنے ابتدائی محل تعادل کی طرف واپس نہیں آئے گا۔ کیونکہ یہ بات علم حرکت کے اس اصول کے خلاف ہے کہ اس قسم کے کسی نظام کی توانائی بالحرکت انجام شدہ کام کے مساوی ہوتی ہے۔ پس نظام اپنے محل تعادل کی طرف واپس نہیں جائے گا بلکہ اس سے اور دور ہٹ جائے گا۔ ایسی صورت میں تعادل کو غیر قائم تعادل کہتے ہیں۔

اگر مرکز ثقل کی بلندی حقیقتاً چھوٹی سے چھوٹی ہو تو کسی چھوٹے سے چھوٹے ہٹاؤ کے لئے مرکز ثقل کی بلندی بڑھ جائے گی۔ اس صورت میں اگر نظام کو ایک لمحہ کے لئے ساکن کرکے چھوڑ دیا جائے تو وہ اپنے ابتدائی محل تعادل کی طرف عود کر آئیگا۔ اس لئے اس صورت میں تعادل کو قائم تعادل کہتے ہیں۔

لہذا کسی جسم یا جسموں کے کسی نظام کا تعادل حسب ذیل طریقہ سے معلوم ہو سکتا ہے۔ کسی ثابت سطح مستوی سے اوپر جسم کے مرکز ثقل کی بلندی ی کو کسی غیر تابع متغیر طہ کے تفاعل کے طور پر بیان کرو۔ مساوات $\frac{\text{فر ی}}{\text{فر طہ}} = ۰$ کو طہ کے لئے حل کرو اور فرض کرو کہ طہ = عہ، بہ، جہ، ....۔ اگر $\frac{\text{فر}^۲\text{ ی}}{\text{فر طہ}^۲}$ کی قیمت میں طہ = عہ درج کرنے سے یہ مثبت ہو جائے یعنی ی حقیقتاً اقل ہو تو طہ = عہ سے قائم تعادل کا ایک محل حاصل ہوگا۔

اگر $\frac{\text{فر}^۲\text{ ی}}{\text{فر طہ}^۲}$ کی قیمت میں طہ = عہ درج کرنے سے یہ قیمت منفی ہو جائے یعنی ی حقیقتاً اعظم ہو تو طہ = عہ سے غیر قائم تعادل کا ایک محل حاصل ہوگا۔

جیسے جیسے نظام حرکت کرکے مختلف محل اختیار کرے اس کا مرکز ثقل کوئی منحنی مرتسم کرے گا اور ہم جانتے ہیں کہ اس منحنی کے اعظم اور اقل معیّن عتبادلاً

واقع ہونگے اس لئے ظاہر ہے کہ غیر قائم اور قائم تعادل کے محل متبادلاً واقع ہوتے ہیں۔

**۱۵۹ ۔ مشق ۱** ۔ ایک مربع پترا دو چکنی میخوں پر جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں اس طرح ساکن ہے کہ اس کی سطح انتصابی ہے ثابت کرو کہ تعادل کا صرف ایک محل ہے تاوقتیکہ میخوں کا درمیانی فاصلہ مربع کے قطر کے ایک چوتھائی سے بڑا نہ ہو لیکن اگر بڑا ہو تو تعادل کے تین محل ہو سکتے ہیں جن میں سے متشاکل محل قائم تعادل کا محل ہوگا اور باقی دو محل غیر قائم تعادل کے۔

ج د ث ق ن ف ب ا لا

فرض کرو کہ ا ب ج د مربع ہے اور ف اور ق دو میخیں ہیں۔
فرض کرو کہ قطر اج = ۲ د اور اج افقی خط الا کے ساتھ زاویہ فہ بناتا ہے۔ ف ق سے اوپر مرکز ثقل ث کی بلندی ث ن (= ی) جملہ ذیل سے حاصل ہوتی ہے

ی = اث جب فہ − اف جب (فہ − ۴۵)

= د جب فہ − ج جم (فہ − ۴۵°) جب (فہ − ۴۵°) اگر ف ق = ج

یعنی ی = د جب فہ + ج/۲ جم ۲ فہ ... ... (۱)

∴ فر ی / فر فہ = د جم فہ − ج جب ۲ فہ ... ... (۲)

اور فر۲ ی / فر فہ۲ = − د جب فہ − ۲ ج جم ۲ فہ ... ... (۳)

اب چونکہ میخیں چکنی ہیں اس لئے موہوم کام کی مساوات ہو جاتی ہے وہ ف ی = ۰ اس لئے (۲) کی رو سے تعادل کے محل مساوات ذیل سے معلوم ہوتے ہیں

جم فہ (د − ۲ ج جب فہ) = ۰ ... ... (۴)

اس مساوات کے حل ہیں فہ = ۹۰ اور جب فہ = $\frac{د_۱}{۲ ج_۱}$

آخری مساوات کی اصلیں حقیقی صرف اسی صورت میں ہو سکتی ہیں جبکہ ۲ ج$_۱$ > د$_۱$

یعنی جبکہ ف ق > $\frac{۱}{۲}$ ا ج

اب اس صورت پر غور کرو جبکہ ۲ ج$_۱$ > د$_۱$

اب تعادل کے تین محل ہیں۔ پہلا وہ ہے جس میں ا ج انتصابی ہے اور باقی دو محل وہ ہیں جن میں ا ج خط انتصابی کے دونوں طرف خط افقی کے ساتھ زاویہ

جب$^{-۱}$ $\frac{د_۱}{۲ ج_۱}$ بناتا ہے۔

جب فہ = ۹۰° تو (۳) کی رو سے $\frac{فز^۲ یؔ}{فز فہ^۲}$ = − د$_۱$ + ۲ ج$_۱$ اور یہ مثبت ہے۔

اس لئے یؔ کی یہ قیمت اقل ہے اور اس لئے تعادل قائم ہے۔

اگر جب فہ = $\frac{د_۱}{۲ ج_۱}$ تو $\frac{فز^۲ یؔ}{فز فہ^۲}$ = − د$_۱$ جب فہ − ۲ ج$_۱$ + ۴ ج$_۱$ جب$^۲$ فہ = $\frac{د_۱^۲ - ۴ ج_۱^۲}{۲ ج_۱}$

اور یہ منفی ہے اس لئے اس صورت میں یؔ اعظم ہے اور بناءً علیہ تعادل غیر قائم ہے۔

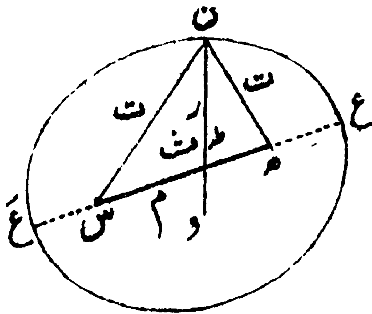
اب وہ صورت لو جس میں ۲ ج$_۱$ < د$_۱$۔

اس صورت میں تعادل کا صرف ایک محل ہے جو فہ = ۹۰° سے حاصل ہوتا ہے اور تب

$\frac{فز^۲ یؔ}{فز فہ^۲}$ = − د$_۱$ + ۲ ج$_۱$ = منفی

اس لئے یؔ اعظم ہے اور تعادل غیر قائم ہے۔

**مشق ۲** — ایک سلاخ س ھ ہے جس کا طول ۲ ج ہے اور جس کا مرکز ثقل ث اس کے وسطی نقطہ و سے فاصلہ د پر ہے سلاخ کے دونوں سروں سے ۲ ج قطع عہ طول کی ایک رسی باندھ کر اس کو ایک چکنی میخ ن پر لٹکایا گیا ہے تعادل کا محل معلوم کرو اور دکھاؤ کہ وہ محل جو انتصابی نہیں ہے غیر قائم ہے۔




چونکہ س ن + ن ھ = ۲ ج قطا عہ

اس لئے ضروری ہے کہ میخ اس ناقص پر کہیں نہ کہیں واقع ہو جس کے ماسکے س اور ھ ہیں اور جس کا نصف محور اعظم ج قطا عہ ہے۔

نیز اس کا نصف محور اصغر

= √(ج² قطا² عہ − م ھ²) = ج مس عہ

پس ناقص کی مساوات ہے لا² جب² عہ + ما² = ج² مس² عہ یا ث میں سے گزرنے والے قطبی محوروں کے لحاظ سے

جب² عہ (ر جم طہ + د)² + ر² جب² طہ = ج² مس² عہ ۔ ۔ ۔ ۔ (۱)

اگر ہم طہ کی وہ قیمت معلوم کر لیں جس کے لئے ر اعظم یا اقل ہے اور ناقص پر کے متناظر نقطہ ن کو میخ کا مقام تصور کریں اور ن ث کو انتصابی بنائیں تو ہمیں تعادل کا ٹیڑھا محل معلوم ہو جائے گا۔

(۱) سے حاصل ہوتا ہے

جم² طہ × ر² جم² عہ − ۲ جم طہ × د ر جب² عہ = ر² − ج² مس² عہ + د² جب² عہ

اس لئے جم طہ = [د جب عہ مس عہ + √(ر² − (ج² − د²) مس² عہ)] ÷ ر جم عہ

ر کی کم سے کم قیمت صریحاً √(ج² − د²) مس عہ ہے اور اس وقت جم طہ = د مس عہ ÷ √(ج² − د²)

چونکہ اس صورت میں ر کی قیمت اقل ہے اس لئے سلاخ کا مرکز ثقل میخ سے نیچے اپنی کم سے کم گہرائی پر ہے اور اس لئے خط افقی سے اوپر بڑی سے بڑی اونچائی پر ہے، لہٰذا تعادل غیر قائم ہے۔ تعادل کے باقی دو محل وہ ہیں جبکہ ن ، ع یا عَ پر منطبق

ہو۔ ان صورتوں میں سلاخ صریحاً انتصابی ہوگی۔

اگر ت ن اقل ہو تو ظاہر ہے کہ ت ن ، ن پر کا عماد ہوگا۔ پس نقطہ ن کا مقام اس امر سے بھی معلوم ہو سکتا ہے کہ یہ وہ نقطہ ہے جس پر کا عماد محور اعظم پر کے ایک معلومہ نقطہ ت میں سے گزرتا ہے۔

۱۶۰۔ دفعہ ۱۵۶ کے سوال کے قیام تعادل پر بھی اسی طرح بآسانی غور کر سکتے ہیں کیونکہ اگر صورت اول میں د کے اوپر ث کا ارتفاع ی ہو تو

$$ی = (س + ر) جم ط - (ر - ھ) جم \frac{س + ر}{ر} ط \quad \ldots \quad (۱)$$

$$\therefore \frac{ف ی}{ف ط} = -(س + ر) جب ط + (ر - ھ) \frac{س + ر}{ر} جب \frac{س + ر}{ر} ط \quad \ldots \quad (۲)$$

$$\therefore \frac{ف^۲ ی}{ف ط^۲} = -(س + ر) جم ط + (ر - ھ) \left(\frac{س + ر}{ر}\right)^۲ جم \frac{س + ر}{ر} ط \quad \ldots \quad (۳)$$

ی کی ایک اعظم یا اقل قیمت صریحاً ط = ۰ سے حاصل ہوتی ہے۔ تب ی کی متناظر قیمت چھوٹی سے چھوٹی یا بڑی سے بڑی ہوگی اور بنا بر علیہ تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا اگر بالترتیب $\frac{ف^۲ ی}{ف ط^۲}$ مثبت ہو یا منفی

یعنی اگر $-(س + ر) + (ر - ھ)\left(\frac{س + ر}{ر}\right)^۲$ مثبت ہو یا منفی

یعنی اگر $ھ \gtrless \frac{س ر}{س + ر}$

اگر ھ اس قیمت کے مساوی ہو تو $\frac{ف^۲ ی}{ف ط^۲} = ۰$ جبکہ ط = ۰

اور احصائے تفرقات کے قواعد کی رو سے ہمیں بالا تر رتبہ کے تفرقی سروں پر غور کرنا چاہیئے۔

اس صورت میں

$$\frac{ف^۲ ی}{ف ط^۲} = (س + ر)\left[- جم ط + جم \left(\frac{س + ر}{ر} ط\right)\right]$$

∴ (فر۳ یؔ / فر طہ۳) = (سا + ر) [جب طہ - ((سا + ر) / ر) جب ((سا + ر) / ر طہ)]

اور (فر۴ یؔ / فر طہ۴) = (سا + ر) [جم طہ - ((سا + ر) / ر)۲ جم ((سا + ر) / ر طہ)]

اگر طہ = ۰ تو (فر۳ یؔ / فر طہ۳) صفر ہوگا اور (فر۴ یؔ / فر طہ۴) منفی ہوگا۔

اس لئے یؔ اعظم ہے اور تعادل غیر قائم ہے۔

دوسری صورت میں و کے نیچے ث۲ کی گہرائی ہیؔ ہو تو

یؔ = (سا - ر) جم طہ - (ھ - ر) جم ((سا - ر) / ر) طہ

اور تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا اگر بالترتیب یؔ اعظم یا اقل ہو

یعنی اگر بالترتیب (فر۲ یؔ / فر طہ۲) منفی ہو یا مثبت ہو جبکہ طہ = ۰

یعنی اگر بالترتیب حسب سابق ھ ≷ (ر سا / (سا - ر))

اگر ھ اس قیمت کے مساوی ہو تو

(فر۲ یؔ / فر طہ۲) = (سا - ر) [جم طہ + جم ((سا - ر) / ر طہ)]

تب (فر۳ یؔ / فر طہ۳) صفر ہوگا جبکہ طہ صفر ہو اور (فر۴ یؔ / فر طہ۴) منفی یا مثبت ہوگا اگر بالترتیب

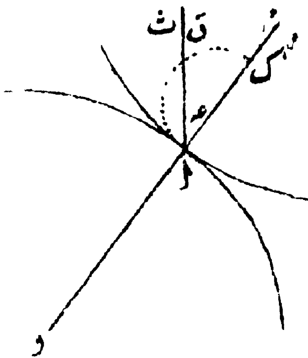
۱ - ((سا - ر) / ر)۲ منفی یا مثبت ہو

یعنی اگر سا ≷ ۲ ر

اس لئے یؔ اعظم یا اقل ہوگا اور بناءً علیہ تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا اگر سا ≷ ۲ ر

۱۶۱ — اگر دفعہ ۱۵۶ کے سوال میں جسم کے محل توازن میں مشترک عماد انتصابی نہ ہو

تو اس صورت میں سوال پر ذیل کے طریقہ سے غور کر سکتے ہیں بشرطیکہ ہٹاؤ ایسا ہو کہ مرکز ثقل (ث) مشترک عماد میں سے گزرنے والے انتصابی سطح مستوی میں حرکت کرے۔




فرض کرو کہ نقطہ تماس ا پر اوپر کے اور نیچے کے جسموں کے انحنا کے نصف قطر بالترتیب ر۱ اور ر ہیں۔ کیونکہ تعادل کا محل ہے اس لئے ث انتصاباً ا کے اوپر ہوگا۔ فرض کرو کہ ا ث = ھ

اور > ث ا و = عہ

تو تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا۔ اگر اوپر کے جسم کو ذرا سا ہٹانے پر جسم کا مرکز ثقل ث بالترتیب اوپر یا نیچے کی طرف حرکت کرے یعنی اگر بالترتیب ث کے طریق کی تقعیر اوپر کی طرف یا نیچے کی طرف ہو یعنی اگر بالترتیب ث کے طریق کا مرکز انحنا ث سے اوپر یا نیچے ہو۔

گردونیات کے انحنا کے نظریہ کی رو سے ث کے طریق کا نصف قطر انحنا م ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{جم عہ}}{\text{م} - \text{ھ}} + \frac{\text{جم عہ}}{\text{ھ}} = \frac{1}{\text{ر}_1} + \frac{1}{\text{ر}}$$

جس سے $\text{م} = \dfrac{\text{ھ}\left(\frac{1}{\text{ر}_1} + \frac{1}{\text{ر}}\right)}{\frac{1}{\text{ر}_1} + \frac{1}{\text{ر}} - \text{جم عہ}/\text{ھ}}$

جہاں ث سے ا کی طرف م کے ناپنے کو مثبت قرار دیا جائے اس لئے م مثبت ہوگا یا منفی جبکہ ث کے طریق کا مرکز انحنا ث سے نیچے ہوگا یا اوپر

یعنی اگر بالترتیب $\frac{1}{\text{ر}_1} + \frac{1}{\text{ر}} >$ یا $< \frac{\text{جم عہ}}{\text{ھ}}$

یعنی اگر بالترتیب ھ > یا < $\frac{ر_۱ ر_۲}{ر_۱ + ر_۲}$ جم عہ

پس توازن قائم یا غیر قائم ہوگا جبکہ بالترتیب ھ < یا > $\frac{ر_۱ ر_۲}{ر_۱ + ر_۲}$ جم عہ

اگر ہم ا د پر اک اتنا ناپ لیں کہ $\frac{۱}{اک} = \frac{۱}{ر_۱} + \frac{۱}{ر_۲}$

اور اس لئے اک = $\frac{ر_۱ ر_۲}{ر_۱ + ر_۲}$ اور اگر ا ث اس دائرہ سے جو اک کو قطر مان کر کھینچا جائے ق پر ملے تو

$$ا ق = اک جم عہ = \frac{ر_۱ ر_۲}{ر_۱ + ر_۲} جم عہ$$

پس تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا اگر بالترتیب ھ < یا > ا ق

یعنی اگر بالترتیب ث دائرہ کے اندر یا باہر واقع ہو اس دائرہ کو اس بنا پر قیام کا دائرہ کہتے ہیں۔

اگر ث اس دائرہ پر واقع ہو تو اس کا تعادل تقرب کے پہلے درجہ تک تعدیلی ہوگا اس صورت میں اس کے طریق کا نصف قطر انحنا لا متناہی ہوگا اور ث اس کے طریق پر نقطہ انعطاف ہوگا اس دائرہ کو اس لئے اکثر اوقات انعطافوں کا دائرہ بھی کہتے ہیں۔

# مثالیں

۱۔ ایک وزنی یکسان سلاخ اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سرا ایک چکنی انتصابی دیوار کے ساتھ ٹکا ہوا ہے اور اس کے طول پر کا ایک اور نقطہ ایک چکنی میخ پر ساکن ہے۔ تعادل کا محل معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ غیر قائم ہے۔

۲۔ دو مساوی یکساں سلاخوں کو ایک سرے پر مضبوطی سے جوڑ دیا گیا ہے اور ان کے درمیان زاویہ عہ بنتا ہے اور یہ نصف قطر ر کے ایک چکنے کرہ پر انتصابی سطح مستوی میں ساکن ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ تعادل قائم یا غیر قائم میں ہونگی اگر بالترتیب ہر ایک سلاخ کا طول > < ۴ ر قم عہ

۳۔۔۔ ایک شہتیر کے سرے دو چکنی مائل سطحوں پر جو افق کے ساتھ زاویئے α اور β بناتی ہیں اور جن کا خط تقاطع افقی ہے ساکن ہیں۔ تعادل کا محل معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ غیر قائم ہے۔

۴۔ ایک یکساں وزنی سلاخ ا ب قبضہ ا کے گرد انتصابی سطح مستوی میں آزادانہ حرکت کرسکتی ہے دوسرے سرے ب کو ایک وزن کے ذریعہ جو ا کے انتصاباً اوپر ایک چکنی چرخی ج پر سے گزرتا ہے سہارا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل کا وہ محل جس میں ا ب سمت انتصابی کے ساتھ کوئی میلان رکھتا ہو غیر قائم ہے۔

۵۔۔۔ ایک چکنی سلاخ ا ب ہے جس کا وزن و ہے۔ اس کا ایک سرا ا ایک چکنی افقی سطح مستوی ا ج پر ساکن ہے اور دوسرا سرا ب ایک چکنی انتصابی دیوار ب ج کے ساتھ ٹکا ہوا ہے۔ سرے ا کے ساتھ ایک رسی بندھی ہوئی ہے جو ج پر ایک چکنی چرخی پر سے گزرتی ہوئی ایک وزن وَ کو سہارے ہوئے ہے۔ ا ب/ ج ایک انتصابی سطح مستوی میں ہیں۔ تعادل کا محل معلوم کرو اور بتاؤ کہ یہ غیر قائم ہے۔

۶۔۔ ثابت کرو کہ دفعہ ۶ ۵ مشق ۲ کی سلاخ کا تعادل قائم ہے۔

۷۔۔ چار یکساں سلاخیں ہیں جن میں سے ہر ایک کا طول ۲ ل ہے، ان کے سروں کو جوڑنے سے ایک معین بنایا گیا ہے اور اس معین کو دو چکنی میخوں پر جو ایک ہی افقی خط میں ہیں اور جن کا درمیانی فاصلہ ا $\sqrt{2}$ ہے اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ میخیں مختلف سلاخوں سے مس کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ نظام تعادل میں ہوگا جبکہ معین مربع ہو لیکن یہ تعادل تمام ہٹاؤں کے لئے قائم نہیں ہے۔

۸۔۔۔ ایک مربع پتھرے کے ایک کونے کے ساتھ ایک رسی بندھی ہے جس کا طول مربع کے ایک ضلع کے مساوی ہے۔ رسی کے ایک سرے کو دیوار کے ایک نقطہ کے ساتھ باندھ کر پتھرے کو اس طرح متعادل رکھا گیا ہے کہ اس کی سطح مستوی دیوار پر عمود وار ہے۔ تعادل کا محل معلوم کرو اور بتاؤ کہ یہ قائم ہے۔

۹۔۔ ایک یکساں مساوی الساقین پترا ا ب ج ہے یہ پترا دو چکنی میخوں پر جن کا درمیانی فاصلہ ج ہے اور جن کا خط وصل افقی ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کے ضلع ا ب اور ا ج میخوں سے مس کرتے ہیں۔ اگر ب ج پر عمود ا د / ھ

سے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ تعادل کے تین محل ہیں ان میں ایک جس میں ا د انتصابی ہے قائم ہے اور باقی دو غیر قائم ہیں اگر ھ < ۳ ج قم ا۔ لیکن اگر ھ > ۳ ج قم ا تو تعادل کا صرف ایک محل ہے جو غیر قائم ہے۔

۱۰ — ایک مربع تختہ کو ایک رسی کے ذریعہ جو اس کے اوپر کے دو کناروں کے ساتھ بندھی ہے اور ایک کھونٹی پر سے گزرتی ہے دیوار کے ساتھ اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ تختہ کی سطح دیوار سے مس کرتی ہے۔ اگر رسی کا طول تختہ کے بین زاویٔ سے کم ہو تو ثابت کرو کہ تعادل کے تین محل ہیں نیز بتاؤ کہ تشاکل کا محل غیر قائم ہے۔

۱۱ — ایک مستطیل تصویر ہے جس کے اوپر کے کنارہ کے دو متشاکل نقطوں کے ساتھ جن کا درمیانی فاصلہ ج فٹ ہے ایک رسی کے دو سرے باندھ دئے گئے ہیں اور اس رسی کے ذریعہ تصویر کو ایک چکنی کھونٹی پر اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ تصویر انتصاباً لٹک رہی ہے اگر تصویر کی بلندی و ہو تو ثابت کرو کہ اگر ل و > ج $\sqrt{\text{ج}^2 + \text{و}^2}$ تو تعادل کا کوئی ایسا محل نہیں ہے جس میں تصویر کا ضلع افق کے ساتھ کوئی زاویہ بناتا ہو۔ لیکن اگر ل و < ج $\sqrt{\text{ج}^2 + \text{و}^2}$ تو تعادل کے دو محل ہیں اور دونوں قائم ہیں جہاں ل رسی کا طول ہے

یہ بھی ثابت کرو کہ موخر الذکر صورت میں وہ محل جس میں یہ ضلع انتصابی ہے بعض مثالوں کے لئے قائم اور بعض کے لئے غیر قائم ہے۔

۱۲ — ایک چکنا قطع ناقص ہے جس کا محور انتصابی ہے، اس کے اندر ایک سلاخ رکھی گئی ہے جس کے دونوں سرے ناقص کی قوس پر ہیں۔ اگر سلاخ کا طول ناقص کے وتر خاص سے کم ہو تو ثابت کرو کہ تعادل کے محل میں یہ ماسکہ میں سے گزرے گی۔

۱۳ — ایک یکساں سلاخ کو جس کا طول ۲ و ہے ایک مکافی تار کے دونوں سروں کے ساتھ چکنے حلقوں کے ذریعہ باندھ دیا گیا ہے۔ تار کا محور انتصابی ہے راس نیچے کی طرف اور وتر خاص ۴ و ہے، ثابت کرو کہ تعادل کے مائل محل میں سلاخ افق کے ساتھ جو زاویہ طہ بناتی ہے وہ جم۲ طہ = $\frac{\text{۲ا}}{\text{ل}}$ سے حاصل ہوتا ہے اور اگر یہ محل وجود رکھتے ہوں تو وہ

قائم تعادل کے محل ہونگے۔

۱۴— ایک یکساں سلاخ ایک چکنے گردشی مکافی نما کے اندر جس کا محور انتصابی اور راس نیچے کی طرف ہے متوازی الافق محل میں ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ اگر سلاخ ماسکہ سے نیچے ہو تو انتصابی سطح مستوی میں سب ہٹاؤں کے لیئے تعادل قائم ہوگا اور اگر اوپر ہو تو غیر قائم ہوگا۔

۱۵- ایک ٹھوس نصف کرہ ہے جو ایک سطح مستوی پر جو افق کے ساتھ زاویہ $\alpha < \text{جب}^{-1}\frac{3}{8}$ بناتی ہے ساکن ہے اور سطح مستوی اس قدر کھردری ہے کہ نصف کرہ پھسل نہیں سکتا۔ تعادل کا محل معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ قائم ہے۔

۱۶— ایک مکمل طور پر کھردرا کرہ ہے جس کا نصف قطر ا ہے، اسے ایک مستوی رخ والا جسم مس کرتا ہے اور نقطہ تماس پر کا عماد خطِ انتصابی کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہے۔ اگر مرکز ثقل نقطۂ تماس سے انتصاباً اوپر ھ فاصلہ پر ہو تو ثابت کرو کہ تعادل قائم ہوگا اگر ھ < ا جم ط اور غیر قائم ہوگا اگر ھ > ا جم ط۔

۱۷— ثابت کرو کہ اگر کسی قطع ناقص کے قطر کے ذریعہ اس کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے اور ایک نصف کو اس کی منحنی سطح کے بل کسی افقی سطح مستوی پر رکھا جائے تو تعادل کا ایک محل قائم ہوگا اگر خروج المرکز $\frac{2}{\sqrt{3\pi}}$ سے کم ہو۔

۱۸— ایک ناقصی اسطوانہ کو ایک مائل مستوی پر جو افق کے ساتھ رگڑ کے زاویہ سے کم زاویہ بناتی ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور متوازی الافق ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ ساکن نہیں رہ سکتا اگر سطح مائل کا میلان $\text{جب}^{-1}\left(\frac{\text{ا}^2-\text{ب}^2}{\text{ا}^2+\text{ب}^2}\right)$ سے کم ہو اور اگر میلان $\text{جب}^{-1}\left(\frac{\text{ا}^2-\text{ب}^2}{\text{ا}^2+\text{ب}^2}\right)$ کے مساوی ہو تو تعادل پہلے تقرب تک تعدیلی ہوگا۔

۱۹— ایک ناقصی قرص جس کے نصف محور ا اور ب ہیں ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح پھسلتا ہے کہ ہمیشہ وہ چکنی سلاخوں ز ل اور و ق سے مس کرتا ہے جو اسی سطح مستوی میں علی القوائم واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ قائم تعادل کے محلوں میں ناقص کا

محور اعظم ایک نہ ایک سلاخ کے متوازی ہوگا اور غیر قائم تعادل کے محل میں یہ و ل کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے جہاں $\text{جب}^2\,\text{طہ} = \frac{\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{عہ} - \text{ب}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ}}{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$ جہاں عہ خط و ل کا میلان ہے سمت انتصابی کے ساتھ ۔

۲۰ ۔ نیم محوروں ا اور ب کا ایک چکنا ناقصی اسطوانہ دو مستوی سطحوں کے درمیان پھسلتا ہے جن میں ہر ایک سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے ۔

اگر مس² عہ، $\sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{ا}}}$ اور $\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{ب}}}$ کے درمیان واقع ہو تو ثابت کرو کہ قائم تعادل کے محل میں اسطوانہ کا محور اعظم خط انتصابی کے ساتھ زاویہ

$$\text{مس}^{-1}\sqrt{\frac{\text{ا}\,\text{جب}^2\,\text{عہ} - \text{ب}\,\text{جم}^2\,\text{عہ}}{\text{ا}\,\text{جم}^2\,\text{عہ} - \text{ب}\,\text{جب}^2\,\text{عہ}}}$$ بناتا ہے

نیز جبکہ مس عہ ان حدود کے اندر واقع نہ ہو تو قائم اور غیر قائم تعادل کے محل معلوم کرو ۔



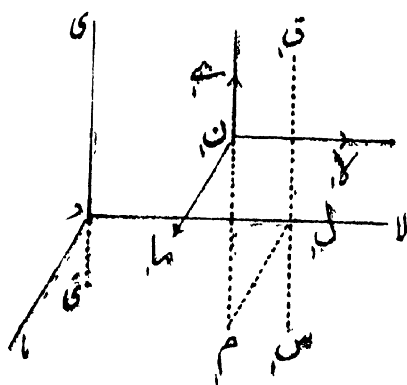
# دسواں باب
## تین ابعاد میں قوتیں

۱۶۲- ایک استوار جسم کے معلومہ نقطوں پر قوتوں کا ایک دیا ہوا نظام عمل کر رہا ہے۔ ان کا حاصل معلوم کرو۔

کسی موزوں نقطہ و کو مبدا یا اساسی نقطہ لو اور اس میں سے محددوں کے محور و لا، و ما، و ی کھینچو۔

فرض کرو کہ جسم کے کسی نقطہ ن کے محدد (لا، ما، ی) ہیں اور اس پر دی ہوئی قوتوں میں سے ایک قوت ق عمل کرتی ہے جس کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی لا، ما، ہے ہیں۔

سطح لا و ما پر ن م عمود گراؤ اور خط و لا پر م ل عمود کھینچو اور ق ل س خط و ی کے متوازی کھینچو۔




خطوط و ی، و ی، ل ق، ل س کے ساتھ ایسی قوتیں داخل کرو جن میں سے ہر ایک ہے کے مساوی ہو - چونکہ یہ قوتیں آپس میں متعادل

میں ہیں اس لئے اِن سے دی ہوئی قوتوں کے نظام۱ پر کوئی اثر نہیں پڑتا اب قوتیں سے جو ن۱ سے۱ اور ل۱ س کے ساتھ عمل کرتی ہیں ایک جفت بناتی ہیں جس کا معیار اثر سے × ھم ل۱ یعنی ما۱ × سے۱ ہے اور جو اُس سطح مستوی میں جو و لا پر عمود وار ہے و لا کے گرد مثبت سمت میں عمل کرتا ہے اس لئے وہ اُس جفت کے معادل ہیں جس کا محور و لا ہے اور جو مثبت ہے۔

ل۱ ق۱ اور و ی کے ساتھ عمل کرنے والی قوتیں سے۱ ایک جفت بناتی ہیں جس کا معیار اثر سے۱ × و ل۱ یعنی سے لا۱ ہے اور جو و ما پر عمود وار سطح مستوی ہیں و ما کے گرد منفی سمت میں عمل کرتی ہے۔

اس لیئے ن۱ پر عمل کرنے والی قوت سے۱ ان کے معادل ہے

و پر ایک قوت سے۱ جو و ی کے ساتھ عمل کرتی ہے

و لا کے گرد معیار اثر + ما۱ سے۱ کا ایک جفت

و ما کے گرد معیار اثر - لا۱ سے۱ کا ایک جفت

اسی طرح سے ن۱ پر عمل کرنے والی قوت لا۱ معادل ہے ان کے

و پر و لا کے ساتھ عمل کرنے والی ایک قوت لا۱

و ما کے گرد معیار اثر + ی۱ لا۱ کا ایک جفت

و ی کے گرد معیار اثر - ما۱ لا۱ کا ایک جفت

اسی طرح ن۱ پر عمل کرنے والی قوت ما۱ معادل ہے ان کے

و پر و ما کے ساتھ عمل کرنے والی ایک قوت ما۱

و ی کے گرد معیار اثر + لا۱ ما۱ کا ایک جفت

و لا کے گرد معیار اثر - ی۱ ما۱ کا ایک جفت

اس لئے ن$_1$ پر عمل کرنے والی تین ترکیبی قوتیں لا$_1$، ما$_1$، سے$_1$ ان کے معادل ہیں

قوتیں لا$_1$، ما$_1$، سے$_1$ جو بالترتیب ولا، وما، وی کے ساتھ عمل کرتی ہیں

ولا کے گرد ایک جفت ما$_1$ سے$_1$ - ی$_1$ ما$_1$

وما کے گرد ایک جفت ی$_1$ لا$_1$ - لا$_1$ سے$_1$

وی کے گرد ایک جفت لا$_1$ ما$_1$ - ما$_1$ لا$_1$

اسی طرح سے ہم کسی اور نقطہ (لا$_2$، ما$_2$، ی$_2$) پر عمل کرنے والی قوت کو جس کے اجزائے ترکیبی لا$_2$، ما$_2$، سے$_2$ ہیں خطوط ولا، وما، وی کے ساتھ عمل کرنے والی قوتوں اور انکے گرد جفتوں کے معادل ثابت کر سکتے ہیں۔

اس لئے بالآخر قوتوں کا کل نظام معادل ہے ان کے

ولا کے ساتھ عمل کرنے والی ایک قوت = لا$_1$ + لا$_2$ + .... = $\Sigma$ (لا$_1$) = لا

وما 〃 〃 〃 = ما$_1$ + ما$_2$ + .... = $\Sigma$ (ما$_1$) = ما

وی 〃 〃 〃 = سے$_1$ + سے$_2$ + .... = $\Sigma$ (سے$_1$) = سے

ولا کے گرد ایک جفت = $\Sigma$ (ما$_1$ سے$_1$ - ی$_1$ ما$_1$) = ل

وما کے گرد ایک جفت = $\Sigma$ (ی$_1$ لا$_1$ - لا$_1$ سے$_1$) = م

وی کے گرد ایک جفت = $\Sigma$ (لا$_1$ ما$_1$ - ما$_1$ لا$_1$) = ن

اوپر کی تین قوتیں معادل ہیں ایک ایسی واحد قوت ر کے جو و میں سے عمل کرتی ہے اور جس کی مقدار ر$^2$ = لا$^2$ + ما$^2$ + سے$^2$ سے حاصل ہوتی ہے اور جس کے خط عمل کی سمتی جیوب التمام

$\frac{لا}{ر}$ ، $\frac{ما}{ر}$ ، $\frac{ے}{ر}$ ہیں [دفعہ ۲۶]

دفعہ ۹۴ کی رو سے تین ترکیبی جفت مبادل ہیں ایک واحد جفت ت کے جو ایسا ہے کہ ت$^2$ = ل$^2$ + م$^2$ + ن$^2$ اور جس کا محور وہ خط مستقیم ہے جس کی سمتی جیوب التمام $\frac{ل}{ت}$ ، $\frac{م}{ت}$ ، $\frac{ن}{ت}$ ہیں۔

اس طرح قوتوں کا نظام معلومہ ایک اختیاری طور پر منتخب کئے ہوئے نقطہ و میں سے گزرنے والی ایک واحد قوت اور ایک ایسے جفت میں تحویل ہو گیا جس کا محور و میں سے گزرتا ہے۔

۱۶۳۔ ایک قوت اور ایک جفت کے اس اجتماع کو اصطلاح میں حرکیہ (Dyname) کہتے ہیں اور مقداریں لا ، ما ، ے اور ل ، م ، ن اس کے اجزائے ترکیبی کہلاتی ہیں۔

محوروں کے ساتھ جو قوتیں عمل کرتی ہیں اور محوروں کے گرد جو جفت عمل کرتے ہیں ان کو اختصاراً نظام (لا ، ما ، ے ، ل ، م ، ن) سے موسوم کیا جا سکتا ہے۔

۱۶۴۔ کسی خط کے گرد قوت کے معیار اثر کی عام تعریف۔

کسی خط کے گرد قوت ف کا معیار اثر اس طرح معلوم کیا جاتا ہے قوت ف کو دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کرو جن میں سے ایک جزو ق دئے ہوئے خط کے متوازی ہو اور دوسرا س اس پر عمود وار ہو، تب اُس حاصل ضرب کو جو س کو س کے خطِ عمل اور خط معلومہ کے درمیان چھوٹے سے چھوٹے فاصلے کے ساتھ ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے معلومہ خط کے گرد قوت ف کا معیار اثر کہتے ہیں۔

مثلاً دفعہ ۱۶۲ کی شکل میں محور لا کے گرد معلومہ قوت ق کا معیار اثر جزو ترکیبی ر$\sqrt{ما^2 + ے^2}$ اور اس کے خطِ عمل اور و لا کے درمیان جو چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے ان کے حاصل ضرب کے مساوی ہے اور اس لئے ل کے گرد

جزو ترکیبی ر۱ | ما۱۲ + ے۱۲ کے معیار اثر کے مساوی ہے جو دفعہ ۳۸ کی رو سے ل۱ کے گرد دو اجزائے ترکیبی ما۱ اور ے۱ کے معیار اثروں کے مجموعہ کے مساوی ہے اور یہ مجموعہ ما۱ ے۱ – ی۱ ما۱ کے مساوی ہے۔

## ۱۶۵۔ ایک استوار جسم کے تعادل کی عام شرائط۔

ایک قوت سر اور جفت ث دونوں ملکر تعادل پیدا نہیں کر سکتے۔ کیونکہ جفت ث کی بجائے ہم ایسی دو مساوی اور غیر موافق قوتیں لے سکتے ہیں جن میں سے ایک قوت اس نقطہ و میں سے گزرے جہاں قوت سر جفت کے مستوی سے ملتی ہے۔ یہ قوت اور قوت سر ملکر ایک واحد قوت میں ترکیب پا سکتے ہیں جو و میں سے گزرتی ہے اور جفت کی دوسری قوت سے نہیں ملتی اور اس لئے تعادل پیدا نہیں کر سکتی۔

اس لئے تعادل صرف اُسی صورت میں ہو سکتا ہے جبکہ قوت سر اور جفت دونوں جداگانہ معدوم ہوں۔

لیکن دفعہ ۱۶۲ کی رو سے سر۲ = لا۲ + ما۲ + ے۲

اور ث۲ = ل۲ + م۲ + ن۲

اس لئے تعادل کے لئے ضروری ہے کہ

لا = ۰، ما = ۰ اور ے = ۰

ل = ۰، م = ۰ اور ن = ۰

یعنی محددوں کے کسی تین محوروں کے متوازی قوتوں کے کسی نظام کے تحلیلی حصوں کے مجموعے جداگانہ معدوم ہوں اور نیز انہی تین محوروں کے گرد قوتوں کے معیار اثروں کے مجموعے بھی جداگانہ صفر ہوں۔

# مثالیں

۱ــــ ایک مکعب کا مرکز ثابت ہے اور اس کا کنارہ ۲ ا ہے۔ اس کے دو متصل رخوں کے اُن تین زاویوں کے ساتھ جو ایک دوسرے سے نہیں ملتے دو مساوی قوتیں س عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اس جفت کا معیار اثر جو مکعب کو ساکن رکھ سکتا ہے قوتوں کی سمتوں کے لحاظ سے س ا $\sqrt{۳}$ یا س ا ہوگا۔

۲ــــ چھ قوتیں جن میں سے ہر ایک ق کے مساوی ہے ایک ہی ترتیب میں ایک مکعب کے اُن کناروں کے ساتھ عمل کرتی ہیں جو ایک معلومہ وتر سے نہیں ملتے۔ ثابت کرو کہ اُن کا حاصل ایک جفت ہے جس کا معیار اثر ۲ $\sqrt{۳}$ × ق ا ہے، جہاں ا مکعب کے کنارہ کا طول ہے۔

۳ــــ ایک مکعب کے متراکز کنارے و ا، و ب، و ج ہیں جن میں سے ہر ایک کا طول ا ہے اور و وَ، ا اَ، ب بَ، ج جَ اس کے وتر ہیں۔ و بَ، وَ ا، ب ج اور جَ اَ کے ساتھ قوتیں ف، ۲ ف، ۳ ف، ۴ ف عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ قوتیں و پر ایک واحد قوت $\sqrt{۳۵}$ ف کے معادل ہیں جس کے خطِ عمل کی سمتی جیوب التمام -۳، ۵، ۱ کے متناسب ہیں مع ایک جفت کے جس کا معیار اثر

$\frac{ف\,ا}{۲}\sqrt{۴۱۱}$ ہے اور جس کی سمتی جیوب التمام متناسب ہیں ۷، -۲، ۲ کے۔

۴ــــ ایک چار سطحی کے راسوں میں سے مقابل کے رخوں پر عمود وار اور ان کے متناسب قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ توازن میں ہونگی اگر یہ سب کی سب اندر کی طرف یا باہر کی طرف عمل کریں۔

۵ــــ کسی مستقیم الاضلاع مجسم شکل کے ہر ایک رخ میں ایک ایسا جفت عمل کرتا ہے جس کا محور باہر کی طرف کھینچا گیا ہے اور جو اس رخ کے رقبہ کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ یہ باہم توازن میں ہیں۔

۶ــــ ایک یک چادری زاید نما کے ایک ہی نظام کے چار کھونوں کے ساتھ چار قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ان کی مقداریں ایسی ہیں کہ اگر ان کو ان خطوط عمل کے متوازی

ایک نقطہ پر منتقل کر دیا جائے تو یہ متعادل ہوتی ہیں۔ ثابت کرو کہ کونوں کے ساتھ عمل کرنے کی صورت میں بھی وہ باہم متعادل ہونگی۔

[ایک چادری زائدنما $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - \frac{ی^2}{ج^2} = 1$ کے کسی کون کی مساوات ہے

$$\frac{لا - ا \text{ جم } ط}{ا \text{ جب } ط} = \frac{ما - ب \text{ جب } ط}{- ب \text{ جم } ط} = \frac{ی}{ج}]$$

۱۶۶۔ **مقید اجسام**۔ مقید جسم سے ایسا جسم مراد ہے جس کے ایک یا دو نقطے ثابت کر دیئے گئے ہوں۔ مثلاً اگر ایک سلاخ دیوار کے ساتھ ایک گولہ خانہ قبضہ کے ذریعہ جوڑ دی جائے تو اس کا ایک نقطہ ثابت سمجھا جائے گا اور سلاخ مقید کہلائیگی۔

اگر ایک استوار جسم کے دو نقطے ا اور ب ثابت کر دیئے گئے ہوں تو خط اب پر کے سب نقطے ثابت ہونگے اور جسم کی حرکت کے لئے صرف محور اب کے گرد گھومنے کا طریقہ باقی رہ جائے گا۔ مثلاً ایک دروازہ جس کو چوکھٹ کے ساتھ دو قبضوں کے ذریعہ حاصل کر دیا گیا ہو قبضوں میں سے گزرنے والے خط کے گرد گھوم سکتا ہے

اگر کوئی جسم ایسا ہو جس کے تین نقطے ثابت کر دیئے گئے ہوں اور یہ تینوں نقطے ایک ہی خط میں واقع نہ ہوں تو صریحاً جسم ناقابل حرکت ہوگا۔

۱۶۷۔ ایک استوار جسم کا ایک نقطہ ثابت ہے۔ اس کے تعادل کی شرائط معلوم کرو۔

ثابت نقطہ کو مبداء و مانو اور اس میں سے گزرنے والے تین علی القوائم خطوط کو محور فرض کرو۔ نیز فرض کرو کہ جسم پر عمل کرنے والی بیرونی قوتیں حسب دفعہ ۱۶۲ مقید نقطہ و پر عمل کرنے والی قوت کے علاوہ محوروں کے متوازی اجزاے ترکیبی لا، ما، ے میں اور ان محوروں کے گرد ترکیبی جفتوں ل، م، ن میں تحلیل ہو جاتی ہیں۔

فرض کرو کہ جسم کو متعادل رکھنے کے لیئے و پر جو قوت عمل کرتی ہے اس کے

اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی لَا، مَا اور ئے ہیں تب حسب دفعہ ۱۶۵ تعادل کے لئے

لا + لَا = ۰ ، ما + مَا = ۰ ، ے + ئے = ۰ (۱)

ل = ۰ م = ۰ ، ن = ۰ (۲)

مساواتوں (۱) سے و پر کے تعامل کے اجزاء بیرونی قوتوں کے رقوم میں معلوم ہوتے ہیں۔

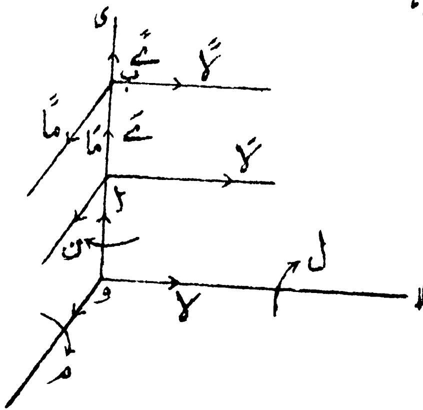
مساواتوں (۲) سے تعادل کی شرائط معلوم ہوتی ہیں یعنی یہ کہ ثابت نقطہ و میں سے گزرنے والے تین علی القوائم خطوط کے گرد بیرونی قوتوں کے معیار اثروں کے مجموعے جداگانہ صفر ہونے چاہئیں۔

اگر سب بیرونی قوتیں ایک ہی سطح مستوی میں عمل کریں جو و میں گزرتی ہو تو اوپر کی شرائط اس سادہ تر شرط میں تحویل ہو جاتی ہیں کہ و کے گرد معیار اثروں کا مجموعہ صفر ہونا چاہیئے۔

۱۶۸- ایک استوار جسم کے دو نقطے ا اور ب ثابت ہیں اور اس لئے جسم محور ا ب کے گرد گھوم سکتا ہے۔ تعادل کی شرائط معلوم کرو۔

خط ا ب کو ی کا محور لو اور اس پر کے کسی نقطہ کو مبدا فرض کرو۔

فرض کرو کہ و ا = یَ، و ب = یًّ،




نیز فرض کرو کہ مقید کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی ا اور ب پر لَا، مَا، ئے اور لًا، مًا اور ئًے ہیں۔

نیز فرض کرو کہ مقید کرنے والی قوتوں کے علاوہ جسم پر عمل کرنے والی بیرونی قوتیں حسب دفعہ ۱۶۲ حسب ذیل قوتوں اور جفتوں میں تحویل ہو جاتے ہیں

محوروں کے متوازی و پہ عمل کرنے والی تین ترکیبی قوتوں لا، ما، سے اور محوروں کے گرد ترکیبی جفتوں ل، م، ن ۔۔۔

تب کل نظام کے لئے ترکیبی قوتیں یہ ہیں:۔

لا + لاَ + لاً ، ما + ماَ + ماً اور سے + سےَ + سےً

اور ترکیبی جفت یہ ہیں:۔

ل ۔ ماَ یَ ۔ ماً یً ، م + لاَ یَ + لاً یً ، اور ن

پس تعادل کی شرائط یہ ہیں

لا + لاَ + لاً = ۰ ۔۔ ۔۔ ۔۔ ۔۔ (۱)

ما + ماَ + ماً = ۰ ۔۔ ۔۔ ۔۔ ۔۔ (۲)

سے + سےَ + سےً = ۰ ۔۔ ۔۔ ۔۔ ۔۔ (۳)

ل ۔ ماَ یَ ۔ ماً یً = ۰ ۔۔ ۔۔ ۔۔ ۔۔ (۴)

م + لاَ یَ + لاً یً = ۰ ۔۔ ۔۔ ۔۔ ۔۔ (۵)

اور ن = ۰ ۔۔ ۔۔ ۔۔ ۔۔ (۶)

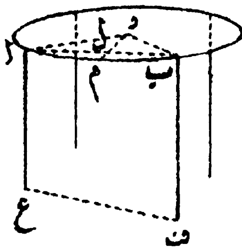
(۱) اور (۵) سے لاَ اور لاً حاصل ہوتے ہیں، (۲) اور (۴) سے ماَ اور ماً معلوم ہوتے ہیں۔ سےَ اور سےً کے درمیان صرف ایک ہی رشتہ مساوات (۳) ہے، اس لئے ان کی قیمتیں غیر متعین ہیں۔

بالآخر بیرونی قوتوں کے درمیان صرف ایک ہی رشتہ مساوات (۶) ہے پس تعادل کی شرط یہ ہے کہ ثابت محور کے گرد بیرونی قوتوں کے معیار اثروں کا مجموعہ صفر ہو۔

۱۶۹۔ تعامل سےَ اور سےً کو ناقابل تعین ہی ہونا چاہیئے تھا کیونکہ بطور مثال فرض کرو

کہ جسم ایک دروازہ ہے جو حسب معمول دو سہاروں ا اور ب پر رکھا ہوا ہے اگر ا پر کی کھونٹی کو اپنے اصلی مقام سے ذرا اونچا کردیا جائے تو دروازہ کا کل بوجھ اس کھونٹی پر آپڑے گا۔ اگر برعکس اس کے اسے اپنے اصلی مقام سے ذرا نیچے کردیا جائے تو دروازہ کا کل بوجھ ب پر آپڑیگا۔ اس لئے جب چوکھٹ کی کھونٹیوں کا درمیانی فاصلہ دروازہ کے چھلوں کے درمیانی فاصلہ کے عین برابر ہو تو ہمیں لازماً یہی توقع کرنی چاہیئے کہ وزن کی تقسیم ناقابل تعین ہے۔

۷۰ ا۔ مشق ا۔ ایک مستدیر یکساں میز کا وزن ۸۰ پونڈ ہے۔ یہ چارپایوں پر جو اس کے کنارہ کے گرد متشاکلاً لگے ہوئے ہیں سہارا ہوا ہے




فرض کرو کہ میز کا مرکز و ہے اور ا ع اور ب ف اس کی دو ٹانگیں ہیں اگر وزن کنارہ کے اُس حصہ سے لٹکایا جائے جو ا اور ب کے درمیان ہے تو میز اگر گھوم سکتی ہے تو نقاط ع اور ف کو ملانے والے خط کے گرد گھومیگی نیز یہ گھومنے کے عین قریب اُس وقت ہوگی جب کہ خط ع ف کے گرد میز کے وزن کا معیار اثر لٹکائے ہوئے وزن کے معیار اثر کے ٹھیک مساوی ہو۔

اب لٹکائے ہوئے وزن کا معیار اثر صریحاً زیادہ سے زیادہ اُس وقت ہوگا جبکہ اسے قوس ا ب کے وسطی نقطہ م پر رکھا جائے۔

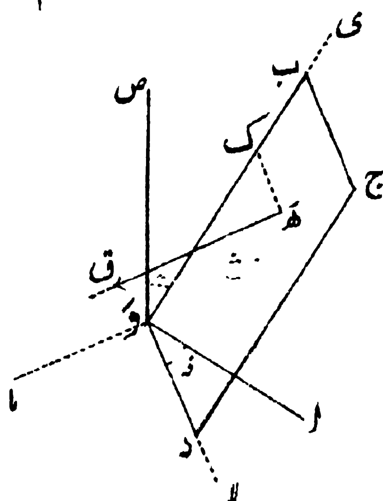
فرض کرو کہ و م، ا ب سے ل پر ملتا ہے اور مطلوبہ وزن لا ہے۔
ع ف کے گرد معیار اثر لینے سے

$$\text{لا} \times \text{ل م} = ۸۰ \times \text{و ل}$$

$\therefore$ لا $\left(۱ - \frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) \times$ و ا $= ۸۰ \times \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times$ و ا یعنی لا = ۱۹۳٫۱ پونڈ وزن

مشق ۲۔ ایک دروازہ جس کا وزن و ہے اس طرح لٹک رہا ہے کہ اس کے قبضوں کو ملانے والا خط سمت انتصابی سے زاویہ ط بناتا ہے۔ قبضوں کا درمیانی فاصلہ

۲ ھ ہے۔ دروازہ کو قبضوں میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی سے زاویہ ذ پر قایم رکھنے کے لئے ایسی قوت ق درکار ہوتی ہے جو دروازہ کے عمودوار ہے اور قوت کا خط عمل قبضوں کے خط اور دروازہ کے نچلے کنارہ سے بالترتیب ب اور ج کے فاصلہ پر ہے۔ قوت ق کی مقدار اور قبضوں پر کے تعامل جہاں تک یہ معلوم ہو سکتے ہیں محسوب کرو۔




فرض کرو کہ دَ ا قبضوں وَ اور ب کو ملانے والے خط پر عمودوار ہے اور اس مستوی میں واقع ہے جو وَ ب اور انتصابی خط وَ ص میں سے گزرتا ہے نیز فرض کرو کہ وَ ب ج د دروازہ ہے اور اسلئے ⦣ ا وَ د = ذ

فرض کرو کہ وَ د، وَ ب اور ان کے علی القوائم ایک خط بالترتیب لا، ی اور ما کے محور ہیں۔

وزن و کو وَ ب اور وَ ا کے متوازی تحلیل کرنے سے اجزائے تحلیلی۔ و جم ط اور و جب ط حاصل ہوتے ہیں۔ اس لئے و کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی و جب ط جم ذ، ۔ و جب ط جب ذ، ۔ و جم ط ہیں اور نقطہ ش پر عمل کرتے ہیں جس کے محدد (اَ، ۰، ھ) ہیں جہاں ۲ ا دروازہ کی چوڑائی ہے اور قبضے بلحاظ ش کے متشاکل ہیں۔

سہارے والی قوت ق جو ھَ پر عمل کرتی ہے اُس کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی ۰، ق، ۰ ہیں اور یہ نقطہ (ب، ۰، ج) پر عمل کرتی ہے۔

اس لئے دفعہ ۱۶۲ کی رو سے

$$\text{لا} = \sum(\text{لا}_1) = \text{و جب ط جم ذ}$$

$$\text{ما} = \sum(\text{ما}_1) = -\text{و جب ط جب ذ} + \text{ق}$$

سے = Σ (سے) = - و جم ط

ل = Σ (ا سے - ی ما) = و ھ جب ط جب فہ - ج ق

م = Σ (ی لا - لا سے) = و ھ جب ط جم فہ + ا و جم فہ

ن = Σ (لا ما - ا لا) = - و ا جب ط جب فہ + ب ق

نیز دفعہ ۱۶۸ کی ترقیم کی رو سے یَ = ۰ اور یً = ۲ ھ

اس لئے لاَ ، ماَ ، سےَ قبضہ و پر ترکیبی تعامل ہیں اور لاً ، ماً ، سےً قبضہ ب پر ترکیبی تعامل ہیں۔

اس لئے دفعہ ۱۶۸ کی مساوات (۶) کی رو سے ق = و × (ا/ب) جب ط جب فہ

مساواتوں (۱) اور (۵) سے حاصل ہوتا ہے

لاَ = (و/۲) [(ا/ھ) جم ط - جب ط جم فہ] اور لاً = - (و/۲) [(ا/ھ) جم ط + جب ط جم فہ]

مساواتوں (۲) اور (۴) سے حاصل ہوتا ہے

ماَ = (و/۲) [ا - (۲ا/ب) + (ج ا/ب ھ)] جب ط جب فہ ، ماً = (و/۲) [ا - (ج ا/ب ھ)] جب ط جب فہ

نیز (۳) سے حاصل ہوتا ہے سےَ + سےً = و جم ط

## مثالیں

۱۔ ایک مربع میز کے چار پائے ہیں جو بالترتیب اس کے اضلاع کے وسطی نقطوں پر لگے ہوئے ہیں۔ بتاؤ کہ اس کے ایک کونے پر زیادہ سے زیادہ کس قدر وزن رکھا جا سکتا ہے تاکہ میز نہ الٹے۔

۲۔ ایک گول میز کی تین متساوی الفصل ٹانگیں ہیں جو اس کے کنارہ پر لگی ہیں۔ ایک آدمی

اس کی ایک ٹانگ کے مقابل اس کے کنارہ پر بیٹھتا ہے جس سے میز الٹ کر کنارہ اور دو ٹانگوں کے بل گرتا ہے پھر وہ اس کے بالاترین نقطہ پر بیٹھتا ہے اور میز عین اوپر اُٹھ آتا ہے۔ ثابت کرو کہ میز کا نصف قطر ٹانگ کے طول کا ما ۲ گنا ہے۔

۳۔ ایک دروازہ جس کا وزن و ہے ایک محور ا ب کے گرد جو سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے گھوم سکتا ہے۔ دروازہ کو اس محل میں رکھنا منظور ہے جو ا ب میں گزرنے والی انتصابی سطح مستوی کے ساتھ زاویہ ہہ بنائے۔ ثابت کرو کہ اس کے لئے قوت و ا جب ا عہ جب ہہ درکار ہو گی یہاں ا دروازہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ ہے ا ب سے۔

۴۔ ایک مستطیل دروازہ حسب معمول دو ایسے قبضوں پر سہارا ہوا ہے جن کو ملانے والا خط سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے ثابت کرو کہ محل توازن سے دروازہ کو زاویہ طہ میں سے گھمانے میں و ا جب عہ (ا- جم طہ) کام کرنا پڑتا ہے جہاں و دروازہ کا وزن ہے اور ۲ ا اس کی چوڑائی ہے۔

۵۔ ایک مستطیل چار ٹانگوں پر متوازی الافق محل میں سہارا ہوا ہے۔ ٹانگیں اس کے کونوں پر ہیں۔ اس کے ایک معلومہ نقطہ پر معلومہ وزن رکھ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک ٹانگ پر کا دباؤ ناقابل تعین ہے نیز وزن کو ایک خاص مقام پر رکھنے سے اس دباؤ کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں معلوم کرو۔

۶۔ ایک استوار مستطیل کے چار کونوں پر چار ٹانگیں ہیں یہ تھوڑا سا دب سکتی ہیں۔ اور ہر ٹانگ کا پچکاؤ اس پر کے دباؤ کے متناسب ہے۔ اگر میز کا مرکز ثقل اس متوازی الاضلاع کے اندر واقع ہو جو ان کے وسطی نقطوں کو ملانے سے بنتا ہے تو ہر ٹانگ پر کا دباؤ معلوم کرو۔ اگر مرکز ثقل اس متوازی الاضلاع کے اندر واقع نہ ہو تو ثابت کرو کہ میز دراصل صرف تین ٹانگوں پر کھڑا ہے۔

[چونکہ میز کا قطر سیدھا رہتا ہے اس لئے مقابل کی ٹانگوں کے ہر ایک زوج کا اوسط دباؤ اس گہرائی کے مساوی ہے جس میں سے میز کا مرکز حرکت کرتا ہے اس لئے مقابل کے کونوں کے ہر زوج پر کے دباؤ مساوی ہیں]

۱۷۔ اگر کوئی جسم تین قوتوں کے زیر عمل متعادل ہو تو وہ قوتیں ایک ہی

مستوی سطح میں ہونگی۔
فرض کرو کہ تین قوتیں ف، ق، س ہیں اور ف اور ق کے خطوط عمل پر کوئی دو نقطے ف، ق ہیں۔
چونکہ قوتیں متعادل ہیں اس لئے مجموعی طور پر اُن کا کوئی اثر جسم کو خط ف ق کے گرد گھمانے کا نہیں ہے لیکن قوتیں ف اور ق اس خط سے ملتی ہیں اسلئے منفرداً ان میں سے کسی کا کوئی اثر جسم کو خط ف ق کے گرد گھمانے کا نہیں ہے اس لئے تیسری قوت س کا بھی کوئی اثر جسم کو خط ف، ق کے گرد گھمانے کا نہیں ہے۔ اس لئے خط ف، ق، لازماً قوت س سے ملے گا۔
اسی طرح اگر ق، ق ... کوئی اور نقطے ق کے خط عمل پر لئے جائیں تو خطوط ف ق، ف ق ... س سے ملینگے اس لئے قوت س اس سطح مستوی میں واقع ہوگی جو ف اور ق کے خط عمل میں سے گزرتی ہے یعنی ق اور س کے خطوط عمل اس سطح مستوی میں واقع ہونگے جو ف میں سے گزرتی ہے۔
لیکن ف قوت ف کے خط عمل پر کا کوئی نقطہ ہے اس لئے مذکورہ بالا سطح مستوی ف کے خط عمل پر کے ہر ایک نقطہ میں سے گزرتی ہے یعنی ف کے خط عمل میں سے گزرتی ہے۔
نتیجہ صریح۔ دفعہ ۴۵ کے نتیجہ سے ظاہر ہے کہ تین قوتیں یا ایک نقطہ میں سے گزرینگی یا باہم متوازی ہونگی۔
۲۷۱۔ اگر کوئی جسم چار قوتوں کے زیر عمل متعادل ہو تو ثابت کرو کہ ان کے خط عمل ایک ہی زائد نما کے مکون ہیں۔
فرض کرو کہ ان چار قوتوں کے خط عمل ف، ق، س، ش ہیں، ف کے خط عمل پر کے کسی نقطہ سے ایک خط ل کھینچو جو ق اور س دونوں سے ملے۔ چونکہ

چاروں قوتیں متعادل ہیں اس لئے ل کے گرد ان کے معیار اثروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیئے۔ اس لئے س لازماً ل سے ملیگی۔ ف پر کے کسی اور دو نقطوں سے شروع کرنے سے ہمیں دو اور خطوط م اور ن حاصل ہوسکتے ہیں جو ف، ق ر، س سے ملتے ہیں۔

اب تین غیر متقاطع خط ل، م، ن ایک یک چادری زائد نما کی تعیین کرتے ہیں اور اس کے ایک ہی نظام کے مکون ہیں۔ خطوط ف، ق، ر، س جو ل، م، ن سے ملتے ہیں وہ اس زائد کے مکون ہیں جو دوسرے نظام کے رکن ہیں۔

یہ بات قابل غور ہے کہ یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ ان چار قوتوں میں سے کوئی سی دو قوتیں بھی ایسی نہیں جو باہم متوازی ہوں یا ایک نقطہ پر ملیں کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو ان کی ترکیب سے ہمیں ایک واحد قوت حاصل ہوتی اور ہمارے پاس صرف تین ہی قوتیں رہ جاتیں اور اس صورت پر دفعہ ماقبل میں بحث ہوچکی ہے۔

۱۷۳۔ اگر ایک جسم پر عمل کرنے والی پانچ قوتیں تعادل میں ہوں تو ان کو دو خطوط مستقیم سے کاٹ سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ان قوتوں کے خطِ عمل ف، ق، ر، س اور ط ہیں۔ ف، ق، ر میں سے ایک یک چادری زائد نما کھینچو اور فرض کرو کہ س اسے نقاط ا اور ب پر ملتا ہے۔

ا میں سے زائد نما کا ایک مکون گزرتا ہے جو ف، ق، ر کے نظام کے مخالف نظام کا رکن ہے اور بناءً علیہ ف، ق، ر سے ملتا ہے۔

چونکہ یہ مکون ف، ق، ر، س سے ملتا ہے اس لئے ان کے معیار اثروں کا مجموعہ اس کے گرد صفر ہے۔

لیکن تمام نظام کے لئے اس کے گرد معیار اثر لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کے گرد ف، ق، ر، س، ط کے معیار اثروں کا مجموعہ صفر ہے اس لئے ط کا معیار اثر اس کے گرد صفر ہے یعنی یہ ط سے بھی ملتا ہے۔

اسی طرح ب میں سے بھی ایک مکون گزرتا ہے جو پانچوں قوتوں سے ملتا ہے۔
یہ بات قابل غور ہے کہ یہ خطوط مستقیم حقیقی، منطبق یا خیالی ہونگے اگر وہ

نقطے جہاں س مکانی نما سے ملتا ہے حقیقی منطبق یا خیالی ہوں۔

۴۷ا۔ مشق ا۔ ایک وزنی سلاخ و ا ایک ایسے نقطہ و کے گرد آزادانہ گھوم سکتی ہے جس کا فاصلہ ایک کھردری دیوار سے $\text{ک}_1$ ہے۔ دیوار کی بلندی $\text{ھ}_1$ ہے سلاخ اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک نقطہ دیوار کے بالائی کنارہ سے مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ سلاخ اُس عمود کے ساتھ جو و میں سے دیوار کے بالائی کنارہ پر نکالا جائے جو بڑے سے بڑا زاویہ بنا سکتی ہے وہ $\text{جب}^{-1}\left(\frac{\text{مہ ک}_1}{\text{ھ}_1}\right)$ ہے۔

فرض کرو کہ سلاخ کا نقطہ ل دیوار کے ساتھ مس کرتا ہے، وک دیوار پر عمود ہے اور وھ دیوار کے بالائی کنارے پر عمود ہے۔ لہٰذا وک = $\text{ک}_1$، ک ھ = $\text{ھ}_1$ اور ∠ھ وک = عہ

فرض کرو کہ و م، ھ ل کے متوازی ہے اور ث م، و م پر عمود وار ہے۔

ل پر جو عادی تعامل س ہے اُس کی سمت و ل اور ھ ل دونوں پر عمود وار ہے اور اس لئے سطح مستوی و ل ھ پر عمود وار ہے۔

رگڑ مہ س اُس سمت کے مخالف ہے جس میں کہ ل حرکت کرنا شروع کریگا وہ اس لئے مستوی سطح و ل ھ میں و ل پر عمود وار ہے۔

چونکہ ث م افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے اس لئے $\text{و}_1$ معادل ہے ث م کی سمت میں و جب عہ کے اور ث میں سے گزرنے والی سطح مستوی و ل ھ پر عمود وار سمت میں و جم عہ کے۔

و میں سے مستوی و ھ ل پر عمودی خط کے گرد معیار اثر لینے سے

مـ مـا × و ل = و جب عہ × و ث جب ھ و ل ...... (۱)

نیز اُس خط کے گرد جو و ل پر عمود وار ہے اور مستوی سطح ھ و ل میں واقع ہے معیار اثر لینے سے

مـ × و ل = و جم عہ × و ث ...... (۲)

∴ جب ھ و ل = مـ مـ عہ = مـ کـ / ھ

نیز ھ ل = و ھ سـ ھ و ل = مـ کـ √((ھ² - کـ²)/(ھ² - مـ² کـ²))

اور اُس دیوار کا طول جس پر سلاخ بحالت تعادل ساکن رہ سکتی ہے ھ ل کا دوچند ہے۔

**تبادل ثبوت** ۔ یہ سوال دفعہ ۱۷ کے استعمال سے بھی بآسانی حل ہوسکتا ہے ۔ سلاخ تین قوتوں کے زیر عمل متعادل ہے۔ اس لئے یہ تینوں قوتیں یعنی سلاخ کا وزن، نقطہ و پر کا تعامل اور ل پر حاصل تعامل متراکز ہونی چاہئیں۔ اس لئے ل پر کا تعامل انقصائی سطح مستوی و ل ن میں واقع ہونا چاہیئے ۔

اب ل پر کے عمادی تعامل کی سمت ل ف، عمود ہے و ل اور ھ ل دونوں پر یعنی یہ مستوی و ھ ل پر عمود ہے لہذا یہ مستوی و ھ کـ میں و ھ پر عمود ہے ۔ پس اس کے سمتی جیوب التمام یہ ہیں

(- جب عہ ، ۰ ، جم عہ) ...... (۳)

جہاں و کـ ، و م اور کـ ھ کا متوازی خط محدد ناپنے کے محور ہیں۔

ل پر رگڑ کی سمت ل ف، مستوی سطح و ل ھ میں و ل پر عمود وار ہے۔

پس حاصل تعامل جو ہم دیکھ چکے ہیں کہ مستوی و ل ن میں لازماً واقع ہے بالضرور علی القوائم ہوگا ل ف، پر جو مستوی و ل ن کا عماد ہے اور جس کے سمتی جیوب التمام ہیں

(جب فہ ، - جم فہ ، ۰) ...... (۴)

جہاں فہ زاویہ کـ و ن ہے

نیز اگر تعادل انتہائی ہو تو یہ حاصل تعامل ل فٖ$_1$ کے ساتھ زاویہ لہ بناتا ہے۔

نیز چونکہ ل فٖ$_1$، ل فٖ$_2$، ل فٖ$_3$ سب کے سب ول پر عمود ہیں اس لئے وہ سب ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہیں۔ اس لئے زاویہ فٖ$_1$ ل فٖ$_3$ = ۹۰° + لہ

اس لئے (۳) اور (۴) سے - جب فہ جب عہ = جم (۹۰° + لہ) = - جب لہ

اب مس طہ = مس ھ ول = $\frac{\text{ھ ل}}{\text{و ھ}}$ = جم عہ مس فہ = $\frac{\text{جم عہ جب لہ}}{\sqrt{\text{جب}^2\text{ عہ} - \text{جب}^2\text{ لہ}}}$

∴ جب طہ = تم عہ مس لہ = مہ تم عہ .. .. .. حسب سابق

**مشق ۲** - ایک وزنی ڈاٹ جس کی شکل مقطوع مخروط کی ہے اسی ناپ کے ایک مخروطی سوراخ میں پھنس کر آتی ہے۔ دونوں کا محور مشترک انتصابی ہے، مخروط کا راسی زاویہ ۲ عہ ہے اور مقطوع مخروط کے مستدیر سروں کے نصف قطر ا اور ب ہیں۔ عمادی تعامل کو فی اکائی رقبہ مستقل فرض کر کے ثابت کرو کہ کم سے کم جفت کا معیار اثر جو ڈاٹ کو مروڑ سکتا ہے $\frac{۲}{۳}$ مہ و $\frac{\text{ا}^2 + \text{اب} + \text{ب}^2}{\text{ا} + \text{ب}}$ تم عہ ہے، جہاں و ڈاٹ کا وزن ہے اور مہ رگڑ کی قدر ہے۔

سوراخ کی منحنی سطح کا رقبہ

= ۳ (ا + ب) × مائل کنارہ = $\pi$ $\frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{جب عہ}}$

اس لئے اگر فی اکائی رقبہ مستقل عمادی تعامل س ہو تو

و = $\pi$ $\frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{جب عہ}}$ × س جب عہ = $\pi$ (ا$^2$ - ب$^2$) س .. .. .. .. (۱)

اگر ڈاٹ کی کسی تراش کا نصف قطر لا ہو تو سوراخ کا وہ رقبہ جو اس کے اور اس تراش کے درمیان جس کا نصف قطر لا + مف لا ہے مقطوع ہوتا ہے ۲ $\pi$ لا × $\frac{\text{مف لا}}{\text{جب عہ}}$ ہے،

اس لئے محور کے گرد اس کی رگڑ کا معیار اثر

= ۲ ۲ ۲ لا $\frac{\text{مف لا}}{\text{جب ع}}$ × سہ س × لا = $\frac{\text{۲ مہ و}}{\text{(ا۲ - ب۲) جب ع}}$ × لا۲ مف لا

اس لئے مطلوبہ جفت کا معیار اثر

= $\frac{\text{۲ مہ و}}{\text{(ا۲ - ب۲) جب ع}}$ $\int$ لا۲ فر لا = $\frac{\text{۲ مہ و}}{\text{۳ جب ع}}$ × $\frac{\text{ا۳ - ب۳}}{\text{ا۲ - ب۲}}$ = $\frac{\text{۲ مہ و}}{\text{۳}}$ × $\frac{\text{ا۲ + اب + ب۲}}{\text{ا + ب}}$ × قم ع

# مثالیں

ا ــــ دو چکنی مستوی سطحیں جن میں سے ہر ایک سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ ع بناتی ہے ایک افقی خط پر قطع کرتی ہیں ۔ ایک یکساں سلاخ جس کا وزن و اور طول ۲ ا ہے متوازی الافق محل میں ان سطوح مستوی کے اندر اس طرح رکھی ہوئی ہے کہ یہ خطِ تقاطع کے ساتھ زاویہ ط بناتی ہے ۔ ثابت کرو کہ تعادل کو قائم رکھنے کے لئے جو افقی جفت درکار ہوگا وہ و ا جم ط مم ع ہے ۔

۲ ــــ ایک یکساں سیدھی سلاخ کا طول ۲ ج ہے، اس کو متوازی الافق محل میں ایک کھردرے کرہ کے اندر جس کا نصف قطر ا ہے اتنی بلندی پر رکھا گیا ہے جتنا کہ ممکن ہے ۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو سلاخ کے وسطی نقطہ کو کرہ کے مرکز سے ملاتا ہے خط انتصابی کے ساتھ زاویہ $\text{ٹا}^{-1}$ $\frac{\text{مہ ا}}{\sqrt{\text{ا۲ - ج۲}}}$ بناتا ہے ۔

۳ ــــ ایک یکساں سلاخ جس کا وزن و ہے اپنے ایک سرے پر ایک قبضہ کے گرد آزادانہ گھوم سکتی ہے ۔ اس کا دوسرا سرا ایک کھردری انتصابی دیوار پر ساکن ہے اور سلاخ محل تعادل میں سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ ع بناتی ہے ۔ ثابت کرو کہ سلاخ ایک دائرہ کی قوس پر جس کے متقابل مرکز پر زاویہ ۲ $\text{مـ}^{-1}$ [مہ سں ع] بنتا ہے کسی مقام پر ساکن رہ سکتی ہے ۔ نیز بتاؤ کہ ہر دو انتہائی محلوں میں دیوار پر کا دباؤ $\frac{1}{2}$ و $[\text{مم}^2\text{ع} + \text{مہ}^2]^{-\frac{1}{2}}$ ہوگا جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے ۔

۴ ـــ ایک پتلی یکساں سلاخ اب جس کا طول ۲ و ا ہے مائل محل میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سرا ا ایک افقی کھردرے میز پر اور دوسرا ب ایک کھردری انتصابی دیوار پر ساکن ہے ۔ میز اور دیوار کی رگڑ کی قدریں بالترتیب م۱ اور م۲ ہیں اور سلاخ کا پایہ دیوار سے ک فاصلہ پر ہے ۔ ثابت کرو کہ سلاخ نچلے سرے پر پھسلنے کے عین قریب ہو گی اگر وہ انتصابی سطح مستوی جس پر اب واقع ہے دیوار کے ساتھ زاویہ ط بنائے جہاں ط ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ک م}_1 (\text{م}_2^2 \text{ جب}^2 \text{ط} - \text{جم}^2 \text{ط})^{\frac{1}{2}} = \text{ک} - 2 \text{م}_1 (4 \text{و}^2 \times \text{جب}^2 \text{ط} - \text{ک}^2)^{\frac{1}{2}}$$

اور اس وقت اوپر کے سرے پر جو ماسی تعامل ہے اُس کا میلان افق کے ساتھ

قظ$^{-1}$ (م۲ مس ط) ہوگا۔

[ ا پر کا حاصل تعامل جو انتصابی خط کے ساتھ زاویہ لہ بناتا ہے اور ب پر کا حاصل تعامل جو انتصابی خط کے ساتھ زاویہ فہ بناتا ہے دونوں کو ایک ایسے نقطہ د پر ملنا چاہیئے جو مرکز ثقل ث کے انتصاباً اوپر ہے۔ اس لئے اگر ب ل میز پر عمود ہو اور ∠ ل ا ب = عہ تو دفعہ ۵۵ کی رو سے

$$2 \text{ مس عہ} = \text{مم لہ} - \text{مم فہ} = \frac{1}{\text{م}_1} - \text{مم فہ}$$

چونکہ سب قوتیں مستوی اب د ل میں عمل کرتی ہیں اس لئے سرا ا سمت ل ا میں پھسلنے کے عین قریب ہوگا ۔

نقطہ ب پر دیوار کا جو عماد ہے اس پر ب د کا ظل لینے سے

$$\text{جب فہ جب ط} = \text{جم لہ}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{م}_2^2}}$$

نیز ک = ۲ ا جب ط جم عہ ، اس سے پہلا جواب حاصل ہوتا ہے

نیز اگر ب پر کا تعامل س ا ہو اور وہاں رگڑ کی قوت م۲ س ا سمت افقی کے ساتھ زاویہ سا بنائے تو چونکہ ہم دیکھ چکے ہیں کہ تعامل مستوی سطح اب ل میں واقع ہوگا، اس لئے اس مستوی پر عمود وار سمت میں تحلیل کرنے سے م۲ س ا جم سا جب ط = س ا جم ط ]

۵ — ایک نصف کرہ جس کی سطح کھردری ہے اور جس کا مرکز و ہے اس طرح ثابت ہے کہ اس کا قاعدہ افقی سطح مستوی میں ہے - ایک سیدھی یکساں سلاخ کا ایک سرا قاعدہ کی سطح مستوی کے ایک نقطہ ا سے آزادانہ وصل کر دیا گیا ہے اور دوسرا سرا نصف کرہ کی سطح کے ایک نقطہ ن پر اس طرح ساکن ہے کہ سلاخ پھسلنے کے عین قریب ہے - ثابت کرو کہ سلاخ اور و میں سے گزرنے والی سطح مستوی و ا میں سے گزرنے والی انتصابی سطح مستوی سے زاویہ مس‌‌ا (م جم ع قم ب) بناتی ہے جہاں م رگڑ کی قدر ہے، ع زاویہ و ا ن ہے اور ب زاویہ و ن ا ہے -

۶ — ایک وزنی مستدیر اسطوانہ اپنے مستوی سرے کے بل ایک کھردرے افقی میز پر پڑا ہے اگر اس کا وزن و ہو اور عمادی دباؤ کو قاعدہ پر مساوی طور پر تقسیم شدہ فرض کیا جائے تو ثابت کرو کہ اُس جفت کا معیار اثر جو اس کو محور کے گرد عین مڑوڑ سکنے کا ہے $\frac{2}{3}$ م و ا ہے جہاں م رگڑ کی قدر ہے اور ا اس کے قاعدہ کا نصف قطر ہے -

۷ — ایک قائم مستدیر مخروط کا وزن و اور راسی زاویہ ۲ ع ہے اس کو ایک افقی میز کے مستدیر سوراخ کے اندر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے - اگر رگڑ کی قدر م ہو اور سوراخ کا نصف قطر ع ہو تو ثابت کرو کہ کم سے کم جفت کا معیار اثر جو مخروط کو ہلا سکتا ہے م و ب قم ع ہے -

۸ — مخروط مضلع کی شکل کا ایک چکنا ڈاٹ ایک مساوی الاضلاع مثلث کی شکل کے سوراخ کے اندر تنا کلا پھنسایا گیا ہے - سوراخ کا ہر ضلع ب ہے اور اس کی سطح متوازی الافق ہے ثابت کرو کہ ڈاٹ کو اس سوراخ کے اندر اس طرح رکھنے کے لئے کہ اس کا محور انتصابی رہے اور سوراخ کی سطح مستوی اس میں سے مساوی ضلع ب والا مثلث منقطع کرے ایک جفت درکار ہو گا جس کا معیار اثر و ھ $\sqrt{\frac{4 ج^2}{ب^2} - 1}$ ہو گا جہاں و ڈاٹ کا وزن ہے اور ھ اس حل میں اس کے راس کی گہرائی ہے -

(فرض کرو کہ ڈاٹ سوراخ کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب سے نقاط ا، ب، ج پر مس کرتا ہے - تب آسانی سے

$$اجَ = \frac{1}{2}\left[ا_1 + \sqrt{\frac{4جَ_1^2 - ا_1^2}{3}}\right] \text{ اور جم } اجَ ب = \frac{ا_1 + \sqrt{3(4جَ_1^2 - ا_1^2)}}{4جَ_1}$$

اس لئے اگر مساوی الاضلاع مثلث $آ ب جَ$ کا مرکز و ہو تو

$$\text{جب } ط = \text{جب } وجَ ا = \text{جب}\left[اجَ ب + 30^\circ\right] = \frac{ا_1}{2جَ_1}$$

نیز چونکہ تشاکل سے مخروطا مقلع کا راس ی ، و سے انتصاباً نیچے ہے اس لئے

سمت انتصابی کے ساتھ اس کا میلان ع مساوات $مس ع = \frac{وجَ}{ھ} = \frac{ا_1}{\sqrt{3}ھ}$ سے حاصل ہوتا ہے

نیز اگر $جَ ا$، افقی سطح مستوی میں $جَ ا$ پر کے عمود اور انتصابی خط کو حوالہ کے محور تسلیم کئے جائیں تو $جَ ا$ کی سمتی جیوب التمام ہیں (۱، ۰، ۰) اور کنارہ کے سمتی جیوب التمام ہیں (۰، جب ع جم ط، ـ جب ع جب ط، جم ع) یعنی یہ متناسب ہیں $\left(-\sqrt{4جَ_1^2 - ا_1^2}، -ا_1، 2ھ\sqrt{3}\right)$ کے

نیز اگر جَ پر کے حاصل تعامل س کی سمت خط انتصابی کے ساتھ زاویہ سہ بنائے تو چونکہ یہ $جَ ا$ پر عمود ہے اس لئے اس کی سمتی جیوب التمام ہونگی (۰، جب سہ، جم سہ)،

نیز چونکہ یہ کنارہ پر بھی عمود ہے

$$\therefore \text{ جب سہ}(-ا_1) + \text{جم سہ}(2ھ\sqrt{3}) = 0 \quad \text{یعنی } مس\ سہ = \frac{2ھ\sqrt{3}}{ا_1}$$

حاصل تعامل کا افقی جزو ترکیبی س

$$= س \text{ جب سہ} = \frac{و}{3} مس\ سہ = \frac{2ھ\sqrt{3}}{3ا_1} و$$ (کیونکہ تین مساوی تعاملوں کے انتصابی جزو ترکیبی و کو متوازن کرتے ہیں)

نیز س کی سمت $ب ا$ پر عمود ہے ، اس لئے مطلوبہ جفت کا معیار اثر

= آ، ب، جَ پر تین اجزائے ترکیبی س کے معیار اثر و کے گرد

$$= 3س\frac{ا_1}{2}\frac{جَ_1}{\sqrt{3}} \text{ جم } ط = \text{ جواب مطلوبہ}$$

۹۔ ایک یکساں مثلثی میز ا ب ج کی ا، ب، ج پر تین مساوی ٹانگیں ہیں جو ایک کھردری افقی سطح مستوی پر ساکن ہیں۔ چھوٹے سے چھوٹا جفت معلوم کرو جو میز کو ہلا سکیگا۔

(فرض کرو کہ میز ایک انتصابی محور کے گرد جو افقی سطح مستوی سے و پر ملتا ہے گھومنے کے مین قریب ہے۔ تب ا، ب، ج پر کی رگڑیں و ا، و ب، و ج پر عمود وار ہیں اور ایک ہی رخ میں ہیں اور چونکہ ہر ایک ٹانگ پر کا دباؤ صریحاً $\frac{و}{۳}$ ہے اس لئے ان رگڑوں میں سے ہر ایک $\frac{۱}{۳}$ مہ وَ کے مساوی ہے جہاں میز کا وزن وَ ہے۔

اگر یہ رگڑیں ایک مثلث اَ بَ جَ بنائیں تو چونکہ یہ صرف ایک جفت کے ہی مساوی ہیں اس لئے حاصل قوت کو صفر ہونا چاہیئے اور ہر ایک رگڑ باقی دو رگڑوں کی سمتوں کے درمیانی زاویہ کی جیب کے مساوی ہونی چاہیئے۔ اس لئے زاویے اَ، بَ، جَ مساوی ہونے چاہئیں یعنی زاویے ا و ب، ب و ج، ج و ا مساوی ہونے چاہئیں۔ اس لئے نقطہ و لازماً مثلث کے اندر ایسی جگہ پر ہوگا کہ

$$\angle ب و ج = \angle ج و ا = \angle ا و ب = ۱۲۰^\circ$$

پس و ہمیشہ موجود ہوگا بشرطیکہ مثلث کا کوئی زاویہ ۱۲۰° سے بڑا نہ ہو اور ب ج، ج ا پر ۱۲۰° کی قوسوں کا نقطہ تقاطع ہوگا۔

تب میز کو حرکت دینے کے لئے جو جفت درکار ہوگا اس کا معیار اثر

$$= \frac{مہ وَ}{۳}\left[و ا + و ب + و ج\right]$$

ممکن ہے کہ میز ا کے گرد گھومنا شروع کرے۔ اگر ایسا ہو تو ب اور ج پر کی رگڑوں میں سے ہر ایک $\frac{مہ وَ}{۳}$ ہے جو ا ب اور ا ج پر عمود وار ہیں اس لئے ان کا حاصل $\frac{۲}{۳}$ مہ × وَ جم $\frac{ا}{۲}$ ہے اس حاصل اور ا پر کی رگڑ کا حاصل صفر نہیں ہو سکتا اگر $\frac{۲}{۳}$ مہ وَ جم $\frac{ا}{۲} > \frac{مہ وَ}{۳}$ یعنی ا < ۱۲۰°۔ پس میز ا کے گرد اسی صورت میں گھوم سکتا ہے جبکہ ا ≮ ۱۲۰° اور

اس صورت میں مطلوبہ جفت = $\frac{1}{2}$ مہ وَ [ اب + اج ]

۱۷۵ — **موہوم کام کا اصول۔** فرض کرو کہ قوتیں $ق_1$، $ق_2$، $ق_3$، ..... کا کوئی نظام ایک جسم کے معلومہ نقاط پر عمل کرتا ہے۔ جسم کو تھوڑا سا ہٹاؤ جو اس کی ہندسی شرائط کے مطابق ہو، اب اگر قوت $ق_1$ کے نقطۂ عمل کا ہٹاؤ اس کے خط عمل کی سمت میں مف $قَ_1$ ہو اور اسی طرح باقی قوتوں کے نقاطِ عمل کے ہٹاؤ بالترتیب ان کی سمتوں میں مف $قَ_2$، مف $قَ_3$ ..... ہوں تو اگر قوتیں متعادل ہوں تو

$$ق_1 مف قَ_1 + ق_2 مف قَ_2 \ldots = 0 \quad \ldots (1)$$

جہاں دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقداروں کو نظر انداز کر دیا گیا ہے
برعکس اس کے اگر

$$ق_1 مف قَ_1 + ق_2 مف قَ_2 + ق_3 مف قَ_3 + \ldots = 0$$

تو قوتیں تعادل میں ہونگی۔

ہم دفعہ ۹۶ میں بتا چکے ہیں کہ کسی ہٹاؤ میں ایک قوت کا کام اس کے اجزاء ترکیبی کے کام کے مساوی ہوتا ہے۔

اس لئے اگر $لا_1$، $ما_1$، $سے_1$ محوروں کے متوازی $ق_1$ کے اجزائے ترکیبی ہوں اور مف $قَ_1$ کے اجزائے ترکیبی انہی محوروں کے متوازی مف $لا_1$، مف $لا_2$، مف $لا_3$ ہوں تو

$$ق_1 \times مف قَ_1 = لا_1 مف لا_1 + ما_1 مف ما_1 + سے_1 مف می_1$$

اسی طرح سے باقی قوتوں کے لئے

پس ربط (۱) معادل ہے

(لا،مف لا+ما،مف ما+سے،مف ی،) + (لا۲مف لا۲+ما۲مف ما۲+سے۲مف ی۲)+ ......=۰

یعنی Σ لا مف لا + Σ ما مف ما + Σ سے مف ی = ۰

ہم یہ تسلیم کرینگے کہ کسی استوار جسم کو ایک محل سے دوسرے محل میں لے جانے کے لئے دو قسم کی حرکتوں کی ضرورت ہوتی ہے ایک ایسی حرکت جس سے جسم کا کوئی نقطہ و کسی دوسرے مقام و پر لے جایا جائے اور دوسری وضعی حرکت جو و میں سے گزرنے والے کسی محور کے گرد لی جائے۔

اس گردش کو حوالے کے محوروں کے گرد تین ترکیبی گردشوں میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔ ہم فرض کریں گے کہ اگر یہ ترکیبی گردشیں چھوٹی ہیں تو انھیں کسی ترتیب میں لیا جاسکتا ہے۔

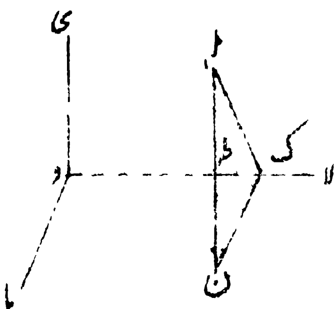
[ان مفروضوں کے ثبوت کے لئے طالب علم کو چاہیئے کہ مصنف کی کتاب

Dynamics of a particle and of Rigid Bodies

کے دفعات ۲۱۵ تا ۲۱۸ کا مطالعہ کرے]

اب اس امر پر غور کرو کہ جسم کو محوروں کے گرد بالترتیب چھوٹے زاویوں

ط۱، ط۲، ط۳ میں سے گھمانے سے




اس کے کسی نقطہ ا کے محددوں پر کیا اثر پڑتا ہے

ا سے اک محور ولا پر عمود اور ان مستوی لا و ما پر عمود نکالو۔ فرض کرو کہ زاویہ اک ن = ط

ا کا ما محدد = ک ن = ک ا × جم ط

و لا کے گرد گردش دینے سے یہ ک ا × جم (ط + ط۱) ہو جائے گا

پس ما محدد کی تبدیلی

= ک ل [جم (ط + ط) - جم ط] = ک ل (- ط جب ط)

اگر ط اتنا چھوٹا زاویہ ہو کہ اس کے مربعوں کو نظرانداز کیا جا سکے تو

= - ط × ی

اسی طرح ی محدد کی تبدیلی = ک ل [جب (ط + ط) - جب ط]

= ک ل [جم ط × ط] = ط × ما

اسی طرح سے دکھایا جا سکتا ہے کہ و ما کے گرد زاویہ ط میں سے گھمانے سے ی محدد میں تبدیلی - ط لا اور لا محدد میں تبدیلی ط ی واقع ہوگی۔

نیز وی کے گرد زاویہ ط میں سے گھمانے سے لا محدد میں تبدیلی - ط ما اور ما محدد میں تبدیلی ط لا واقع ہوگی۔ پس چھوٹی مقداروں کے مربعوں کو نظرانداز کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ محوروں کے گرد تین گردشوں سے ا کے محددوں میں جو تبدیلیاں واقع ہونگی وہ حسب ذیل ہیں

و لا کے متوازی (ی ط - ما ط)

و ما کے متوازی (لا ط - ی ط)

اور دی کے متوازی (ما ط - لا ط)

اگر ان گردشوں کے علاوہ جسم کو محوروں کے متوازی چھوٹے خطی فاصلوں ا، ب، ج میں سے حرکت دی جائے تو ظاہر ہے کہ پہلے درجے کی چھوٹی مقداروں تک

مف لا = ا + ط ی - ط ما

مف ما = ب + ط لا - ط ی

مف ی۱ = ج + ط۱ ما۱ − ط۲ لا۱

پس اس خفیف ہٹاؤ میں نقطہ ا۱ پر عمل کرنے والی قوت ق۱ کا موہوم کام

= ق۱ مف ق۱ = لا۱ مف لا۱ + ما۱ مف ما۱ + سے۱ مف ی۱

= ا لا۱ + ب ما۱ + ج سے۱ + ط۱ (ما۱ سے۱ − ما۱ ی۱) + ط۲ (لا۱ ی۱ − سے۱ لا۱)

+ ط۳ (ما۱ لا۱ − لا۱ ما۱)

اب چونکہ ا، ب، ج، ط۱، ط۲، ط۳ تمام ذروں کے ہٹاؤں کے لئے وہی ہیں اس لئے کل قوتوں کا مجموعی موہوم کام

= ا ∑ لا۱ + ب ∑ ما۱ + ج ∑ سے۱ + ط۱ ∑ (ما۱ سے۱ − ما۱ ی۱)

+ ط۲ ∑ (لا۱ ی۱ − سے۱ لا۱) + ط۳ ∑ (ما۱ لا۱ − لا۱ ما۱)

= ا لا + ب ما + ج سے + ط۱ ل + ط۲ م + ط۳ ن . . . (۲)

دفعہ ۱۶۵ کی رو سے ظاہر ہے کہ اگر قوتوں کا یہ نظام تعادل میں ہو تو اس جملہ کی ہر رقم صفر ہوتی ہے، اس لئے

ق۱ × مف ق۱ + ق۲ مف ق۲ + ق۳ مف ق۳ + . . . .

= کل نظام کا موہوم کام = ۰

۱۶۶ — برعکس اس کے اگر کل ہٹاؤں کے لئے نظام کا موہوم کام صفر ہو تو قوتیں متعادل ہونگی۔ محور لا کے متوازی ایسا سادہ ہٹاؤ منتخب کرو کہ

ا ≠ ۰ اور ب = ج = ط۱ = ط۲ = ط۳ = ۰ ، اب دفعہ ماقبل کے

نتیجہ (۲) سے حاصل ہوتا ہے ∑ (لا) = ۰ ، اسی طرح سے ∑ (ما) = ۰

اور $\sum$ (ــــ) = ۰

اب ایک ایسا ہٹاؤ منتخب کرو جو صرف محور لا کے گرد گردش پر مشتمل ہو

یعنی ا = ب = ج = ط۲ = ط۳ = ۰ اور ط۱ صفر نہ ہو

تب (۲) سے $\sum$ (ما ــــ ی ما) = ۰

یعنی کل قوتوں کا معیار اثر محور لا کے گرد صفر ہوگا یعنی ل = ۰

اسی طرح م = ۰ اور ن = ۰، پس اگر موہوم کام کی مساوات پوری ہوتی ہو

تو دفعہ ۱۶۵ کی تعادل کی تمام شرائط پوری ہوتی ہیں اور قوتیں تعادل میں ہونگی۔

۲۷۱۔ **مشق**۔ ایک منتظم چہار سطحی چھ ہلکی سلاخوں سے بنا ہوا ہے جن میں سے ہر ایک کا طول ا ہے۔ یہ ایک چکنی افقی سطح مستوی پر ساکن ہے۔ ایک حلقہ جس کا وزن و اور نصف قطر ب ہے مائل سلاخوں پر سہارا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ افقی کناروں میں سے کسی ایک پر کا دباؤ $\frac{و}{۶\sqrt{۶}}\left[\frac{۱}{۳} - \sqrt{۲}\sqrt{۳}\ \frac{ب}{ا}\right]$ ہے۔

نظام کو ایک ایسا ہٹاؤ دو کہ تین مائل سلاخوں کا طول نہ بدلے اور راس انتصاباً نیچے اترے۔ جب مائل کنارے سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ ط بنائیں تو فرض کرو کہ اُن اضلاع کا طول جو افقی مستوی سے مس کرتے ہیں لا ہے، تب

$\frac{۲}{۳} \times \frac{لا\sqrt{۳}}{۲} =$ ا جب ط اور اس لئے لا = ا $\sqrt{۳}$ جب ط

اگر حلقہ کی بلندی سطح مستوی کے اوپر ما ہو تو

ما = ا جم ط ــ ب مم ط

اگر مطلوبہ دباؤ ت ہو جسے تناؤ کی صورت میں مثبت شمار کیا جائے تو موہوم کام کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

ــ و مف ما ــ ۳ ت مف لا = ۰

$$\therefore \frac{\text{۳ت}}{\text{و}} = -\frac{\text{فرما}}{\text{فرا}} = \frac{\text{و جب ط} - \frac{\text{ب}}{\text{جب}^{۲}\text{ط}}}{\text{و}\sqrt{\text{۳}}\ \text{جم ط}}$$

اب تعادل کے محل میں لا = ۰ اور اس لئے جب ط = $\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}$

$$\therefore \frac{\text{ت}}{\text{و}} = \frac{\text{۲ب} - \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}}{\text{۳ا}\sqrt{\text{۲}}} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۶}}}\left[\frac{\text{ب}}{\text{ا}} \times \sqrt{\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\right]$$

# مثالیں

۱ـــ ایک منتظم آٹھ سطحی شکل بارہ مساوی سلاخوں کے سروں کو آزادانہ جوڑنے سے بنائی گئی ہے۔ ہر ایک سلاخ کا وزن و ہے۔ اس کو ایک راس سے لٹکا دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک افقی سلاخ پر دباؤ $\frac{\text{۳}}{\text{۲}}$ و$\sqrt{\text{۲}}$ ہے۔

۲ـــ ایک تپائی تین مساوی یکساں سلاخوں کے ایک ایک سرے کو ایک جگہ آزادانہ جوڑنے سے بنائی گئی ہے ہر ایک سلاخ کا وزن و ہے۔ سلاخوں کے وسطی نقطوں کو رسیوں کے ذریعہ جن میں سے ہر ایک کا طول ب ہے ملایا گیا ہے تب تپائی کو ایک چکنے افقی میز پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ ہر پایہ کا آزاد سرا میز سے مس کرتا ہے۔ مشترک نقطہ پر ایک وزن $\text{و}_{\text{ا}}$ آویزاں کیا گیا ہے۔ اگر ہر ایک سلاخ کا طول ل ہو تو ثابت کرو کہ ہر ایک رسی کا تناؤ $\frac{\text{ل}}{\text{۳}}(\text{۲}\,\text{و}_{\text{ا}} + \text{۳و})\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{۹ل}^{۲} - \text{۱۲ب}^{۲}}}$ ہے۔

۳ـــ بارہ مساوی یکساں سلاخوں کے سروں کو آزادانہ جوڑنے سے ایک منتظم آٹھ سطحی شکل بنائی گئی ہے جسے ایک کونہ پر لٹکایا گیا ہے۔ اس راس کو مقابل کے راس کے ساتھ ایک رسی کے ذریعہ جس کا اصلی طول سلاخوں کے طول کے مساوی ہے ملا کر آٹھ سطحی کو سہارا گیا ہے۔ رسی لچکدار ہے اور کل سلاخوں کا مجموعی وزن اس کے طول کو دو چند کر سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل کے محل میں مائل سلاخیں سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ $\text{جم}^{-۱}\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$ بناتی ہیں۔

۴۔ بارہ بے وزن سلاخوں کے سروں کو آزادانہ جوڑنے سے ایک متوازی السطوح بنایا گیا ہے جو مقابل کے راسوں کو ملانے والے لچکدار رسیوں کے زیر عمل متعادل ہے۔ ثابت کرو کہ رسیوں کے تناؤ اور سلاخوں کے تعامل اُن کے طولوں کے متناسب ہیں۔
اگر ت۱، ت۲، ت۳، ت۴ رسیوں کے تناؤ ہوں جن کے طول لا، ما، ی، ع ہوں تو موہوم کام کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

ت۱ مف لا + ت۲ مف ما + ت۳ مف ی + ت۴ مف ع = ۰

لیکن یہ آسانی سے ثابت ہوسکتا ہے کہ لا۲ + ما۲ + ی۲ + ع۲ = سلاخوں کے طولوں کے مربعوں کے مجموعہ کا چار گنا۔ اس لئے

لا مف لا + ما مف ما + ی مف ی + ع مف ع = ۰

چونکہ یہ مساواتیں مف لا، مف ما، مف ی اور مف ع کی سب قیمتوں کے لئے درست ہیں اس لئے

$$\frac{ت_1}{لا} = \frac{ت_2}{ما} = \frac{ت_3}{ی} = \frac{ت_4}{ع}$$

سوال کے باقی حصہ کا جواب کسی کونہ پر عمل کرنے والی قوتوں پر غور کرنے سے حاصل ہوسکتا ہے۔
۵۔ ایک مخروطی خیمہ لا تعداد مساوی مساوی الساقین مثلثی اجزا سے بنا ہوا ہے۔ اس کے راس کو قبضہ سے وصل کرکے اسے ایک چکنی سطح پر رکھا گیا ہے اور اس محل میں خیمہ کو ایک وزنی گول حلقہ کی مدد سے جو اس کے گرد گزرتا ہے متعادل رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل کے لئے مخروطا کا نصف راسی زاویہ جیب$^{-1}$ $\left(\frac{ر}{ھ} \times \frac{۳ وَ}{و + ۳ وَ}\right)^{\frac{1}{۳}}$ ہے جہاں و، وَ بالترتیب مخروط اور حلقہ کے وزن ہیں، ر حلقہ کا نصف قطر ہے اور ھ مخروطا کا مائل ضلع ہے۔
۶۔ تین ذرے جن میں سے ہر ایک کا وزن و ہے ایک ایسے چکنے کرہ کی بیرونی سطح پر جس کا نصف قطر ر ہے تعادل میں ہیں۔ ذروں کو مساوی طول ل کی رسیاں باہم ملحق کی ہوئی ہیں اور یہ کرہ کی سطح پر متشاکلاً ساکن ہیں۔ موہوم کام کے اصول کی مدد سے

ثابت کرو کہ ہر رسی کا تناؤ و $\left\{ \frac{\text{جب}^{2}\,\text{عہ جب}\,\frac{\text{عہ}}{2}}{\text{٣ جب}\,\frac{\text{٣ عہ}}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}$ ہے جہاں عہ وہ زاویہ ہے جس کا توسی ناپ $\frac{\text{ل}}{\text{ر}}$ ہے۔

٧ — ایک وزنی لچکدار رسی کا قدرتی طول ٢ π ا ہے۔ اس کے سروں کو باندھ کر اسے چکنے مخروط کے گرد جس کا محور انتصابی ہے اور جس کا نصف راسی زاویہ عہ ہے ڈالا گیا ہے۔ اگر رسی کا وزن و اور لچک کی قدر لہ ہو تو ثابت کرو کہ یہ جس دائرہ کی شکل میں متعادل ہوگی اُس کا نصف قطر ا $\left( 1 + \frac{\text{و}}{\text{٢ π لہ}}\,\text{مم عہ} \right)$ ہے۔

٨ — ایک چکنے گردشی مکافی نما کو اس طرح ثابت کیا گیا ہے کہ اس کا راس اوپر کی طرف ہے اور محور انتصابی ہے۔ اس پر ایک وزنی لچکدار رسی ڈالی گئی ہے جس کا طول بغیر کھنچاؤ کے ٢ π ج ہے۔ جب رسی تعادل میں ہو تو ثابت کرو کہ اس کی شکل جس دائرہ کی ہوگی اُس کا نصف قطر $\frac{\text{٤ π ا ج لہ}}{\text{٤ π ا لہ} - \text{ج و}}$ ہوگا جہاں و رسی کا وزن ہے، لہ اس کی لچک کی قدر ہے اور ٤ ا کمون مکافی کا وتر خاص ہے۔

٩ — دو مساوی ذروں کو دو معلومہ بے وزن رسیوں کے ذریعہ ملایا گیا ہے ان ذروں کو ایک چکنے مخروط کے گرد جس کا محور انتصابی ہے اور راس اوپر کی طرف ہے حلقہ کی طرح ڈالا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر رسی کا تناؤ $\frac{\text{و}}{\text{π}}$ مم عہ ہوگا جہاں و ہر ذرہ کا وزن ہے اور ٢ عہ مخروط کا راسی زاویہ ہے۔

١٧٨ — فرض کرو کہ کسی متحرک ذرہ کے طریق کے کسی نقطہ (لا، ما، ی) پر ذرہ پر جو قوتیں عمل کرتی ہیں وہ لا، ما، ے ہیں۔ تب اگر دفعہ ٩٦ کے مطابق اس کے محددوں میں بالترتیب مف لا، مف ما، مف ی کی تبدیلی واقع ہو تو قوتوں کا کام

$$= \text{لا مف لا} + \text{ما مف ما} + \text{ے مف ی}$$

جب ذرہ مذکور کسی معیاری محل (لا٠، ما٠، ی٠) سے حرکت کر کے محل (لا١، ما١، ی١)

ہیں آئیے تو قوتوں کا مجموعی کام جو ذرہ پر ہوا وہ = ان کاموں کا مجموعہ ہے جو چھوٹے چھوٹے ابتدائی ہٹاؤں میں ہوا ہے۔

$$= \int_{(لا، با، ی)}^{(لا، ما، ی)} (لا\ فرلا + ما\ فرما + سے\ فری)$$

اس مقدار کو کام کا تفاعل کہتے ہیں اور اسے بالعموم ک سے تعبیر کرتے ہیں اگر لا، ما، سے ایسے ہوں کہ یہ کسی مقدار قہ کے بلحاظ لا، ما، ی، جزوی تفرقی سر ہوں تو

$$ک = \int_{(لا، با، ی)}^{(لا، ما، ی)} \left(\frac{جف\ قہ}{جف\ لا} \times فرلا + \frac{جف\ قہ}{جف\ ما} \times فرما + \frac{جف\ قہ}{جف\ ی} \times فری\right)$$

$$= \left[ فرقہ \right]_{لا، با، ی}^{(لا، ما، ی)} = قہ - قہ \quad \ldots\ldots (۲)$$

جہاں قہ اور قہ بالترتیب نقاط (لا، ما، ی) اور (لا، با، ی) پر قہ کی قیمتوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

مقدار (۲) صریحاً ابتدائی محل میں اور آخری محل میں قہ کی قیمتوں پر موقوف ہے اور اسے اس راستے سے کچھ تعلق نہیں جس سے ذرہ ابتدائی محل سے آخری محل میں پہنچا۔ پس اگر قوتوں کا ایک نظام ایسا ہو کہ کسی نقطہ (لا، ما، ی) پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی (محوروں کے متوازی) کسی تفاعل قہ کے بلحاظ لا، ما، ی، ٹھیک تفرقی سر ہوں یعنی لا مف لا + ما مف ما + سے مف ی کامل تفرقی ہو تو اس قسم کے نظام کو تحفظی نظام کہتے ہیں اور مقدار قہ کو نظام کا قوہ کہتے ہیں۔

قوتوں کے کسی معلومہ نظام کے زیر عمل ایک ذرہ کی توانائی بالقوہ سے وہ کام مراد ہے جو ذرہ مذکور کو اس مقام سے کسی معیاری مقام تک لانے میں قوتیں

اس پر انجام دیتی ہیں۔

مثلاً جب ذرہ نقطہ (لا، ما، ی) پر ہو تو

$$\text{توانائی بالقوہ ھ} = \int_{(\text{لا}_\circ، \text{ما}_\circ، \text{ی}_\circ)}^{(\text{لا}، \text{ما}، \text{ی})} (\text{لا فرلا} + \text{ما فرما} + \text{ے فری})$$

= قبہ - فہ

۱۸۰- **کسی نظام کے محدد** - ایک جسم دو ابعاد میں آزادانہ حرکت کرسکتا ہے۔ اس کے مقام کا تعین ہو سکتا ہے اگر اس پر کے کسی مخصوص نقطہ کے محدد معلوم ہوں اور نیز یہ معلوم ہو کہ کوئی خط جو بلحاظ جسم کے ثابت ہے محور لا کے ساتھ کیا زاویہ بناتا ہے۔

ان تین مقداروں لا، ما، طہ کو جسم کے محدد کہہ سکتے ہیں اور جسم کے کسی دوسرے نقطہ کے محدد ان محددوں کی رقوم میں معلوم ہو سکتے ہیں۔ تین ابعاد میں ہم کسی جسم کے مقام کو پورے طور پر متعین کرسکیں گے اگر ہمیں اس جسم کے تین معلوم نقطوں کے محدد معلوم ہوں۔ لیکن ان تین نقطوں کے نو محددوں میں تین رشتے ہوتے ہیں جو اس بات کو ظاہر کرتے ہیں کہ ان نقطوں کو ملانے والے تین خطوط کا طول غیر متغیر ہے۔

پس ان نو محددوں میں سے کوئی سے تین محدد باقی محددوں کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں۔ اور اس لئے باقی ماندہ چھ محدد جسم کے مقام کو فضا میں متعین کرتے ہیں۔ ان چھ مقادیر کو جسم کے محدد کہہ سکتے ہیں۔

اس واقعہ کو یوں بھی دیکھ سکتے ہیں کہ کسی جسم کا مقام جو فضا میں آزادانہ حرکت کرسکتا ہو متعین ہو جائے گا اگر ہمیں اس کے کسی نقطہ ث کے تین محدد معلوم ہوں اور نیز محوروں کے لحاظ سے اس کے دو خطوط ا ب اور ج د کے محل معلوم ہوں ان خطوں کے سمتی جیوب التمام (ل، م، ن) اور (ل۲، م۲، ن۲) تین روابط

سے مربوط ہیں $ل_۱^۲ + م_۱^۲ + ن_۱^۲ = ۱$ اور $ل_۲^۲ + م_۲^۲ + ن_۲^۲ = ۱$، اور

$ل_۱ ل_۲ + م_۱ م_۲ + ن_۱ ن_۲ = \text{جم}\, ط$ جہاں ط ان خطوط کا درمیانی زاویہ ہے جو معین ہے۔ اس لئے یہ چھ سمتی جیوب التمام بالآخر تین غیر تابع مقداروں میں تحویل ہو جاتی ہیں۔

پس حسب سابق کسی جسم کے مقام کو فضا میں متعین کرنے کے لئے چھ مقداریں ضروری اور کافی ہوتی ہیں ــ ان مقداروں کو جسم کے محدد کہتے ہیں لہذا کوئی غیر تابع مقداریں جن کے معلوم ہونے سے جسم کا مقام متعین ہو جائے جسم کے محدد کہلاتے ہیں۔

۱۸۱۔ **کسی جسم کے کام کا تفاعل**۔ اگر کسی جسم کے نقطہ ($لا_۱، ما_۱، ی_۱$) پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی $لا_۱، ما_۱، ے_۱$ ہوں اور اسی طرح باقی ذروں کے لئے بھی تو جسم کے خفیف سے ہٹاؤ کے لئے قوتیں جسم پر جو کام کرتی ہیں وہ

$$= (لا_۱ \,\text{مف}\, لا_۱ + ما_۱ \,\text{مف}\, ما_۱ + ے_۱ \,\text{مف}\, ی_۱) + (لا_۲ \,\text{مف}\, لا_۲ + ما_۲ \,\text{مف}\, ما_۲ + ے_۲ \,\text{مف}\, ی_۲) + \dots$$

$$\text{پس مف ک} = \Sigma\, (\text{مف}\, لا + ما \,\text{مف}\, ما + ے \,\text{مف}\, ی) \quad \dots \quad (۱)$$

فرض کرو کہ جسم کے غیر تابع محدد سہ، فہ، ضہ ہیں، پس جسم کے ہر ایک نقطہ کے محدد اور اس پر عمل کرنے والی قوتیں سہ، فہ، ضہ .... کی رقوم میں بیان ہو سکتی ہیں، تب (۱) کو اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$\text{مف ک} = سا\, \text{فر}سہ + فا\, \text{فر}فہ + صنا\, \text{فر}ضہ + \dots$$

اگر جسم کسی خاص محل ($سہ_۱، فہ_۱، ضہ_۱$ ....) سے حرکت کر کے کسی دوسرے محل $سہ_۲، فہ_۲، ضہ_۲$ ..... میں آ جائے تو جملہ کام

$$= \int_{(سہ_۱، فہ_۱، ضہ_۱ \dots)}^{(سہ_۲، فہ_۲، ضہ_۲ \dots)} (سا\, \text{فر}سہ + فا\, \text{فر}فہ + صنا\, \text{فر}ضہ + \dots)$$

اگر حسب سابق مقادیر سا، فا، ضا ... کسی مقدار قہ کے جزدی تفرقی سر ہوں بلحاظ سہ، فہ، ضہ .... تو حاصل ہوتا ہے ک = قہ۱ - قہ

اگر کسی مقام پر توانائی بالقوہ ھ حسب سابق اُس کام کے مساوی تسلیم کیجائے جو جسم مقام سہ، فہ، ضہ .... سے کسی معیاری محل تک آنے میں انجام دیتا ہے تو ھ = قہ - قہ۱

۱۸۲- **نظام کے تعادل کا محل**- جسم کے تعادل کا محل موہوم کام کے اصول سے کام معنک ک کو ہر موہوم ہٹاؤ کے لئے صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے بالفاظ دیگر ہم نظام کا وہ محل معلوم کرتے ہیں جس کے لئے ک بڑے سے بڑا یا چھوٹے سے چھوٹا یا ساکن ہو۔

چونکہ مقداریں سہ، فہ، ضہ غیر تابع ہیں اس لئے ہم مقداروں سا، فا، ضا کو (جو بلحاظ سہ، فہ، ضہ کے ک کے جزدی تفرقی سر ہیں) صفر کے مساوی رکھنے سے تعادل کا محل معلوم کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ تعادل کا ایک محل جو اس طرح معلوم ہوتا ہے ایسا ہے جس کے لئے ک بڑے سے بڑا ہے۔ اب اگر جسم کو ذرا سا ہٹا کر قریب کے محل میں لایا جائے اور وہ ایک لمحہ کے لئے ساکن ہو جائے تو ظاہر ہے کہ (علم حرکت کے اس اصول کے مطابق کہ پیدا شدہ توانائی بالحرکت کئے ہوئے کام کے مساوی ہوتی ہے) جسم کو اس طرح حرکت کرنا چاہیئے کہ قوتیں جو کام کریں وہ مثبت ہو یعنی اس طرح حرکت کرے کہ کام ک میں اضافہ واقع ہو اور اس لئے اسے تعادل کے محل میں واپس آنا چاہیئے۔ پس یہ محل قائم تعادل کا محل ہے۔

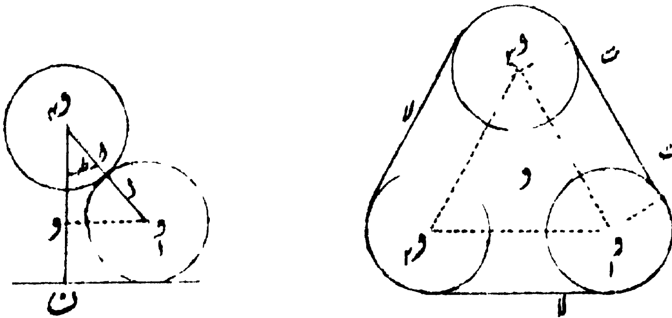
اسی طرح سے اگر تعادل کے کسی محل کے لئے ک کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی ہو تو جسم خفیف سے ہٹاؤ کے بعد اس طرح حرکت کریگا کہ کام میں اضافہ واقع ہو۔ اس لئے یہ تعادل کے محل سے اور بھی پرے ہٹ جائے گا یعنی یہ محل غیر قائم تعادل کا محل ہوگا۔

بالآخر اگر ک حقیقی طور پر چھوٹے سے چھوٹا ہو اور نہ بڑے سے بڑا ہو یعنی اگر یہ بعض ہٹاؤں کے لئے بڑے سے بڑا اور بعض کے لئے چھوٹے سے چھوٹا ہو تو تعادل بھی اس کے مطابق بعض ہٹاؤں کے لئے قائم اور بعض کے لئے غیر قائم ہوگا ۔ پس یہ محل بھی بہ ہیئت مجموعی قائم توازن کا محل نہیں ہوگا ۔

خلاصہ یہ ہے کہ اگر کسی جسم یا جسموں کے کسی نظام کے لئے کام کا تفاعل ک بنایا جائے اور اسے غیر تابع محددوں سہ ا فہ ، فنہ .... کی رقوم میں بیان کیا جائے تو تعادل کے محل وہ محل ہونگے جن کے لئے ک بڑے سے بڑا، چھوٹے سے چھوٹا یا ساکن ہو اور ان محلوں میں قائم تعادل کے محل وہی ہونگے جن کے لئے ک کی متناظر قیمتیں حقیقی طور پر بڑی سے بڑی ہوں ۔

چونکہ سف ھ = - سف ک اس لئے اگر ہم کام کی بجائے توانائی بالقوہ کو لیں تو نتائج بالکل الٹ جائیں گے ۔ یعنی وہی محل قائم تعادل کے محل ہونگے جن کے لئے توانائی بالقوہ کی متناظر قیمتیں حقیقی طور پر کم سے کم ہوں ۔

۱۸۳ - مشق ۔ تین مساوی کرے ایک چکنے میز پر پڑے ہیں اور ایک چکنی لچکدار رسی کے ذریعہ جو ان کے مرکزوں کی سطح مستوی میں ہے اس طرح تعادل میں ہیں کہ یہ ایک دوسرے سے مس کرتے ہیں اور رسی تنی ہوئی نہیں ہے ۔ ایک اور چوتھا کرہ ان کے اوپر رکھ دیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر تعادل کے محل میں اوپر کے کرہ کے مرکز




کو نیچے کے کسی کرہ کے مرکز کے ساتھ ملانے والا خط سمت انتصابی سے زاویہ ط بنائے تو

تشاکل ہٹاؤں کے سلئے تعادل قائم ہوگا اگر جب² ط > $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

فرض کرو کہ اوپر کے کرہ کے مرکز کو نیچے کے کرہ کے مرکز کے ساتھ ملانے والا خط سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہے جبکہ نیچے کے کروں کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ لا ہے،

اس لئے

$$\text{جب ط} = \frac{\text{و و}_1}{\text{۲ ا}} = \frac{\frac{2}{3}\,\text{لا جب }60^\circ}{\text{۲ ا}} = \frac{\text{لا}}{\text{۲ ا}\sqrt{3}}$$

اگر لچک کی قدر لہ ہو اور رسی کا تناؤ ت ہو تو

$$\text{ت} = \text{لہ}\,\frac{\text{۳ لا} + 2\pi\,\text{ا} - (\text{۱۶ ا} + 2\pi\,\text{ا})}{\text{۱۶ ا} + 2\pi\,\text{ا}} = \frac{\text{۳ لہ}}{2(\pi+3)\,\text{ا}} \times (\text{لا} - \text{۲ ا})$$

اگر وَ ایک کرہ کا وزن ہو تو کسی تشاکل ہٹاؤ کے سلئے کام کا تفاعل

$$\text{مف ک} = -\text{وَ}\,\text{مف}(\text{ا} + \text{۲ ا جم ط}) - \text{۳ ت مف لا}$$

$$\therefore\quad \frac{\text{فک}}{\text{فط}} = \text{وَ} \times \text{۲ ا جب ط} - \frac{18\,\text{ا}\sqrt{3}\,\text{لہ ا}}{\pi+3}\left[\sqrt{3}\,\text{جب ط} - 1\right]\text{جم ط}$$

$$\therefore\quad \frac{\text{ف}^2\text{ک}}{\text{فط}^2} = \text{وَ} \times \text{۲ ا جم ط} - \frac{18\,\text{ا}\sqrt{3}\,\text{لہ ا}}{\pi+3}\left[\sqrt{3}\,(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جب}^2\text{ط}) + \text{جب ط}\right]$$

تعادل کا محل $\frac{\text{فک}}{\text{فط}} = 0$ سے حاصل ہوتا ہے یعنی

$$\text{وَ جب ط} = \frac{9\sqrt{3}\,\text{لہ}}{\pi+3}\left[\sqrt{3}\,\text{جب ط جم ط} - \text{جم ط}\right]$$

ط کی اس قیمت کے لئے

$$\frac{\text{ف}^2\text{ک}}{\text{فط}^2} = \frac{18\,\text{ا}\sqrt{3}\,\text{لہ ا}}{\pi+3}\left[(\sqrt{3}\,\text{جب ط جم ط} - \text{جم ط})\,\text{جم ط} - \sqrt{3}\,(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جب}^2\text{ط}) - \text{جب ط}\right]$$

$$= \frac{18\sqrt{3}\ \text{ل و}}{\pi + 3} \times \frac{\sqrt{3}\ \text{جب}^3\text{ط} - 1}{\text{جب ط}}$$

اگر $\text{جب}^3\text{ط} > \frac{1}{\sqrt{3}}$ تو $\frac{\text{ف}^2\text{ک}}{\text{ف ط}^2}$ منفی ہوگا اور ک کی متناظر قیمت بڑی سے بڑی ہوگی اور تعادل قائم ہوگا۔

# مثالیں

۱۔ ایک ٹھوس چپٹے کرہ کے محور کے ایک سرے پر اس کے وزن کا ن گنا وزن رکھ دیا گیا ہے۔ بتاؤ کہ یہ ایک چکنی افقی سطح مستوی پر کن مختلف محلوں میں متعادل رہ سکتا ہے اور ان میں سے کونسا محل قائم تعادل کا محل ہے، نیز ثابت کرو کہ اگر $\text{ز} > \frac{\text{ن}}{2\text{ن} + 1}$ تو تعادل کے صرف دو محل ممکن ہیں۔

۲۔ محور ی انتصاباً اوپر کی طرف ہے اور مبدا و ہے، ایک یکساں مربع تختہ ا ب ج د جس کا وزن و اور ضلع ۲ ا ہے محور ا ب کے گرد جو ثابت ہے اور جس کی سمتی جیوب التمام (جب ط، ۰، جم ط) ہیں آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ ایک بے وزن رسی جو تختہ کے کونے ج کے ساتھ بندھی ہے نقطہ (۰، ۲ ا، ۰) پر ایک ثابت چکنے حلقہ میں سے گزرتی ہے اور اس کے دوسرے سرے کے ساتھ وزن وَ بندھا ہے۔ ثابت کرو کہ تختہ تعادل میں ہوگا جبکہ زاویہ فہ جو تختہ سطح لا ی کے ساتھ بناتا ہے مساوات

$$\frac{\text{مم فہ}}{\sqrt{3 - 2\ \text{جب فہ}}} = \frac{\text{و}}{2\text{وَ}}\ \text{جب ط}$$

کو پورا کرے۔ تعادل کے قیام پر بحث کرو۔

۳۔ ایک چکنا ٹھوس مستدیر مخروط جس کا ارتفاع ھ اور راسی زاویہ ۲ عہ ہے ایک افقی مستدیر سوراخ کے اندر جس کا نصف قطر ا ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے، ثابت کرو کہ اگر ۱۶ ا < ۳ ھ جب ۲ عہ تو تعادل قائم ہوگا۔ اور تعادل کے باقی دو محلوں میں غیر قایم ہوگا، نیز اگر ۱۶ ا > ۳ ھ جب ۲ عہ تو تعادل غیر قائم ہوگا اور تعادل

کا محل صرف ایک ہوگا جس میں محور انتصابی ہے۔

اگر ایک وزن وَ کو راس پر لٹکا دیا جائے اور مخروط کا وزن و ہو تو ثابت کرو کہ متناظر شرطِ تعادل ہوگی ۱۶ ا (وَ + و) > ۳ و ھ جیب ۲ عہ

۴۔ ایک یکساں قائم مستدیر مخروط کا ارتفاع ھ اور راسی زاویہ ۲ عہ ہے۔ یہ دو متوازی اور متوازی الافق سلاخوں کے اندر جن کا فاصلہ د ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے اور اس کا محور انتصابی ہے ثابت کرو کہ اُن زاویٔ ہٹاؤں کے لئے جن میں محور سلاخوں کے متوازی انتصابی مستوی میں حرکت کرے تعادل قائم ہوگا اگر ھ > ۴/۳ د قم ۲ عہ

۵۔ ایک قائم مخروط کا راسی زاویہ قائمہ ہے۔ اسے ایک افقی میز میں مربع سوراخ کے اندر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے اور یہ مربع کے اضلاع کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر مخروط کی بلندی ھ، مربع کے ضلع ا کے دوچند سے زیادہ ہو تو تعادل کا ایک ترچھا محل ممکن ہے جس میں مخروط کا محور افق کے ساتھ زاویہ جیب^-۱ (۲ ا / (۳ ھ - ۴ ا)) بنائے۔ نیز ثابت کرو کہ یہ محل قائم تعادل کا محل ہوگا۔

---

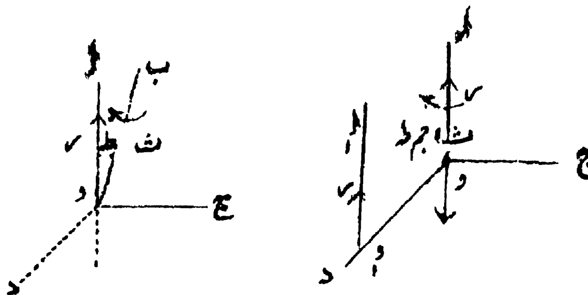
# گیارھواں باب

## تین ابعاد میں قوتیں (مسلسل)

### پائن سو کا مرکزی محور۔ اسطوانہ نما اور صفری خطوط۔

۱۸۴۔ اگر قوتوں کا کوئی نظام ایک استوار جسم پر عمل کر رہا ہو تو ثابت کرو کہ اسے ایک واحد قوت اور ایک ایسے جفت میں تحویل کیا جا سکتا ہے جس کا محور قوت کے خطِ عمل کے متوازی ہو۔

دفعہ ۱۶۲ میں بتایا جا چکا ہے کہ قوتوں کے کسی نظام کو کسی اختیاری نقطہ و پر عمل کرنے والی ایک قوت میں اور ایک ایسے جفت میں تحویل کیا جا سکتا ہے جسکا معیار اثر و میں سے گزرنے والے محور کے گرد ث ہو

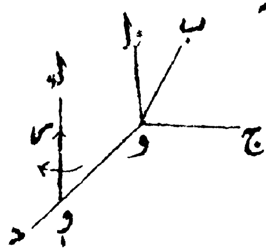



فرض کرو کہ س کی سمت و ا ہے اور و ب جفت ث کا محور ہے، اور

> او ب = ط، مستوی سطح او ب میں و ا پر و ج عمود نکالو اور مستوی او ج کے علی القوائم خط و د کھینچو۔

دفعہ ۹۴ کی رو سے جفت ث جس کا محور و ب ہے دو جفتوں ث جم ط اور ث جب ط کے مساوی ہے جن میں سے اول الذکر کا محور و ا ہے اور آخر الذکر کا محور و ج ہے۔

موخر الذکر جفت مستوی او د میں عمل کرتا ہے اور اس لئے اس کی بجائے دو ایسی مساوی مخالف متوازی قوتیں رکھ سکتے ہیں جن کا معیار اثر ث جب ط ہو۔ اب جفت کی دو قوتوں میں سے ایک قوت س او جو و ا کی مخالف سمت میں عمل کرے، تب دوسری قوت س خط و د کے ایک ایسے نقطہ و، پر عمل کریگی کہ س × و و، = ث جب ط یعنی $و و_۱ = \frac{ث \text{ جب } ط}{س}$




اب و، پر کی قوتیں متعادل ہو گئیں نیز جفت ث جم ط کے محور کو و ا سے بدل کر و، ا، پر لایا جا سکتا ہے۔

اس طرح سے ہمارے پاس بالآخر ایک قوت س جس کا خطِ عمل و، ا، ہے اور ایک جفت ث جم ط جس کا محور بھی و، ا، ہے رہ جاتے ہیں۔

اس محور کو پائن سو کا مرکزی محور کہتے ہیں۔

یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ اس طرح حاصل شدہ مرکزی محور ایک ہی ہوتا ہے اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ قوتوں کا دیا ہوا نظام و، ا، کے ساتھ عمل کرنے والی ایک قوت اور و، ا، کے گرد عمل کرنے والے ایک جفت کے مساوی ہے اور نیز ایک اور خط و۲ ا۲ کے ساتھ عمل کرنے والی ایک اور قوت اور اس خط و۲ ا۲ کے گرد عمل کرنے والے ایک اور جفت کے بھی مساوی ہے۔ دفعہ ۱۶۲ کی رو سے حاصل قوت س سمت اور مقدار میں ہمیشہ وہی رہتی ہے مبدا یا اساسی نقطہ خواہ کہیں لیا جائے پس و۲ ا۲ متوازی ہوگا و، ا، کے اور حاصل قوت س دونوں کے لئے وہی ہے۔

اس لئے نظام (س، ث) خط و، ا، کے گرد معادل ہے متوازی خط و۲ ا۲ کے گرد عمل کرنیوالے نظام (س، ثَ) کے۔ اب اگر و، ا، اور و۲ ا۲ کا درمیانی فاصلہ ع ہو تو قوت س جو و۲ ا۲ کے ساتھ

عمل کرتی ہے وہ مساوی ہے ایک قوت س کے جو و ا کے ساتھ عمل کرتی ہے اور ایک جفت س × ع کے جس کا محور و ا پر عمود ہے (دیکھو دفعہ ۵۹)

پس دوسرا نظام معادل ہے و ا کے ساتھ عمل کرنے والی ایک قوت س کے اور ایک جفت ث کے جس کا محور و ا ہے اور نیز ایک اور جفت س × ع کے جس کا محور و ا پر عمود ہے۔ اب موخر الذکر دونوں جفت ایک واحد جفت میں تحویل ہو جاتے ہیں جس کا محور و ا نہیں ہوسکتا۔ اس لئے موخر الذکر نظام پہلے نظام کے معادل نہیں ہوسکتا جس کا محور و ا ہے۔

پس معلوم ہوا کہ ہمارا ابتدائی مفروضہ غلط تھا یعنی ہم دو مرکزی محور و ا اور و ا معلوم نہیں کرسکتے لہٰذا دفعہ ما قبل کا مرکزی محور صرف ایک ہی ہوتا ہے۔

۱۸۵۔ مبدا و خواہ کہیں لیا جائے حاصل قوت ہر صورت میں وہی رہتی ہے اور مرکزی محور کے ساتھ عمل کرنے والی قوت کے مساوی ہوتی ہے۔ لیکن حاصل جفت وہی نہیں رہتا۔ یہ جفت صریحاً مرکزی محور کے لئے چھوٹے سے چھوٹا ہوتا ہے کیونکہ اگر کسی مبداء کے لئے (جو مرکزی محور پر واقع نہ ہو) جفت ث ہو اور مرکزی محور حاصل قوت کی سمت کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو دفعہ گزشتہ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ مرکزی محور کے لئے جفت کی قیمت ث جم ط ہوگی یعنی ہمیشہ ث سے کم ہوگی۔

پس مرکزی محور کے گرد حاصل جفت کا معیار اثر ہمیشہ کم ہوتا ہے اُس حاصل جفت کے معیار اثر سے جو مرکزی محور پر نہ واقع ہونے والے کسی نقطہ و کے جواب میں حاصل ہو۔

۱۸۶۔ ایک واحد قوت س اور ایک جفت ک کو جس کا محور قوت کے خط عمل پر منطبق ہو مجموعی طور پر ایک نام ریچ سے موسوم کرتے ہیں۔ نسبت $\frac{ک}{س}$ کو یعنی جفت کا معیار اثر بٹے ہوئے قوت کو گھائی کہتے ہیں، یہ گھائی ایک خطی مقدار ہوتی ہے۔ جب گھائی صفر ہو تو ظاہر ہے کہ ریچ صرف ایک قوت پر مشتمل ہوگا۔ جب گھائی لاتتناہی ہو تو ریچ محض ایک جفت پر

مشتمل ہوگا۔

واحد قوت سما کو اکثر اوقات رینچ کی حدت بھی کہتے ہیں۔حاصل واحد قوت کے خط عمل اور گھائی کو ملا کر ترپیچ کہتے ہیں پس ترپیچ سے مراد ہے ایک خاص خط ہے جو ایک خاص گھائی سے وابستہ ہوتا ہے۔

ترپیچ کو متعین کرنے کے لئے پانچ مقداروں کی ضرورت ہوتی ہے۔ان میں سے چار مقداریں محور کے محل کو متعین کرنے کے لئے ضروری ہیں مثلاً وہ نقطہ جہاں یہ خط حوالہ کے کسی مستوی سے ملتا ہے اور حوالے کے محوروں سے اس خط کا میلان پانچویں مقدار گھائی کے تعین کے لئے ضروری ہے۔

کسی ترپیچ پر رینچ کو پورے طور پر متعین کرنے کے لئے ایک اور چھٹی مقدار کی ضرورت ہوگی جس سے رینچ کی حدت ظاہر ہو سکے۔

## ۱۸۷۔ راست دستی ترپیچ اور چپ دستی ترپیچ۔

ظاہر ہے کہ ایک ہی اپنی حرکت کے جواب میں گردشی حرکت دو طرح سے یعنی مخالف سمتوں میں عمل پذیر ہو سکتی ہے۔جب گردشی حرکت اس ترپیچ کش کی حرکت کے مطابق ہو جس سے پیچ اندر کی طرف کسا جا رہا ہو تو ترپیچ کو راست دستی ترپیچ کہتے ہیں اگر گردشی حرکت اس کے برعکس ہو تو ترپیچ کو چپ دستی ترپیچ کہتے ہیں۔

**عام تعریف حسب ذیل ہے۔** فرض کرو کہ ایک شخص اس طرح کھڑا ہے کہ اس کا جسم ترپیچ کے محور پر منطبق ہے اور اپنی حرکت کی مثبت سمت پیروں سے سر کی طرف ہے اور وہ ایک گھڑی کو مشاہدہ کرتا ہے جس کا رخ اوپر کی طرف ہے اور جو گردشی حرکت کے مستوی میں واقع ہے۔تب اگر گردش کی سمت گھڑی کی سوئیوں کی حرکت کے موافق ہو تو ترپیچ کو چپ دستی ترپیچ کہیں گے اور اگر سوئیوں کی حرکت کے مخالف ہو تو راست دستی ترپیچ کہیں گے۔

مثلاً اس کتاب کی شکلوں میں جو ہندسہ مجسمات کے عام دستور العمل کے مطابق کھینچی گئی ہے ہم نے چپ دستی ترپیچ کو مثبت اور معیاری صورت مانا ہے

یہ امر اس بات سے بھی ظاہر ہوگا اگر ہم مذکورہ بالا تعریف کا اُس پیچ پر اطلاق کریں جسکا محور حوالہ کے لا محور پر منطبق ہے کیونکہ ہم نے دفعہ ۱۴۷ میں یہ فرض کرلیا ہے کہ ما سے سے تک جسم کو گردش دینے والا جفت مثبت ہے ۔

۱۸۸ — وہ شرط معلوم کرو کہ قوتوں کا ایک معلومہ نظام ایک واحد قوت میں تحویل ہوجائے۔ دفعہ ۱۶۲ کی رو سے یہ سب قوتیں کسی اختیاری نقطہ و پر عمل کرنے والی ایک واحد قوت سا میں اور ایک واحد جفت ث میں تحویل ہوسکتی ہیں۔ اگر قوت کے خط عمل اور جفت ث کے محور کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو قوت سا دو قوتوں سا جم طہ اور سا جب طہ کے معادل ہے جہاں سا جم طہ جفت کی سطح مستوی پر عمود وار ہے یعنی جفت کے محور پر منطبق ہوتا ہے۔ اور سا جب طہ جفت کے محور پر عمود وار ہے۔ اب قوت سا جب طہ اور جفت کی دونوں قوتیں جو سب ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہیں ایک واحد قوت سا جب طہ میں تحویل ہوجاتی ہیں جو و میں سے نہیں گزرتی اور اس لئے بالعموم سا جم طہ سے ترکیب پاکر ایک واحد قوت میں تحویل نہیں ہوسکتی۔

لیکن اگر سا جم طہ = ۰ یعنی اگر جم طہ = ۰ تو ہمارے پاس صرف ایک قوت سا جب طہ رہ جاتی ہے۔

اس لئے طہ کو ۹۰° کے مساوی ہونا چاہیئے یعنی وہ خطوط مستقیم جن کی سمتی جیوب التمام

$$\frac{\text{لا}}{\text{سا}} ، \frac{\text{ما}}{\text{سا}} ، \frac{\text{سے}}{\text{سا}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ل}}{\text{ث}} ، \frac{\text{م}}{\text{ث}} ، \frac{\text{ن}}{\text{ث}}$$

ہیں اُن کو علی القوائم ہونا چاہیئے۔ اس لئے

$$\frac{\text{لا}\times\text{ل}}{\text{سا}\times\text{ث}} + \frac{\text{ما}\times\text{م}}{\text{سا}\times\text{ث}} + \frac{\text{سے}\times\text{ن}}{\text{سا}\times\text{ث}} = \text{جم } 90^\circ = 0$$

$$\therefore \quad \text{لا ل} + \text{ما م} + \text{سے ن} = 0$$

مطلوبہ شرط ہے۔

۱۸۹ — **غیر متغیرات**۔ خواہ مبداء کہیں لیا جائے اور محوروں کو کیسے ہی بدلا جائے قوتوں کے کسی معلومہ نظام کے لئے مقداروں

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{سے}^2 \quad \text{اور} \quad \text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن سے}$$

کی قیمتوں میں کچھ فرق نہیں آتا جہاں $\text{لا} = \Sigma\, \text{لا}_1$ وغیرہ اور $\text{ل} = \Sigma (\text{مے}_1 - \text{ما ی}_1)$ وغیرہ۔

دفعہ ۱۶۲ اور ۱۸۴ کی رو سے ظاہر ہے کہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{مے}^2$ مربع ہے اس حاصل قوت سر کا جو مرکزی محور کے جواب میں حاصل ہوتی ہے اس لئے اسکی قیمت غیر متغیر ہے۔

نیز اگر دفعہ ۱۶۲ میں (ل، م، ن) حاصل قوت کی سمتی جیوب التمام ہوں اور (ل۱، م۱، ن۱) حاصل جفت کے محور کی سمتی جیوب التمام ہوں تو

$$\frac{\text{لا}}{\text{سر}} \times \frac{\text{ل}}{\text{ث}} + \frac{\text{ما}}{\text{سر}} \times \frac{\text{م}}{\text{ث}} + \frac{\text{مے}}{\text{سر}} \times \frac{\text{ن}}{\text{ث}} = \text{ل ل}_1 + \text{م م}_1 + \text{ن ن}_1$$

= حاصل قوت اور حاصل جفت کے محور کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام۔

= جم ط (دفعہ ۱۸۴)

$$\therefore \text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن مے} = \text{سر} \times \text{ث جم ط} = \text{سر} \times \text{ک}$$

جہاں ک مرکزی محور کے گرد جفت کا معیار اثر ہے۔

پس $\text{ع} \equiv \text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن مے}$ غیر متغیرہ ہے۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ک صفر ہو یعنی اگر معلومہ نظام ایک واحد قوت میں تحویل ہو سکے تو $\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن مے} = 0$۔

دوسرا غیر متغیرہ اس صورت میں بھی صفر ہوگا جب حاصل قوت سر صفر ہو اس صورت میں پہلا غیر متغیرہ بھی صفر ہوگا۔

نظام کے حاصل ریخ کی گہائی $\text{گ} = \frac{\text{ک}}{\text{سر}} = \frac{\text{ک سر}}{\text{سر}^2} = \frac{\text{ع}}{\text{سر}^2}$

$$= \frac{\text{نظام کا غیر متغیرہ ع}}{\text{غیر متغیرہ سر کا مربع}}$$

۱۹۰ ـــ قوتوں کے کسی نظام کے لئے مرکزی محور کی مساوات معلوم کرنا۔

دفعہ ۱۶۲ کی ترقیم کی رو سے فرض کرو کہ محوروں و لا، و ما، و ی کے لحاظ سے کسی نقطہ ق کے محدد (ف، گ، ھ) ہیں۔

و لا کے متوازی ق میں سے گزرنے والے خط کے گرد معیار اثر صریحاً لا۱، ما۱، ی۱ کی بجائے لا۱ - ف، ما۱ - گ، ی۱ - ھ رکھنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

پس یہ معیار اثر = ∑ [(ما۱ - گ) ے۱ - (ی۱ - ھ) ما۱]

= ∑ (ما۱ ے - ی۱ ما) - گ ∑ (ے۱) + ھ ∑ (ما۱)

= ل - گ ے + ھ ما

دفعہ ۱۶۲ کی ترقیم کے مطابق۔

اسی طرح و ما و ی کے متوازی ق میں سے گزرنے والے خطوط کے گرد معیار اثر بالترتیب

م - ھ لا + ف ے　اور　ن - ف ما + گ لا ہیں۔

نیز ق کے ہر مقام کے لئے حاصل کے اجزائے ترکیبی کی قیمت وہی رہتی ہے، اس لئے یہ اجزائے ترکیبی ہر مقام کے لئے لا، ما، ے، رہتے ہیں۔

اگر ق مرکزی محور پر ہو تو جفت کے محور کی سمتی جیوب التمام حاصل قوت س کے خط عمل کی سمتی جیوب التمام کے متناسب ہوتی ہیں۔

اس لئے (ل - گ ے + ھ ما) / لا = (م - ھ لا + ف ے) / ما = (ن - ف ما + گ لا) / ے

= (ل لا + م ما + ن ے) / (لا² + ما² + ے²) = ک س / س² = ک / س

پس نقطہ (ف، گ، ھ) کا طریق یعنی مرکزی محور کی مساوات

(ل - ماے + ی ما) / لا = (م - ی لا + لاے) / ما = (ن - لاما + الا) / ے = ک / ر

رنچ کی گھائی۔

۱۹۱- مشق ۱- تین قوتیں جن میں سے ہر ایک ق کے مساوی ہے ایک جسم پر عمل کرتی ہیں پہلی قوت نقطہ (ا، ۰، ۰) پر و ما کے متوازی، دوسری (۰، ب، ۰) پر و ی کے متوازی اور تیسری نقطہ (۰، ۰، ج) پر و لا کے متوازی عمل کرتی ہے۔ محور کارٹیزی ہیں۔ مقدار اور مقام کے لحاظ سے حاصل رنچ معلوم کرو۔

یہاں لا = ما = ے = ق

نیز ل = ق ب، م = ق ج اور ن = ق ا

اس لئے اگر رنچ کی قوت ر اور جفت ک ہو تو

ر = √(لا² + ما² + ے²) = √۳ ق

نیز ک ر = ل لا + م ما + ن ے = ق² (ا + ب + ج)

∴ ک = (√۳ / ۳) ق (ا + ب + ج)

دفعہ ۱۹۰ سے مرکزی محور کی مساواتیں ہیں

ب - ا + ی = ج - ی + لا = ا - لا + ا

یعنی لا + (ا + ۲ب + ۳ج) / ۳ = ا + (ب + ۲ج + ۳ا) / ۳ = ی + (ج + ۲ا + ۳ب) / ۳

پس مرکزی محور ایسا خط مستقیم ہوگا جو نقطہ

( -(ا + ۲ب + ۳ج) / ۳ ، -(ب + ۲ج + ۳ا) / ۳ ، -(ج + ۲ا + ۳ب) / ۳ )

میں سے گزرتا ہے اور تینوں محوروں سے مساوی زاوئے بناتا ہے۔

مشق ۲- دو مساوی قوتیں ان دو خطوط مستقیم کے ساتھ عمل کرتی ہیں

$$\frac{\text{لا} \mp \text{ا جم ط}}{\text{و جب ط}} = \frac{\text{ما} \mp \text{ب جب ط}}{\mp \text{ ب جم ط}} = \frac{\text{ی}}{\text{ج}}$$

ثابت کرو کہ ان کو مرکزی محور ط کی تمام قیمتوں کے لئے سطح

$$\text{ما}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ی}} + \frac{\text{ی}}{\text{لا}}\right) = \text{ب}\left(\frac{\text{ا}}{\text{ج}} + \frac{\text{ج}}{\text{ا}}\right)$$

پر واقع ہوگا۔

اگر ہر ایک قوت (ق) ہو تو نقطہ (ا جم ط، ب جب ط، ۰) پر ایک ایسی قوت عمل کرتی ہے جس کے اجزائے ترکیبی ا جب ط × ق، - ب جم ط ق، ج ق کے متناسب ہیں اور نقطہ (- ا جم ط، ب جب ط، ۰) پر دوسری ایسی قوت عمل کرتی ہے جس کے اجزائے ترکیبی ا جب ط × ق، - ب جم ط ق اور ج ق کے متناسب ہیں

$$\text{پس} \quad \text{لا} = \Sigma(\text{لا}) \propto \text{۲ ا جب ط ق}$$

$$\text{ما} = \text{۰} \quad \text{اور} \quad \text{ے} \propto \text{۲ ج} \times \text{ق}$$

$$\text{ل} = \Sigma(\text{ا ی} - \text{ی ما}) \propto \text{۲ ب ج جب ط} \times \text{ق}$$

$$\text{م} = \text{۰} \quad \text{اور} \quad \text{ن} \propto - \text{۲ ا ب ق}$$

تب دفعہ ۱۹۰ کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ب ج جب ط} - \text{ما ج}}{\text{ا جب ط}} = \frac{-\text{ا ب} + \text{ما ا جب ط}}{\text{ج}} \quad \text{اور} \quad \text{ی ا جب ط} = \text{لا} \times \text{ج}$$

دوسری مساوات سے جب ط کی قیمت پہلی مساوات میں درج کرنے سے ہمیں مرکزی محور کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{ما}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ی}} + \frac{\text{ی}}{\text{لا}}\right) = \text{ب}\left(\frac{\text{ا}}{\text{ج}} + \frac{\text{ج}}{\text{ا}}\right)$$

## مثالیں

۱ - ایک مکعب کا ہر ضلع ا ہے اس کے دو متقابل رخوں کے علی القوائم تین زاویوں

کے ساتھ دو مساوی قوتیں عمل کرتی ہیں - ثابت کرو کہ وہ معادل ہیں ایک واحد قوت سر کے جو مکعب کے مرکز میں سے گزرتی ہے اور ایک جفت $\frac{1}{2}$ ا سر کے جس کا محور وہی خط ہے۔

٢ — و ب د ج ایک مستطیل ہے جس کا ضلع و ب = ب، و ج = ج، نیز و ا اس کی سطح مستوی پر عمود ہے - و ا، ج د اور ب د کے ساتھ قوتیں لا، ما، سے عمل کرتی ہیں - ثابت کرو کہ حاصل پیچ کی قوت سر اور جفت کا معیار اثر ک بالترتیب $\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{سے}^2}$ اور لا (سے ب - ما ج) ÷ $\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{سے}^2}$ ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ اگر و ا، و ب، و ج کو حوالے کے محور لا، ما، ی فرض کیا جائے تو مرکزی محور کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ل}} = \frac{\text{ا}}{\text{ما}} - \frac{\text{سے ک}}{\text{ل ما سر}} = \frac{\text{ی}}{\text{سے}} + \frac{\text{ک ما}}{\text{ل سے سر}}$$

٣ — ایک مستطیلی متوازی السطوح کے کناروں و ا، و ب، و ج کے طول بالترتیب ۶، ۱۵، ۸ انچ ہیں اور و وَ، ا اَ، ب بَ، ج جَ اس کے بین زاوئی ہیں - ان قوتوں کا ریچ معلوم کرو - بَ سے و کی سمت میں ۱۳۰، ا سے وَ کی طرف ۶۸، جَ سے اَ کی طرف ۵۰، ب سے جَ کی طرف ۶۸

[ سر = -۱۰۸، ک = ۱۰۸۰؛ مرکزی محور ب ج کے وسطی نقطے سے و ا کے متوازی خط ہے ]

۴ — و ا، و ب، و ج ایک مکعب کے تین متراکز کنارے ہیں اور ا اَ، ب بَ، ج جَ اور و وَ اس کے بین زاوئی ہیں - ب جَ، ج اَ، ا بَ اور و وَ کے ساتھ قوتیں لا، ما، سے اور سر عمل کرتی ہیں، ثابت کرو کہ وہ ایک واحد حاصل قوت کے مساوی ہونگی اگر

$$(\text{ما سے} + \text{سے لا} + \text{لا ما})\, \text{لا}\sqrt{3} + \text{سر}\,(\text{لا} + \text{ما} + \text{سے}) = 0$$

۵ — قوتیں ف، ق، س ایک مکعب کے تین غیر متقاطع کناروں کے ساتھ عمل کرتی ہیں ان کا مرکزی محور معلوم کرو۔

۶ — دو قوتیں ف اور ق ان خطوطِ مستقیم کے ساتھ جن کی مساواتیں ما = لا مس عہ، ی = ج اور ما = - لا مس عہ، ی = - ج ہیں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کا مرکزی محور

خطِ مستقیم $\text{ما} = \text{لا} \times \frac{\text{ف} - \text{ق}}{\text{ف} + \text{ق}}$ مس عہ اور $\frac{\text{ی}}{\text{ج}} = \frac{\text{ف}^2 - \text{ق}^2}{\text{ف}^2 + 2\,\text{ف}\,\text{ق}\ \text{جم}\ 2\text{عہ} + \text{ق}^2}$ ہے

ف اور ق کی تمام قیمتوں کے لئے ثابت کرو کہ یہ خط سطح $(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)$ ی جب ۲عہ = ۲ج لا ما کا کمون ہے۔

۷ — چار مساوی قوتیں محوروں کے ساتھ اور خطِ مستقیم $\frac{\text{لا} - \text{ء}}{\text{ل}} = \frac{\text{ما} - \text{ب}}{\text{م}} = \frac{\text{ی} - \text{ج}}{\text{ن}}$ کے ساتھ عمل کرتی ہیں۔ اس نظام کے مرکزی محور کی مساوات معلوم کرو۔

۸ — تین قوتیں ان خطوطِ مستقیم کے ساتھ عمل کرتی ہیں:

لا = ۰، ما - ی = ا ؛ ما = ۰، ی - لا = ا ؛ ی = ۰، لا - ما = ا

ثابت کرو کہ وہ صرف ایک جفت میں تحویل نہیں ہو سکتیں۔

نیز ثابت کرو کہ اگر یہ نظام ایک واحد قوت میں تحویل ہو جائے تو اس کا خطِ عمل سطح

$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2 - 2\,\text{ما}\,\text{ی} - 2\,\text{ی}\,\text{لا} - 2\,\text{لا}\,\text{ما} = \text{ا}^2$ پر واقع ہوگا۔

۹ — قوتیں لا، ما، ے بالترتیب تین خطوطِ مستقیم

ما = ب، ی = - ج ؛ ی = ج، لا = - ا ؛ لا = ا، ما = - ب

کے ساتھ عمل کرتی ہیں ثابت کرو کہ وہ ایک واحد قوت میں تحویل ہو جائیں گی اگر

$$\frac{\text{ا}}{\text{لا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ما}} + \frac{\text{ج}}{\text{ے}} = 0$$

اور حاصل کے خطِ عمل کی مساواتیں ان تین مساواتوں میں سے کوئی دو ہوں گی

$\frac{\text{ما}}{\text{ما}} - \frac{\text{ی}}{\text{ے}} - \frac{\text{ا}}{\text{لا}} = 0$، $\frac{\text{ی}}{\text{ے}} - \frac{\text{لا}}{\text{لا}} - \frac{\text{ب}}{\text{ما}} = 0$ اور $\frac{\text{لا}}{\text{لا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ما}} - \frac{\text{ج}}{\text{ے}} = 0$

۱۰۔۔ ایک واحد قوت کے اجزائے ترکیبی محوروں کے ساتھ بالترتیب لا، ما، ے ہیں اور اس کے معیار اثر ان محوروں کے گرد بالترتیب ل، م، ن ہیں، ثابت کرو کہ واحد قوت کی مقدار √(لا² + ما² + ے²) ہے اور اس کے خطِ عمل کی مساوات ہے

(ما ے − ی ما) / ل = (ی لا − لا ے) / م = (لا ما − ما لا) / ن = ۱

۱۱۔۔ اگر ایک قوت (لا، ما، ے) ایک زائدی مکافی نما لا²/و² − ما²/ب² = ۲ی/ج کے مکوّن کے ساتھ عمل کرے اور مبدا پر عمل کرنے والی ایک مساوی قوت (لا، ما، ے) اور ایک جفت (ل، م، ن) کے معادل ہو تو ثابت کرو کہ

و ل ± ب م = ۰، ب لا ± و ما = ۰، ج ن ± اب ے = ۰.

۱۲۔۔ ایک قوت ق محور لا کے ساتھ عمل کرتی ہے اور ایک اور قوت ن × ق ایک اسطوانہ لا² + ما² = و² کے ایک مکوّن کے ساتھ عمل کرتی ہے ثابت کرو کہ مرکزی محور اسطوانہ

ن² (ن لا − ی)² + (۱ + ن²)² ما² = ن⁴ و²

پر واقع ہوتا ہے۔

۱۳۔۔ دو قوتیں ہیں جن میں سے ایک قوت خط ما = ۰، ی = ۰ کے ساتھ اور دوسری لا = ۰، ی = ج کے ساتھ عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ جیسے قوتیں بدلتی ہیں ان کے معادل رنچ کا محور سطح (لا² + ما²) ی = ج ما² مرتسم کرتا ہے۔

۱۴۔۔ ایک قوت نقطہ (و، ۰، ۰) پر محور ی کے متوازی عمل کرتی ہے اور ایک اور مساوی قوت محور ی پر عمود وار نقطہ (−و، ۰، ۰) پر عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ اس نظام کا مرکزی محور سطح

ی² (لا² + ما²) = (لا² + ما² − و لا)²

پر واقع ہوتا ہے ۔

۱۶ ـــ ایک قوت ق محور ی کے ساتھ عمل کرتی ہے اور ایک اور قوت م × ق ایک ایسے خط میں عمل کرتی ہے جو لا محور کو مبداء سے فاصلہ ج پر کاٹتا ہے اور سطح ما ی کے متوازی ہے ۔ ثابت کرو کہ جیسے یہ خط مستقیم محور لا کے گرد گھومتا ہے تو قوتوں کا مرکزی محور سطح

$$\{\text{م}^2\,\text{ی}^2 + (\text{م}^2 - 1)\,\text{ما}^2\}\,\{\text{ج} - \text{لا}\}^2 = \text{لا}^2\,\text{ی}^2$$

مرتسم کرتا ہے ۔

ـــ ایک ناقص نما میں سے صدری مستویوں کے ذریعہ ایک ثمن کاٹا گیا ہے ۔ اس ثمن کے ہر ایک نقطہ ن پر عماد کی سمت میں ن پر کی سطح کے ایک چھوٹے جزو کے متناسب ایک قوت عمل کرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ یہ قوتیں ایک واحد قوت کے مساوی ہیں جو خط مستقیم

$$\text{ا}\left(\text{لا} - \frac{4\,\text{ا}}{3\pi}\right) = \text{ب}\left(\text{ما} - \frac{4\,\text{ب}}{3\pi}\right)$$

پر عمل کرتی ہے جہاں ۲ ا ، ۲ ب ، ۲ ج ناقص نما کے محور ہیں ۔

۱۷ ـــ ایک زائد نما $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}} = 1$ کے کھونوں کے ایک ہی نظام کے ساتھ مساوی گھائی گ والے ریچ عمل کرتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ یہ ریچ ایک واحد قوت میں تحویل ہوسکیں گے بشرطیکہ اُن کے مرکزی محور مخروط

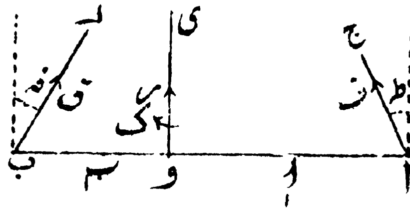
$$\left(\text{گ} + \frac{\text{ب}\times\text{ج}}{\text{ا}}\right)\text{لا}^2 + \left(\text{گ} + \frac{\text{ا}\times\text{ج}}{\text{ب}}\right)\text{ما}^2 + \left(\text{گ} - \frac{\text{ا}\times\text{ب}}{\text{ج}}\right)\text{ی}^2 = 0$$

کے کھونوں کے متوازی ہوں ۔

۱۹۲ ـــ ثابت کرو کہ قوتوں کا کوئی نظام دو قوتوں میں لا متناہی طریقوں سے تحویل ہوسکتا ہے اور ان قوتوں سے جو چہار سطحی بنتا ہے اُس کا حجم ہمیشہ مستقل رہتا ہے ۔

فرض کرو کہ معلومہ نظام کا مرکزی محور و ی ہے اور حسب معمول ما اور ک اس نظام کے ریچ کی حاصل قوت اور جفت ہیں ۔

و میں سے و ی پر عمود وار ایک خط کھینچو اور اس خط پر و کے مخالف جانبوں




میں دو نقطے ا اور ب لو اور فرض کرو کہ و ا = ا۱ اور و ب = ب۱

فرض کرو کہ معلومہ نظام، ا میں سے گزرنے والی ایک قوت ف اور ب میں سے گزرنے والی ایک قوت ق کے مساوی ہے اور ان کے خطِ عمل و ی کے متوازی ا اور ب میں سے گزرنے والے خطوں کے ساتھ متقابل سمتوں میں بالترتیب زاویے طہ اور فہ بناتے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ طہ اور فہ کے ناپنے کی مثبت سمتیں متقابل ہیں۔

تب ف اور ق کے حاصل و ی کی سمت میں اور اس پر عمود وار سمت میں بالترتیب س۱ اور صفر ہونگے اور اسی طرح سے ان خطوں کے گرد حاصل جفت بالترتیب ک اور صفر ہونگے۔

اس لئے　س۱ = ف جم طہ + ق جم فہ　. . . (۱)

۰ = ف جب طہ − ق جب فہ　. . . (۲)

ک = ف جب طہ × ا۱ + ق جب فہ × ب۱　. . (۳)

اور　۰ = ف جم طہ × ا۱ − ق جم فہ × ب۱　. . . (۴)

(۱) اور (۴) سے　ف جم طہ / ب۱ = ق جم فہ / ا۱ = س۱ / (ا۱ + ب۱)　. . . (۵)

(۲) اور (۳) سے　ف جب طہ = ق جب فہ = ک / (ا۱ + ب۱)　. . (۶)

اس لئے $ف^2 = \frac{ک^2 + سر^2 ب_1^2}{(ا_1 + ب_1)^2}$ اور $ق^2 = \frac{ک^2 + سر^2 ا_1^2}{(ا_1 + ب_1)^2}$

$مس\ ط = \frac{ک}{سر\ ب_1}$ اور $مس\ ذ = \frac{ک}{سر\ ا_1}$

$ا_1$ اور $ب_1$ کی خواہ کچھ ہی قیمتیں ہوں ہمیں ف، ق، ط، اور ذ کی حقیقی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اس لئے ہمارا مفروضہ درست ہے۔

نیز (۵) اور (۶) سے

$ک\ سر\ ا_1 = (ا_1 + ب_1)^2 \times ف \times ق\ جب\ ط\ جم\ ذ$ اور

$ک\ سر\ ب_1 = (ا_1 + ب_1)^2\ ف \times ق \times جم\ ط\ جب\ ذ$

اس لئے جمع کرنے سے $ک\ سر = ف \times ق \times (ا_1 + ب_1)\ جب(ط + ذ)$ . . (۷)

فرض کرو کہ اج اور ب د بالترتیب ف اور ق کی مقدار کو تعبیر کرتے ہیں تب

چہار سطحی ا ج ب د کا حجم

$= \frac{1}{3} \triangle اب ج \times (د سے \triangle اب ج پر عمود)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} اب \times اج \times ب د\ جب(ط + ذ)$

$= \frac{1}{6} ف\ ق\ (ا_1 + ب_1)\ جب(ط + ذ) = \frac{1}{6} ک\ سر$ ، مساوات (۷) سے

یعنی چہار سطحی کا حجم مستقل ہے۔

متشاکل صورت۔ اگر قوتیں ف اور ق مساوی ہوں اور مرکزی محوروں سے مساوی فاصلوں پر عمل کریں تو مساواتوں (۱)، (۲)، (۳)، (۴) سے ط = ذ یعنی قوتیں مرکزی محور کے ساتھ مساوی زاوئے بناتی ہیں اور

$سر = ۲ ف\ جم\ ط$ اور $ک = ۲ ف\ ا_1\ جب\ ط$

$$\therefore \quad \text{ف} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{سا}^{2} + \frac{\text{ک}^{2}}{\text{ا}^{2}}} \quad \text{اور} \quad \text{مس ط} = \frac{\text{ک}}{\text{سا ا}}$$

اگر ہم علاوہ ازیں $\text{ا} = \frac{\text{ک}}{\sqrt{3}\ \text{سا}}$ فرض کریں تو ف = سا اور ط = ۶۰°

**۱۹۳۔ دو معلومہ ریچوں کا حاصل ریچ معلوم کرنا۔**

فرض کرو کہ ایک ریچ ($\text{سا}_1$، $\text{ک}_1$) کا محور اج ہے اور دوسرے ریچ ($\text{سا}_2$، $\text{ک}_2$) کا محور ب د ہے۔ نیز فرض کرو کہ اب (= ج) ان کے محوروں کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے اور اُن کا درمیانی زاویہ عہ ہے۔

فرض کرو کہ مطلوبہ مرکزی محور وی اب پر عمود ہے اور اب کو دو حصوں لا اور ج - لا میں تقسیم کرتا ہے اور اج کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہے یعنی ب د کے ساتھ زاویہ (عہ - ط) بناتا ہے نیز فرض کرو کہ مفروضہ مرکزی محور کی قوت اور جفت بالترتیب سا اور ک ہیں۔

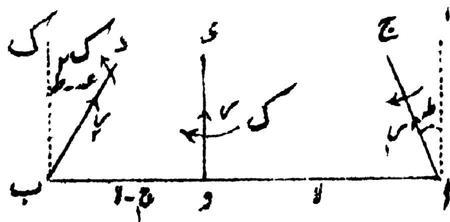
تب حسب شرائط سوال

$$\text{سا} = \text{سا}_1\ \text{جم ط} + \text{سا}_2\ \text{جم}\ (\text{عہ} - \text{ط}) \quad \ldots \quad (1)$$

$$0 = \text{سا}_1\ \text{جب ط} - \text{سا}_2\ \text{جب}\ (\text{عہ} - \text{ط}) \quad \ldots \quad (2)$$

$$\text{ک} = \text{ک}_1\ \text{جم ط} + \text{ک}_2\ \text{جم}\ (\text{عہ} - \text{ط}) + \text{سا}_1\ \text{جب ط} \times \text{لا} + \text{سا}_2\ (\text{ج} - \text{لا})\ \text{جب}\ (\text{عہ} - \text{ط}) \quad \ldots \quad (3)$$

$$\text{اور} \quad 0 = \text{ک}_1\ \text{جب ط} - \text{ک}_2\ \text{جب}\ (\text{عہ} - \text{ط}) - \text{سا}_1\ \text{جم ط} \times \text{لا} + \text{سا}_2\ (\text{ج} - \text{لا})\ \text{جم}\ (\text{عہ} - \text{ط})$$



(۱) اور (۲) کی مدد سے آخر کی مساواتیں اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

ک = ک۱ جم طہ + ک۲ جم (عہ - طہ) + سا۲ ج۱ جب (عہ - طہ) . . . . . (۳)

اور ۰ = ک۱ جب طہ - ک۲ جب (عہ - طہ) + سا۲ ج۱ جم (عہ - طہ) - سا لا . . (۴)

(۱) اور (۲) سے

سا۲ = سا۱۲ + سا۲۲ + ۲ سا۱ سا۲ جم عہ . . . . . . . . (۵)

نیز (۲) سے جب طہ / سا۲ جب عہ = جم طہ / سا۱ + سا۲ جم عہ = ۱ / سا . . . . . . . (۶)

نیز (۳) اور (۶) سے

سا ک = (ک۱ + ک۲ جم عہ + سا۲ ج۱ جب عہ)(سا۱ + سا۲ جم عہ)

+ (ک۲ جب عہ - سا۲ ج۱ جم عہ) × سا۲ جب عہ

= سا۱ ک۱ + سا۲ ک۲ + (سا۱ ک۲ + سا۲ ک۱) جم عہ + سا۱ سا۲ ج۱ جب عہ (۷)

اس سے قوتوں کے معلومہ نظام کے لئے غیر متغیرہ کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

نیز (۶) کی مدد سے (۴) سے حاصل ہوتا ہے

سا۲ لا = (ک۱ + ک۲ جم عہ + سا۲ ج۱ جب عہ) × سا۲ جب عہ

- (ک۲ جب عہ - سا۲ ج۱ جم عہ)(سا۱ + سا۲ جم عہ)

= (سا۲ ک۱ - سا۱ ک۲) جب عہ + سا۲ ج۱ (سا۲ + سا۱ جم عہ) . . . (۸)

(۵)، (۶)، (۷) اور (۸) سے سا، طہ، ک اور لا معلوم ہو جاتے ہیں۔
یعنی مطلوبہ ریخ اور اس کے مرکزی محور کا مقام معلوم ہو جاتا ہے۔
ان مساواتوں سے بآسانی حاصل ہوسکتا ہے

لا / (ج۱ − لا) = [س۲ ج۱ (س۱ جم عہ + س۲) − (س۱ ک۲ − س۲ ک۱) جب عہ] / [س۱ ج۱ (س۱ + س۲ جم عہ) + (س۱ ک۲ − س۲ ک۱) جب عہ]

اور جم طہ / جم (عہ − طہ) = (س۱ + س۲ جم عہ) / (س۱ جم عہ + س۲)

۱۹۴— دو معلومہ قوتیں س۱ اور س۲ ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہیں، ان کا حاصل پیچ معلوم کرو۔

یہ دفعہ ما قبل کی ایک خاص صورت ہے جبکہ ک۱ اور ک۲ دونوں صفر ہوں۔ اس لئے

س = √(س۱² + س۲² + ۲ س۱ س۲ جم عہ)

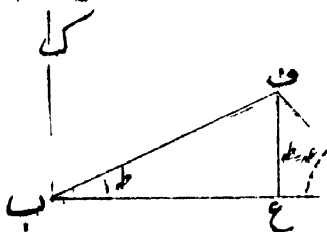
ک س = س۱ س۲ ج۱ جب عہ

لا / (ج۱ − لا) = س۲ (س۱ جم عہ + س۲) / س۱ (س۱ + س۲ جم عہ)

اور جب طہ / س۲ جب عہ = جم طہ / (س۱ + س۲ جم عہ) = ۱ / √(س۱² + س۲² + ۲ س۱ س۲ جم عہ)

پس جم طہ / جم (عہ − طہ) = (س۱ + س۲ جم عہ) / (س۱ جم عہ + س۲)

۱۹۵— دو قوتیں س۱ اور س۲ نقاط ا اور ب پر اج، دب کی سمتوں میں عمل کرتی ہیں ان کا مرکزی محور معلوم کرنے کا ہندسی عمل دریافت کرو۔




فرض کرو کہ دو قوتیں س۱ اور س۲ ہیں جن میں سے س۲، ب د کے ساتھ عمل کرتی ہے اور س۱ نقطہ ب پر اج کے

متوازی عمل کرتی ہے، نیز ان کے حاصل س کی سمت ب ک ہے اور یہ $س_1$ اور $س_2$ کی سمتوں کے ساتھ بالترتیب زاوئے طہ اور عہ - طہ بناتی ہے۔ پس ب ک دفعہ ۱۹۳ کی شکل کی مانند مرکزی محور کے متوازی ہے۔ سطح مستوی ک ب ا میں ب اور ا پر ∠ ا ب ف = طہ اور ∠ ب ا ف = عہ - طہ بناؤ تب ف ع جو ا ب پر عمود وار ہے مرکزی محور ہوگا اور حاصل پیچ کا جفت = ک × ع ف کیونکہ دفعۂ ماقبل کی مساواتوں سے ہم آسانی سے حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{\text{لا}}{\text{ج}_2 - \text{لا}} = \frac{\text{جب طہ جم(عہ - طہ)}}{\text{جم طہ جب(عہ - طہ)}} = \frac{\text{ا ف}}{\text{ب ف}} \times \frac{\text{جم(عہ - طہ)}}{\text{جم طہ}} = \frac{\text{ا ع}}{\text{ب ع}}$$

پس ع ف مرکزی محور ہے

نیز دفعۂ ماقبل کی رو سے

$$\frac{\text{ک}}{\text{س}} = \frac{\text{س}_1\text{س}_2 \times \text{ج}_2 \text{ جب عہ}}{\text{س}^2} = \frac{\text{س}_1\text{ ج جب}_1\text{ طہ}}{\text{س}_2\text{ جب عہ}} = \frac{\text{ج}_2\text{ جب(عہ - طہ) جب طہ}}{\text{جب عہ}} = \text{ع ف}$$

یعنی ک = س × ع ف

# مثالیں

۱۔ اگر ف اور ق دو غیر متقاطع قوتیں ہوں جن کی سمتیں ایک دوسرے پر عمود وار ہوں تو ثابت کرو کہ مرکزی محور سے ان قوتوں کے خطوط عمل کے فاصلے نسبت $ق^2 : ف^2$ میں ہیں۔

۲۔ ثابت کرو کہ قوتوں کا کوئی نظام لا متناہی طریقوں سے دو مساوی قوتوں میں تحویل ہو سکتا ہے جن کے درمیان کوئی معلومہ زاویہ بنے۔ اگر درمیانی زاویہ معلوم ہو تو قوتوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کرو۔

۳۔ دو قوتیں ف اور ق ایسی ہیں کہ ان کا مرکزی محور بلحاظ مقام کے معلوم ہے اور ف کا خطِ عمل معلوم ہے۔ ثابت کرو کہ ق کے خطِ عمل کا تعریفیا ایک محرو طی نما ہے۔

۴۔ دو قوتیں ایک معلومہ نظام (ک، س) کے معادل ہیں اور ان کے درمیان معلومہ زاویہ ۲ عہ بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ

$\frac{۲ک}{سما}$ ـ کم عدد ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک قوت، $\frac{۱}{۲}$ سما قطاعہ کے مساوی ہے۔

۵ــــ ایک منتظم چہار سطحی کے کناروں کے ساتھ قوتیں اس طرح عمل کرتی ہیں: ف اب ج اور د ا کے ساتھ، ف اج اور د ب کے ساتھ، س، اب اور د ج کے ساتھ۔ ثابت کرو کہ معادل پیچ کی گہائی چہار سطحی کے کنارہ کے $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ کے مساوی ہے۔

(منتظم چہار سطحی کے مقابل کے کناروں کے درمیان چھوٹے سے چھوٹے فاصلے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔)

۶ــــ ایک منتظم چہار سطحی ا ب ج د ہے جس کا ہر ضلع ل ہے۔ اس کے کناروں کے ساتھ ایک ہی گہائی گ کے پیچ عمل کرتے ہیں۔ اگر اب، د ج کے ساتھ عمل کرنے والے پیچوں کی حدتیں مساوی ہوں اور اسی طرح ب ج، د ا اور د ب، ج ا کے ساتھ عمل کرنے والے پیچوں کی حدتیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ معادل پیچ کی گہائی گ + $\frac{ل}{۲\sqrt{۲}}$ ہوگی۔

۷ــــ قوتوں کا ایک نظام ہے جس کے مرکزی محور کو ایک خط مستقیم علی القوائم قطع کرتا ہے ثابت کرو کہ اس خط مستقیم پر کے مختلف نقطوں پر صدر معیار اثر کے محور جو سطح مرتسم کرتے ہیں وہ زائدی مکافی نما ہے۔

[ ایک معلوم خط مستقیم کو لا کا محور مانو۔ معلوم نظام (سا، ک) کے مرکزی محور کو ی کا محور اور ان دونوں پر جو خط عمود وار ہے اس کو ما محور مانو، تب نقطہ (لا، ۰، ۰) پر قوت س، محور ی کے متوازی ہے اور جفت ث ہے جو سا کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہے اور و لا پر عمود وار ہے اس طرح کہ ک = ث جم ط اور ث جب ط = س لا، تب اگر ث کے محور پر کوئی نقطہ لا، ما، ی ہو تو $\frac{ما}{ی}$ = مس ط = $\frac{س لا}{ک}$، پس مطلوبہ طریق زائدی مکافی نما س لا ی = ک ما ہوگا ]

۸ــــ ایک معلوم خط مستقیم پر کے سب نقطوں کے لئے قوتوں کے ایک معلوم نظام سے

متناظر صدر معیار اثر کے محور کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ محور ایک زائدی مکانی نما پر واقع ہیں اور اُن کے سرے ایک اور معلومہ خطِ مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔

معلومہ خطِ مستقیم کو و لا فرض کرو اور مرکزی محور اور و لا کے عمودی خط کو و ی مانو۔ تب صریحاً و ی کے ساتھ کوئی ترکیبی قوت نہیں ہے اور نہ و ی کے گرد کوئی ترکیبی جفت ہے۔ تب محوروں کے ساتھ عمل کرنے والی ترکیبی قوتیں (لا، ما) ہیں اور ترکیبی جفت (ل، م) ہیں، پس نقطہ (سا، ۰، ۰) پر ترکیبی جفت ل، م اور ‎-‎ سا ما ہیں (دفعہ ۱۹۰)

پس وہاں صدر معیار اثر کے محور کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{سا}}{\text{ل}} = \frac{\text{ا}}{\text{م}} = \frac{\text{ی}}{-\text{سا ما}}$$

سا کو ساقط کرنے سے ہمیں زائدی مکانی نما کی مساوات $\frac{\text{ل}}{\text{م}}\,\text{ا}^2 = \text{لا ا} + \frac{\text{م}}{\text{ما}}\,\text{ی}$ حاصل ہوتی ہے۔

نیز اس محور کے سرے کے محدد (لا، ا، ی) مساواتوں

$$\text{لا} = \text{سا} + \text{لہ ل} \;،\; \text{ا} = \text{لہ م} \;،\; \text{ی} = -\,\text{لہ سا ما}$$

سے حاصل ہوتے ہیں جہاں لہ کوئی مستقل ہے۔

سا کو ساقط کرنے سے ہمیں لا، ا ی کا طریق ایک خطِ مستقیم حاصل ہوتا ہے۔

۹ — دو ریچ ہیں جن کی گھائیاں $\text{گ}_1$ اور $\text{گ}_2$ ہیں اور جن کے محوروں کا درمیانی فاصلہ ۲ ا ہے۔ اگر حاصل ریچ کی گھائی گ ہو اور اس کا محور ترکیبی ریچوں کے محوروں سے متساوی الفصل ہو تو ثابت کرو کہ اُن کا درمیانی زاویہ ہوگا $\text{مس}^{-1}\frac{\text{ا}(2\text{گ} - \text{گ}_1 - \text{گ}_2)}{\text{ا}^2 - (\text{گ} - \text{گ}_1)(\text{گ} - \text{گ}_2)}$

۱۰ — تین معلومہ ریچ ہیں جن کے محور متراکز اور ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں ان ریچوں پر $\text{گ}_1$، $\text{گ}_2$، $\text{گ}_3$ گھائیوں والے ریچ عمل کرتے ہیں جن کا حاصل ایک معلومہ گھائی گ والے ریچ پر عمل کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس ریچ کا طریق یہ زائدی نما ہے

$$(\text{گ}-\text{گ}_1)\,\text{لا}^2 + (\text{گ}-\text{گ}_2)\,\text{ا}^2 + (\text{گ}-\text{گ}_3)\,\text{ی}^2 + (\text{گ}-\text{گ}_1)(\text{گ}-\text{گ}_2)(\text{گ}-\text{گ}_3) = ۰$$

حوالے کے محور معلومہ پیچوں کے محور ہیں۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ ایک ریخ جس کی قوت س ہے اور گھائی گ ج ہے دو ایسی قوتوں کے معادل ہے جن کے درمیان زاویہ ۲ ط بنتا ہے اور چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ۲ ج ہے اور جن کی مقداریں ہیں

$$\frac{س}{۲}\left[\sqrt{۱+گ\ مس\ ط}\ \pm\ \sqrt{۱-گ\ مم\ ط}\ \right]$$

۱۹۶۔ دو معلومہ ریخوں کے محور ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔ ان کی حدتیں لا اور ما ہیں اور ان کی گھائیاں گ$_{لا}$ اور گ$_{ما}$ ہیں۔ اگر گھائیاں معلوم ہوں تو مرکزی محور کا طریق معلوم کرو۔

فرض کرو کہ لا اور ما کے حاصل س کی سمت وا ہے جو پہلے ریخ کے محور و لا کے ساتھ زاویہ ط بناتی ہے پس

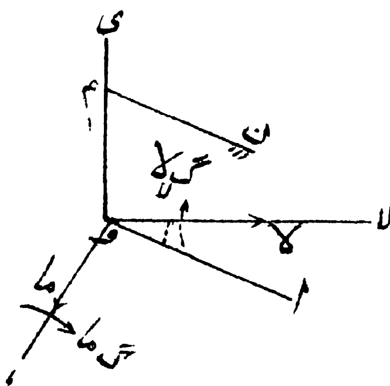
$$\frac{جم\ ط}{لا}=\frac{جب\ ط}{ما}=\frac{۱}{س}$$

وا کے گرد حاصل جفت

$$= گ_{لا} \times لا\ جم\ ط + گ_{ما} \times ما\ جب\ ط$$

$$= (گ_{لا}\ جم^{۲}ط + گ_{ما}\ جب^{۲}ط) \times س \quad \ldots\ldots\ (۱)$$

مستوی سطح لا و ما میں وا پر کسی علی القوائم خط کے گرد حاصل جفت




$$= -گ_{لا} \times لا\ جب\ ط + گ_{ما} \times ما\ جم\ ط$$

$$= (گ_{ما} - گ_{لا})\ س\ جب\ ط \times جم\ ط$$

آخر الذکر جفت ی و ا کی سطح مستوی میں دو متوازی قوتوں کے معادل ہے۔

اب دفعہ ۱۵ کی رو سے متوازی قوتیں اور رۃ کے ساتھ عمل کرنے والی قوت ما ل کر ایک قوت سا کے مساوی ہیں جو وۃ کے متوازی ایک ایسے خط ھم (ن) کے ساتھ عمل کرتی ہے کہ

$$\text{و ھ} = (\text{گ}_{\text{ا}} - \text{گ}_{\text{لا}})\ \text{جب ط جم ط} \quad \dots \dots \quad (۲)$$

جفت (۱) کے محور کو ھم ن پر منتقل کرنے سے ہمیں ایک ریخ حاصل ہوتا ہے جس کا محور ھم ن ہے اور جس کا معیار اثر اور قوت بالترتیب $(\text{گ}_{\text{لا}}\ \text{جم}^2\ \text{ط} + \text{گ}_{\text{ا}}\ \text{جب}^2\ \text{ط})$ سا اور سا ہیں اور بنا علیہ ریخ کی گمائی

$$\text{گ} = \text{گ}_{\text{لا}}\ \text{جم}^2\ \text{ط} + \text{گ}_{\text{ا}}\ \text{جب}^2\ \text{ط}$$ ہے

اب خط ھم ن پر کوئی نقطہ (لا ، ما ، ی) لیا جائے تو نتیجہ (۲) کی رو سے

$$\text{ی} = (\text{گ}_{\text{ا}} - \text{گ}_{\text{لا}}) \frac{\text{لا ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$$

یعنی ھم ن سطح $(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)\ \text{ی} = (\text{گ}_{\text{ا}} - \text{گ}_{\text{لا}})\ \text{لا ما}$ پر واقع ہوتا ہے۔

اس سطح کو اسطوانہ نما کہتے ہیں۔ نیز $\text{گ}_{\text{لا}}$ اور $\text{گ}_{\text{ا}}$ کو اس کی صدر گمائیاں کہتے ہیں۔

اس سطح کی مساوات دفعہ ۹۰ سے فوراً نکل سکتی تھی کیونکہ ایک نظام کے مرکزی محور کی مساواتیں ہیں

$$\frac{\text{گ}_{\text{لا}}\ \text{لا} + \text{ی ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{گ}_{\text{ا}}\ \text{ما} - \text{ی لا}}{\text{ما}} = \frac{-\text{لا ما} + \text{ما لا}}{0}$$

جس سے حاصل ہوتا ہے $\text{ی}\ (\text{لا}^2 + \text{ما}^2) = (\text{گ}_{\text{ا}} - \text{گ}_{\text{لا}})\ \text{لا ما}$

اور $\text{لا ما} = \text{ما لا}$

لا اور ما کو ساقط کرنے سے ہمیں مرکزی محور کا طریق ملتا ہے

$$(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)\ \text{ی} = (\text{گ}_{\text{ا}} - \text{گ}_{\text{لا}})\ \text{لا ما}$$

۱۹۷ - اسطوانہ نما (لا^۲ + ما^۲) ی = ۲ ا لا ما کی ساخت کے لئے ہندسی عمل-

لا ما کی سطح مستوی میں نصف قطر ا کا ایک دائرہ کھینچو جو لا کے محور کو مبدا و پر مس کرے اس دائرہ کا سمتی نیم قطر و ا کھینچو جو و لا کے ساتھ کوئی زاویہ طہ بنائے اور ا ل و ا پر عمود کھینچو، تب

ا ل = ا جب ۲ طہ

سطح مستوی ما = لا مس طہ جو و ا میں سے گزرتی ہے اور مستوی لا و ما پر عمود وار ہے اسطوانہ نما کو کاٹتی ہے

جہاں ی = ا جب ۲ طہ = ا ل

اس لئے اگر ا پر ہم عمود ا ن لیں جس کا طول ا ل ہو اور ن میں سے و ی پر عمود ن م نکالیں تو ن م ہمیشہ اسطوانہ نما کا مولد ہوگا

۱۹۸ - کوئی پیچ لا متناہی طریقوں سے دو ایسے پیچوں میں تحویل کیا جا سکتا ہے جن کے محور علی القوائم ہوں-

فرض کرو کہ ایک پیچ (سہ، گ سہ) ہے جس کا محور م ن ہے، (دیکھو شکل دفعہ ۱۹۶)

کسی خط م و پر جو م ن پر عمود وار ہو ایک نقطہ و لیکر اس کو مبدا مانو اور و میں سے گزرنے والے و م پر عمود وار دونوں علی القوائم خطوں کو و لا اور و ما فرض کرو-

اب فرض کرو کہ م و = ا اور لا و ا = طہ معلوم ہیں-

تب حسب دفعہ ۱۹۶ پیچ (لا، گ لا) محور و لا کے گرد اور (ما، گ ما) محور و ما کے گرد معادل ہیں ایک پیچ (سہ، گ سہ) کے جہاں

گ = گ لا جم^۲ طہ + گ ما جب^۲ طہ

اور $ا_۱$ = (گ$_۱$ ـ گ$_{لا}$) جم طہ جب طہ

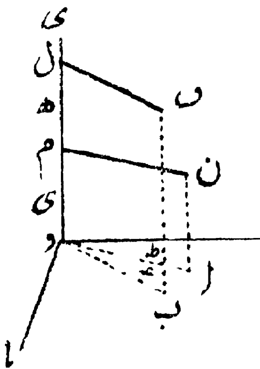
ان سے حاصل ہوتا ہے گ$_{لا}$ = گ ـ $ا_۱$ س طہ اور گ$_{ما}$ = گ + $ا_۱$ مم طہ

نیز لا = $ر_۱$ جم طہ اور ما = $ر_۱$ جب طہ

اس لئے اگر $ر_۱$ اور گ کی قیمتیں معلوم ہوں تو ہمیں $ا_۱$ اور طہ کی کسی معلومہ قیمتوں کے جواب میں لا، گ$_{لا}$ اور ما، گ$_{ما}$ کی قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں۔

**۱۹۹** ـ معلومہ پیچوں پر کوئی دو ریچ ایک اور صرف ایک ہی اسطوانہ نما کا تعین کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ م ن اور ل ق دو ریچوں کے محور ہیں، گ$_۱$ اور گ$_۲$ ان کی گھائیاں ہیں اور ان کے درمیان زاویہ عہ ہے اور چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ م ل طول میں ھ کے مساوی ہے۔



اب اگر ہم م ل پر ایک نقطہ و اور دو علی القوائم خطوط و لا، و ما ایسے معلوم کر سکیں کہ جب ہم ان ریچوں کو و لا اور و ما کے گرد تحلیل کریں تو و لا کے گرد دو ترکیبی ریچوں کی گھائیاں باہم مساوی ہوں اور نیز و ما کے گرد ترکیبی ریچوں کی گھائیاں مساوی ہوں تو ہم نے مسئلہ کو ثابت کر لیا۔ کیونکہ و لا کے گرد دو ریچ ایک ریچ میں ترکیب پا سکتے ہیں اور اسی طرح سے و ما کے گرد دو ریچ ایک ریچ میں ترکیب پا سکتے ہیں اور حسب دفعہ ۱۹۶ ان دو حاصل ریچوں سے ایک اسطوانہ نما حاصل ہوتا ہے۔

پس ہم فرض کرتے ہیں کہ م ن کے گرد کا ریچ و لا اور و ما کے گرد دو

رنجوں کے مساوی ہے جن کی گھائیاں گ_لا اور گ_ا ہیں جہاں وم = ی
اور زاویہ لا و ا = ط
اور اسی طرح ل ق کے لئے جہاں لا و ب = ط + ع
تب حسب دفعہ ۱۹۶

گ_ا = گ_لا جم² ط + گ_ا جب² ط = (گ_لا + گ_ا)/۲ + (گ_لا − گ_ا)/۲ جم ۲ط ... (۱)

ی = (گ_ا − گ_لا) جم ط جب ط = (گ_ا − گ_لا)/۲ جب ۲ط ... (۲)

گ_۲ = گ_لا جم² (ط + ع) + گ_ا جب² (ط + ع)
= (گ_لا + گ_ا)/۲ + (گ_لا − گ_ا)/۲ جم (۲ط + ۲ع) ... (۳)

اور ی + ھ = (گ_ا − گ_لا) جم (ط + ع) جب (ط + ع)
= (گ_ا − گ_لا)/۲ جب (۲ط + ۲ع) ... (۴)

اس لئے
گ_ا + گ_۲ = گ_لا + گ_ا + (گ_لا − گ_ا) جم ع جم (۲ط + ع) ... (۵)

گ_ا − گ_۲ = (گ_لا − گ_ا) جب ع جب (۲ط + ع) ... (۶)

اور ھ = (گ_ا − گ_لا)/۲ [جب (۲ط + ۲ع) − جب ۲ط]
= (گ_ا − گ_لا) جم (۲ط + ع) جب ع ... (۷)

(۶) اور (۷) سے مس (۲ط + ع) = (گ_۲ − گ_ا)/ھ ... (۸)

(۵) اور (۶) سے

گ لا + گ ما = گ ۱ + گ ۲ - (گ ۱ - گ ۲) مم عہ مم (۲ طہ + عہ) = گ ۱ + گ ۲ + ھ مم عہ

اور گ ما - گ لا = (گ ۲ - گ ۱) قم عہ قم (۲ طہ + عہ) = √(ھ^۲ + (گ ۲ - گ ۱)^۲ قم^۲ عہ)

ان مساواتوں سے گ لا اور گ ما حاصل ہوتے ہیں۔

نیز (۲) سے

ی = ۱/۲ · (گ ۱ - گ ۲)/(جب عہ جب (۲ طہ + عہ)) · جب ۲ طہ

= ۱/۲ · (گ ۲ - گ ۱)/(جب عہ) [جم عہ - جب عہ مم (۲ طہ + عہ)]

= ۱/۲ [(گ ۲ - گ ۱) مم عہ - ھ]

ان قیمتوں سے و لا اور و ما کے محل واحد طور پر متعین ہو جاتے اور اُن کے گرد کے ریخ بھی متعین ہو جاتے ہیں۔

۲۰۰ - مقادیر بالا حسب دفعہ ماقبل معلوم کر لینے کے بعد اگر م ن اور ل ق کے گرد ریخوں کے حدتیں س ۱ اور س ۲ ہوں تو یہ دو ریخ معادل ہیں، قوتوں

س ۱ جم طہ + س ۲ جم (طہ + عہ)، و لا کے ساتھ

س ۱ جب طہ + س ۲ جب (طہ + عہ)، و ما کے ساتھ

کے اور جفتوں

گ لا [س ۱ جم طہ + س ۲ جم (طہ + عہ)]، و لا کے گرد

گ ما [س ۱ جب طہ + س ۲ جب (طہ + عہ)]، و ما کے گرد

کے حسب دفعہ ۱۹۶ کے مطابق یہ قوتیں اور جفت ایک ایسے ریخ میں ترکیب پا جاتے ہیں جو ذیل کے اسطوانہ نما کے ایک پیچ کے گرد عمل کرتا ہے

$$ی\,(لا^{۲} + ما^{۲}) = (گ_{ما} - گ_{لا})\, لاما = لاما \, قم ع \sqrt{ھ^{۲} - (گ_{۲} - گ_{۱})^{۲}}$$

مشق — ایک پیچ کی گھائی ۱ اور خطِ عمل ما = ۲ ، ی = $\sqrt{۳}$ ہے اور ایک دوسرے پیچ کی گھائی ۴ اور خطِ عمل (ما − ۲) $\sqrt{۳}$ = لا − ۳ ، ی = ۲ $\sqrt{۳}$ ہے ان سے ایک اسطوانہ نما متعین ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی صدر گھائیاں ۴ − ۲ $\sqrt{۳}$ اور ۴ + ۲ $\sqrt{۳}$ ہیں اور اس کے صدر محوروں کی مساواتیں ہیں ما − ۲ = ($\sqrt{۳}$ ∓ ۲) (لا − ۳)

۲۰۱ — ایک ہی اسطوانہ نما کے پیچوں پر کے ریخوں کا حاصل ریخ۔ اسطوانہ نما کی صدر گھائیاں $گ_{لا}$ اور $گ_{ما}$ ہیں۔ اب اس ریخ پر غور کرو جس کی حدت س ہے اور جس کی گھائی ایسی گھائی ہے جو اس اسطوانہ پر محور و لا کے ساتھ زاویہ ط بنانے والے پیچ کے لئے مناسب ہے۔ دفعہ ۱۹۶ کی رو سے یہ ریخ ان دو ریخوں کے معادل ہے

ایک ریخ (س جم ط ، $گ_{لا}$ س جم ط) محور و لا کے گرد

اور دوسرا ریخ (س جب ط ، $گ_{ما}$ س جب ط) محور و ما کے گرد

اس لئے اگر ہر ایک معلوم ریخ کو و لا اور و ما کے گرد ریخوں میں تحویل کیا جائے تو یہ سب ریخ قوتوں اور جفتوں کے حسب ذیل نظام کے معادل ہو جائیں گے:۔

$$لا = \Sigma\, س\, جم\, ط$$

$$ما = \Sigma\, س\, جب\, ط$$

$$ل = \Sigma\,(گ_{لا}\, س\, جم\, ط) = گ_{لا}\, لا$$

$$م = \Sigma\,(گ_{ما}\, س\, جب\, ط) = گ_{ما}\, ما$$

یعنی و لا کے گرد ریخ (لا ، $گ_{لا}$ لا) اور و ما کے گرد ریخ (ما ، $گ_{ما}$ ما)۔

ان ریخوں کی گھائی وہی ہے جو اسطوانہ نما کی صدر گھائیاں ہیں۔ اس لیئے یہ سب مل کر ایک ریخ (س، گ س) کے معادل ہونگے جو اسطوانہ نما کے محور لا سے زاویہ فہ بنانے والے پیچ پر عمل کرے گا جہاں

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\Sigma\ \text{سا جب طہ}}{\Sigma\ \text{سا جم طہ}}$$

$$\text{س} = \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} = \sqrt{\{\Sigma(\text{سا جم طہ})\}^2 + \{\Sigma(\text{سا جب طہ})\}^2}$$

$$\text{اور گ} = \text{گ}_{\text{لا}}\ \text{جم}^2\ \text{فہ} + \text{گ}_{۱}\ \text{جب}^2\ \text{فہ}$$

۲۰۲ - اوپر جو کچھ بیان ہوا اُس سے ظاہر ہے کہ ایک ہی اسطوانہ نما کے پیچوں پر کے ریخ تعادل میں ہونگے جبکہ ان کی قوتوں کو ان کی سمتوں کے متوازی ایک ہی نقطہ پر منتقل کر دینے پر یہ قوتیں متعادل ہو جائیں کیونکہ اس صورت میں لا اور ما دونوں صفر ہونگے۔

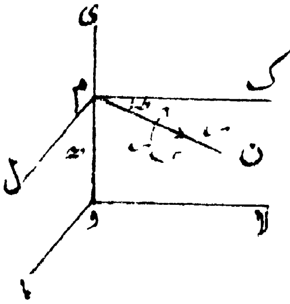
بالخصوص ایک ہی اسطوانہ نما کے پیچوں پر کے تین ریخ متعادل ہوں گے اگر ہر ایک کی حدت باقی دو کے درمیانی زاویہ کی جیب کے متناسب ہو۔

۲۰۳ - ایک ریخ کی قوت سا اور معلومہ پیچ کے گرد اس کی گھائی گ ہے ثابت کرو کہ اگر جسم کو $\text{گ}_{۱}$ گھائی والے ایک دوسرے پیچ کے گرد زاویہ مف سہ میں سے مروڑا جائے تو اس ریخ کی قوتوں کا کام ہوگا

$$\text{سا مف سہ} \{(\text{گ} + \text{گ}_{۱})\ \text{جم طہ} - \text{ھ جب طہ}\}$$

جہاں طہ دونوں پیچوں کے محوروں کا درمیانی زاویہ ہے اور ھ اُن کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے۔

فرض کرو کہ پیچ $\text{گ}_{۱}$ کا محور ولا ہے، ریخ کا محور ھم ن ہے اور ان کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ وھم طول میں ھ ہے۔ ولا کے متوازی




م ک کھینچو اور م ک اور و م پر عمود م ل کھینچو۔ قوت ر ان دو قوتوں کے معادل ہے قوت ر جم ط ، م ک کی سمت میں اور ر جب ط م ل کی سمت میں۔ جزو ترکیبی ر جم ط معادل ہے و لا کے ساتھ قوت ر جم ط اور و ما کے گرد جفت ر جم ط × ہ کے۔

جزو ترکیبی ر جب ط معادل ہے و ما کے ساتھ قوت ر جب ط کے اور و لا کے گرد جفت - ر جب ط × ہ کے۔

م ن کے گرد جو جفت گ × ر عمل کرتا ہے وہ ان دو جفتوں کے معادل ہے گ × ر جم ط خط م ک کے گرد اور گ × ر جب ط خط م ل کے گرد۔ ان کے محوروں کو و لا اور و ما پر منتقل کیا جا سکتا ہے۔

پس معلومہ رینچ معادل ہے ان اجزا کے

| | | |
|---|---|---|
| ایک قوت | ر جم ط | ، و لا کے ساتھ |
| ایک قوت | ر جب ط | ، و ما کے ساتھ |
| ایک جفت | ر (گ جم ط - ہ جب ط)، و لا کے گرد | |
| ایک جفت | ر (گ جب ط + ہ جم ط)، و ما کے گرد | |

اب جسم کا ہٹاؤ مشتمل ہے و لا کے گرد ایک زاوئی ہٹاؤ مف سہ کے اور و لا کے ساتھ ایک خطی ہٹاؤ گ، × مف سہ کے۔

زاوئی ہٹاؤ کی وجہ سے جفتوں کا کام ہے ر (گ جم ط - ہ جب ط) مف سہ (دیکھو دفعہ ۹۷) اور قوتوں کا کام صفر ہے۔

خطی ہٹاؤ کی وجہ سے جفتوں کا کام صفر ہے اور قوتوں کا کام $س_1$ جم $ط$ × $گ_1$ $مف$ $سہ$ ہے
پس خفیف سے ہٹاؤ میں قوتوں کا مجموعی کام

$$= س_1 \text{ مف } سہ \{(گ + گ_1) \text{ جم } ط - ھ \text{ جب } ط\}$$

اگر گ اور $گ_1$ کو باہم بدل دیا جائے تو اس کام میں کوئی فرق نہیں آتا۔ پس اگر ہمارے پاس پیچ ولا کے گرد رنچ $(س_1، گ_1 س_1)$ ہوتا اور جسم کو م ن محور پر کھائی گ والے پیچ کے گرد خفیف سے زاویہ مف سہ میں سے گھمایا جاتا تو بھی اتنا ہی کام ہوتا۔

۲۰۴۔ موہوم کام کے اصول سے ظاہر ہے کہ اگر ایک جسم صرف محور ولا کے پیچ پر حرکت کرسکتا ہے اور اس پر پیچ م ن کا ایک رنچ عمل کرے تو جسم تعادل میں ہوگا اگر

$$(گ + گ_1) \text{ جم } ط - ھ \text{ جب } ط = ۰$$

وہ پیچ جو اس شرط کو پورا کرتے ہیں متکافی پیچ کہلاتے ہیں۔ پس متکافی پیچوں سے وہ پیچ مراد ہیں کہ اگر کسی ایک پیچ کے گرد کسی حدت اور مناسب کھائی والا رنچ جسم پر عمل کرے اور جسم صرف دوسرے پیچ پر حرکت کرسکتا ہو تو جسم متعادل رہیگا۔

اوپر کی شرط سے ظاہر ہے کہ دو پیچ جن کے محور قطع کرتے ہوں یعنی $ھ = ۰$ متکافی ہونگے اگر ان کے محور علی القوائم ہوں یا اگر ان کی کھائیاں مساوی اور علامت میں مختلف ہوں۔

۲۰۵۔ اگر کوئی پیچ جہ ہر دو پیچوں عہ اور بہ کے متکافی ہو تو یہ عہ اور بہ سے متعین ہونے والے اسطوانہ نما پر کے ہر پیچ لہ کے متکافی ہوگا۔

دفعہ ۲۰۱ سے ظاہر ہے کہ چونکہ عہ، بہ اور لہ ایک ہی اسطوانہ پر کے پیچ ہیں اسلئے لہ پر کا کوئی رنچ عہ اور بہ کے گرد دو رنچوں کے معادل ہوگا اگر رنچ لہ کی حدت، رنچوں عہ اور بہ کی حدتوں کے اجزائے ترکیبی کے معادل ہو۔ رنچ لہ کی بجائے عہ اور بہ کے گرد یہ دو ترکیبی رنچ لگاؤ۔

چونکہ پیچ جہ اور عہ متکافی ہیں اس لئے عہ کے گرد عمل کرنے والے رنچ کا

موہوم کام جہ کے گرد کسی ہٹاؤ کے لیئے صفر ہوگا - اسی طرح سے ہ کے گرد عمل کرنے والے سچ کا موہوم کام بھی جہ کے گرد کسی ہٹاؤ کے لیئے صفر ہوگا -

اس لیئے ریخ لہ کا مجموعی موہوم کام جہ کے گرد کسی ہٹاؤ کے لیئے صفر ہوگا - پس لہ اور جہ متکافی ہیں -

۲۰۶ - **صفری خطوط اور صفری مستوی سطحیں** - فرض کرو کہ کسی مبدا یا اساسی نقطہ وَ کے متناظر قوتوں کے نظام کی حاصل قوت سرا اور حاصل جفت ںث ہے - جفت ںث کے محور پر کوئی عمودی خط وَ میں سے کھینچو - تب اس خط کے گرد نظام کی تمام قوتوں کے معیار اثروں کا جبریہ مجموعہ صفر ہوگا کیونکہ اس محور کے گرد ںث کا جزو ترکیبی کچھ نہیں ہے اور سرا اس خط سے ملتا ہے -

اس بنا پر اس خط کو صفری خط کہتے ہیں اور اس کے طریق کو یعنی وَ میں سے ںث کے محور پر عمود وار خط کے طریق کو وَ کا صفری مستوی کہتے ہیں - نیز نقطہ وَ کو سطح مستوی کا صفری نقطہ کہتے ہیں -

۲۰۷ - کسی محوروں و لا، و ما، و ی کے لحاظ سے کسی معلومہ نقطہ (ف، گ، ھ) کے صفری مستوی کی مساوات معلوم کرو -

فرض کرو کہ و لا، و ما، و ی کے ساتھ حاصل قوت کے اجزائے ترکیبی لا، ما، ےے اور ان کے گرد حاصل جفت کے ترکیبی اجزا، ل، مر، ن، ہیں - دفعہ ۹۰ کی رُو سے نقطہ (ف، گ، ھ) میں سے و لا، و ما، و ی کے متوازی خطوط کے گرد

ل - گ ےے + ھ ما، مر - ھ لا + ف ےے، ن - ف ما + گ لا جفت ہیں -

اور یہ نقطہ (ف، گ، ھ) پر حاصل جفت کے محور کے سمتی جیوب التمام کے تناسب ہیں لیکن حاصل جفت کا محور اس نقطہ پر صفری مستوی سطح کا عماد ہے -

پس صفری مستوی سطح کی مساوات ہے

(لا - ف)(ل - گ ےے + ھ ما) + (ما - گ)(مر - ھ لا + ف ےے)

+ (ی - ھ)(ن - ف ما + گ لا) = ۰

یعنی لا (ل ـ گ ے + ھ ما) + ما (م ـ ھ لا + ف ے)

+ ی (ن ـ ف ما + گ لا) = ف ل + گ م + ھ ن ...(۱)

برعکس ازیں اگر ہم سطح مستوی

ل لا + م ما + ن ی = ا . . . . . . (۲)

کا صفری نقطہ معلوم کرنا چاہتے ہیں تو فرض کرو کہ مطلوبہ نقطہ ہے

(ف ، گ ، ھ)

اب نقطہ (ف ، گ ، ھ) سطح مستوی (۲) پر واقع ہے ۔ اس لئے مساواتوں کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ف / (لا ـ ن ھ + م ن) = گ / (ما ـ ل ن + ن ل) = ھ / (ے ـ م ل + ل ھ)

= ۱ / (ل لا + م ما + ن ے)

جس سے مستوی سطح (۲) کا صفری نقطہ حاصل ہوسکتا ہے۔

۲۰۸ ـــ وہ شرط معلوم کرو کہ خطِ مستقیم

(لا ـ ف) / ل = (ما ـ گ) / م = (ی ـ ھ) / ن

قوتوں کے مذکورہ بالا نظام کا صفری خط ہو۔

محوروں کے متوازی (ف ، گ ، ھ) میں سے گزرنے والے خطوں کے گرد ترکیبی جفت یہ ہیں

ل ـ گ ے + ھ ما ، م ـ ھ لا + ف ے ، ن ـ ف ما + گ لا

اس لئے دئے ہوئے خط کے گرد جفت کا معیار اثر

= ل (ل - گ ے + ھ ما) + م (م - ھ لا + ن ے)
+ ن (ن - ن ما + گ لا)

اور یہ صفر ہوگا بشرطیکہ

لا (م ھ - ن گ) + ما (ن ن - ل ھ) + ے (ل گ - م ن)
= ل ل + م م + ن ن

یعنی اگر

| لا | ما | ے |
|---|---|---|
| ل | م | ن |
| ن | گ | ھ |

= ل ل + م م + ن ن

پس یہ اس امر کی شرط ہے کہ دیا ہوا خط مذکورہ بالا نظام کا صفری خط ہو۔

مشق۔ ثابت کرو کہ قوتوں کے نظام کے کسی صفری خطوں میں سے چار خط کسی زائد نما کے مکون ہوتے ہیں جن میں دو ایک نظام سے متعلق ہوتے ہیں اور دو دوسرے سے۔

فرض کرو کہ زائد نما $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - \frac{ی^2}{ج^2} = ۱$ ہے

اور فرض کرو کہ اس کے مرکز اور محوروں کے لحاظ سے قوتوں کا نظام

(لا، ما، ے ; ل، م، ن) سے تعبیر ہوتا ہے۔

زائد نما کے کسی مکون کی مساوات ہے

$$\frac{لا - ا\ جم\ ط}{ا\ جب\ ط} = \frac{ما - ب\ جب\ ط}{- ب\ جم\ ط} = \frac{ی}{ج}$$

دفعہ ما قبل کی رو سے یہ قوتوں کے نظام کا صفری خط ہوگا اگر

لا (- ب ج جب ط) + ما ج ا جم ط + ے ا ب = ل ا جب ط - م ب جم ط + ن ج

$$\text{یعنی اگر جب ط}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}+\frac{\text{ل}}{\text{ب ج}}\right)-\text{جم ط}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ب}}+\frac{\text{م}}{\text{ج ا}}\right)=\frac{\text{ے}}{\text{ج}}-\frac{\text{ن}}{\text{و ب}}$$

جس سے صریحاً بالعموم ط کی دو قیمتیں حاصل ہونگی - پس مکونوں کے ایک نظام کے دو مکون صفری خطوط ہیں - اسی طرح سے مکونوں کے دوسرے نظام کے لئے۔

**۲۰۹** - ثابت کرو کہ قوتوں کا کوئی معلومہ نظام دو قوتوں میں تحویل ہو سکتا ہے جن میں سے ایک کسی معلومہ خط و ا کے ساتھ عمل کرتی ہے -

و کو اساسی نقطہ یا مبدا مانو اور فرض کرو کہ س اور ت حاصل قوت اور جفت ہیں - و ا اور قوت س کے خط عمل میں سے ایک سطح مستوی کھینچو جو جفت کی سطح عمل سے (یعنی سطح مستوی ج و د سے جو جفت کے محور پر عمود وار ہے) خط و ب میں ملے - س کو دو قوتوں میں تحلیل کرو جن میں سے ایک ف، و ا کے ساتھ عمل کرے اور دوسری $\text{ف}_2$، و ب کے ساتھ عمل کرے -

قوت $\text{ف}_2$، سطح مستوی ب و ج میں حاصل جفت کی دو قوتوں سے مل کر ایک قوت $\text{ف}_2$ بن جائیگی جس کا خط عمل و ب کے متوازی ہوگا -

اس سے ظاہر ہے کہ قوتوں کا کوئی نظام معادل ہوتا ہے ایک خاص قوت ف کے جو ایک معلومہ خط و ا کے ساتھ عمل کرتی ہے مع ایک اور قوت $\text{ف}_2$ کے جو و کے صفری سطح مستوی میں کسی جگہ پر عمل کرتی ہے -

اس قسم کی قوتوں کو جیسی کہ $\text{ف}_1$ اور $\text{ف}_2$ ہیں مزدوج قوتیں کہتے ہیں اور ان کے خطوطِ عمل مزدوج خط کہلاتے ہیں -

نقطہ و خط و ا پر خواہ کسی جگہ لیا جائے قوت $\text{ف}_2$ ہر صورت میں اس نقطہ کے صفری سطح مستوی میں عمل کرے گی - پس جیسے جیسے نقطہ و خط و ا پر حرکت کرتا ہے اس کا صفری سطح مستوی مسلسل طور پر اس طرح گھومتا جاتا ہے کہ و ا کا مزدوج خط ہمیشہ اس میں واقع ہوتا ہے - پس و ا کا مزدوج خط اس طرح آسانی

سے دریافت ہوسکتا ہے کہ دائرِ کوئی دو مناسب نقطے لیکر ان نقطوں کے صفری سطوح مستوی کی مساواتیں لکھی جائیں۔ مطلوبہ خط ان سطوح مستوی کا خطِ تقاطع ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ ہم قوتوں کے نظام (لا ، ما ، ے، ل، م، ن) کے لحاظ سے خط

$$\frac{\text{لا} - \text{ف}}{\text{ل}} = \frac{\text{ما} - \text{گ}}{\text{م}} = \frac{\text{ی} - \text{ھ}}{\text{ن}} \quad \dots \dots \dots (1)$$

کا مزدوج خط معلوم کرنا چاہتے ہیں

دفعہ ۲۰۷ کی رو سے نقطہ (ف، گ، ھ) کا صفری مستوی ہے

$$\text{لا}(\text{ل}.\text{گ}\,\text{ے} + \text{ھ}\,\text{ما}) + \text{ما}(\text{م}.\text{ھ}\,\text{لا} + \text{ف}\,\text{ے})$$

$$+\,\text{ی}(\text{ن}.\text{ف}\,\text{ما} - \text{گ}\,\text{لا}) = \text{ل}\,\text{ف} + \text{م}\,\text{گ} + \text{ن}\,\text{ھ} \quad \dots (2)$$

(۱) پر کوئی دوسرا نقطہ ہے

$$\left(\text{ف} - \frac{\text{ھ}\,\text{ل}}{\text{ن}},\ \text{گ} - \frac{\text{م}\,\text{ھ}}{\text{ن}},\ 0\right)$$

اس نقطہ کا صفری مستوی ہے

$$\text{لا}\left(\text{ل}.\text{گ}\,\text{ے} + \frac{\text{م}\,\text{ھ}\,\text{ے}}{\text{ن}}\right) + \text{ما}\left(\text{م} + \text{ف}\,\text{ے} - \frac{\text{ھ}\,\text{ل}\,\text{ے}}{\text{ن}}\right)$$

$$+\,\text{ی}\left[\text{ن} - \text{ف}\,\text{ما} + \text{گ}\,\text{لا} + \frac{\text{ھ}\,\text{ل}\,\text{ما}}{\text{ن}} - \frac{\text{م}\,\text{ھ}\,\text{لا}}{\text{ن}}\right]$$

$$= \text{ل}\left(\text{ف} - \frac{\text{ھ}\,\text{ل}}{\text{ن}}\right) + \text{م}\left(\text{گ} - \frac{\text{م}\,\text{ھ}}{\text{ن}}\right) \quad \dots \dots \dots (3)$$

(۲) اور (۳) سے مطلوبہ مزدوج خط کی مساوات بیان ہوتی ہے۔

(۲) کو (۳) میں سے تفریق کرنے سے

لا [(ن ما - م ے) + ما (ل ے - ن لا) + ی (م لا - ل ما)]

= ل ل + م م + ن ن ... ... (۴)

(۲) اور (۴) مطلوبہ خط کی مساواتیں سہل ترشکل میں ہیں۔

یہ آسانی سے ثابت ہوسکتا ہے کہ (۴) مساوات سے خط (۱) پر لا تناہی کے نقطہ کا صفری مستوی تعبیر ہوتا ہے کیونکہ اس نقطہ کے محدد (ل ر، م ر، ن ر) ہیں جہاں ر کا طول لا تناہی ہے۔

## مثالیں

۱۔ اس صورت پر بحث کرو جس میں دفعہ ۲۰۹ کا خط و ا دو نظام کا صفری خط ہو۔

۲۔ ایک خط مستقیم کی مساواتیں ا لا + ب ما + ج ی + د = اَ لا + بَ ما + جَ ی + دَ = ۰ ہیں۔ ثابت کرو کہ اس خط کے مزدوج خط کی مساواتیں مقدرات

| | | | |
|---|---|---|---|
| لَ | مَ | نَ | ل لا + م ما + ن ی |
| ا | ب | ج | د |
| اَ | بَ | جَ | دَ |

میں سے کسی دو کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں جہاں لَ، مَ، نَ نقطہ (لا، ما، ی) پر ترکیبی جفت ہیں اور

ل، م، ن مرکز پر ترکیبی جفت ہیں۔

۳۔ قوتوں کے کسی نظام (لا، ما، ے، ل، م، ن) کو دو قوتوں کے معادل بنایا گیا ہے جن میں سے ایک محور لا کے ساتھ عمل کرتی ہے اور دوسری مناسب قوت ہے۔ ثابت کرو کہ ان قوتوں کی مقداریں یہ ہیں

$$\frac{ل لا + م ما + ن ے}{ل} \quad \text{اور} \quad \frac{\left[(م ما + ن ے)^{2} + ل^{2}(ما^{2} + ے^{2})\right]^{\frac{1}{2}}}{ل}$$

[فرض کرو کہ وہ قوت جو محور لا کے ساتھ عمل کرتی ہے ف ہے، تب دوسری قوت کے اجزائے ترکیبی لا - ف، ما، ے ہونگے، فرض کرو کہ یہ قوت کسی نقطہ (ف، گ، ) پر عمل کرتی ہے - چونکہ یہ قوتیں نظام مذکور کے معادل ہیں اس لئے دفعہ ۱۶۲ کی رو سے

ل = گ ے، م = - ف ے اور ن = ف ما - گ (لا - ف)

اس سے نتائج بالا آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں، نیز دوسری قوت کا خط عمل معلوم ہو سکتا ہے]

۴ - ثابت کرو کہ پیچ (لا، ما، ے، ل، م، ن) دو قوتوں کے معادل ہے جن میں سے ایک خط لا = ما = ی کے ساتھ اور دوسری خط

ل لا + م ما + ن ی = ۰

اور لا (ما - ے) + ما (ے - لا) + ی (لا - ما) = ل + م + ن

کے ساتھ عمل کرتی ہے، دونوں قوتوں کی مقداریں معلوم کرو۔

۵ - ثابت کرو کہ قوتوں کے دو نظام بالعموم مزدوج خطوں کا صرف ایک ہی زوج مشترک رکھتے ہیں۔

۶ - ایک زائد نما کے ایک ہی نظام کے دو مکونوں کے ساتھ قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اسی نظام کے دو مکون ان قوتوں کے صفری خط ہیں۔

۷ - ثابت کرو کہ ایک خط اب کے مختلف نقطوں کے صفری سطوح مستوی ایک دوسرے خط ج د میں سے گزرینگے نیز اگر مختلف محلوں میں خطوط اب ایک زائد نما کے مکون ہوں تو خطوط ج د بھی ایک زائد نما کے مکون ہونگے۔

۸ - قوتوں کے ایک نظام کو دو قوتوں میں تحویل کیا گیا ہے جن میں سے ایک کسی خاص خط مستقیم کے ساتھ عمل کرتی ہے، ثابت کرو کہ (۱) اس قسم کی قوتوں کے دو جوڑوں کے چار خطوط عمل ایک ہی زائد نما کے ایک ہی نظام کے مکون ہونگے اور (۲) وہ خطوط مستقیم جو ان دو قوتوں اور مرکزی محور میں سے گزرتے ہیں ایک زائدی مکافی نما کی تکوین کرینگے جس کے مکونوں کا ایک جٹ مرکزی محور پر عمود ہوگا۔

۹ - ایک ہی مبدا اور محوروں کے لحاظ سے قوتوں کے دو نظام (لا، ما، ے، ل، م، ن) اور (لاَ، ماَ، ےَ، لَ، مَ، نَ) سے تعبیر ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ بالعموم دو خطوط مستقیم کا صرف ایک جوڑ ایسا معلوم ہو سکتا ہے کہ ان میں عمل کرنے والی مناسب قوتیں ہر دو نظام کے معادل ہوں۔

نیز ثابت کرو کہ ان خطوط کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے

$$\left[\varpi^2 - ۴\, غ\, غَ\, (ر^2 رَ^2 - ک^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

جہاں $\varpi = ل\, لاَ + م\, ماَ + ن\, ےَ + لَ\, لا + مَ\, ما + نَ\, ے$

$$ک = لا\, لاَ + ما\, ماَ + ے\, ےَ$$

اور غ غَ حسب معمول نظاموں کے غیر متغیرہ کو تعبیر کرتے ہیں اور ر، رَ حاصل قوتوں کو۔

(دونوں نظاموں کے مرکزی محوروں کے لئے دفعہ ۱۹۰ کی مساواتیں استعمال کرنے سے ہمیں چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ سا اور مرکزی محوروں کے درمیان زاویہ ع حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے۔

$$جم\, ع = \frac{ک}{ر\, رَ}$$

اور $سا = \dfrac{\varpi - \dfrac{غ\, ک}{ر^2} - \dfrac{غَ\, ک}{رَ^2}}{\sqrt{ر^2 رَ^2 - ک^2}}$

$$= \left[\frac{\varpi}{ک} - \frac{غ}{ر^2} - \frac{غَ}{رَ^2}\right] مم\, ع$$

نیز دفعہ ۱۹۲ کی رو سے اگر اج اور ب د مطلوبہ خطوط ہوں تو ظاہر ہے کہ ا ب ہر ایک مرکزی محور پر عمود ہوگا اور اس لئے اُن کے درمیان چھوٹے سے چھوٹے فاصلہ سا پر واقع ہوگا۔ دفعہ ۱۹۲ کے زاویئے ط اور فہ کی مساواتیں یہ شکل اختیار کرتی ہیں

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{ا}}{\text{ر}^{۲}\,\text{ب}} ،\quad \text{مس فہ} = \frac{\text{غ}}{\text{ر}^{۲}\,\text{ا}} ،\quad \text{مس (طہ - عہ)} = \frac{\text{غَ}}{\text{ر}^{۲}\,(\text{ب} + \text{سا})}$$

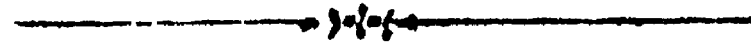
$$\text{اور}\quad \text{مس (فہ + عہ)} = \frac{\text{غَ}}{\text{ر}^{۲}\,(\text{ا} - \text{سا})}$$

ان مساواتوں میں سے طہ اور فہ کو ساقط کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ا اور ب اس مساوات کی اصلیں ہیں

$$\text{ما}^{۲} - \text{ما}\left[\frac{\text{π}}{\text{ک}} - \frac{\text{غ}^{۲}}{\text{ر}^{۲}}\right]\text{مم عہ} + \left[\frac{\text{غ}^{۲} \times \text{غَ}^{۲}}{\text{ر}^{۲}\,\text{ر}^{۲}} - \frac{\text{غ سا مم عہ}}{\text{ر}^{۲}}\right] = ۰$$

پس مطلوبہ فاصلہ = اس مساوات کی اصلوں کا فرق جو تحویل کرنے پر دئے ہوئے جواب کے مساوی ثابت کیا جا سکتا ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ قوتوں کے تین معلومہ نظاموں کے مشترک صفری خطوط یک چادری زائد نما کے ایک ہی نظام کے لمون ہیں۔



# بارھواں باب

## مشینیں

**۲۱۰۔** اس باب میں ہم چند سادہ مشینوں کو بیان کریں گے اور ان کے تعادل پر بحث کریں گے۔

ہم فرض کریں گے کہ ان مشینوں کے مختلف حصے چکنے اور استوار ہیں اور سب رسیاں جو استعمال کی جاتی ہیں مکمل طور پر مڑ جانے والی ہیں، نیز ان مشینوں پر جو قوتیں عمل کرتی ہیں وہ ہمیشہ باہم متعادل رہتی ہیں یعنی مشینیں ہمیشہ ساکن رہتی ہیں۔ عملی دنیا میں یہ شرائط بہت سی مشینوں میں تقریبی طور پر بھی پورے نہیں ہوتے۔

عملاً مشین کو کسی مزاحمت پر غالب آجانے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ جو قوت مشین پر لگائی جاتی ہے اس کو طاقت کہتے ہیں اور جس رکاوٹ پر غالب آنا مقصود ہوتا ہے اس کو مزاحمت یا وزن کہتے ہیں خواہ وہ کسی شکل میں نمودار ہو۔

**۲۱۱۔ حیلی فائدہ۔** اگر کسی مشین میں طاقت ق مزاحمت و کو متعادل کرے تو نسبت $\frac{و}{ق}$ یعنی $\frac{\text{مزاحمت}}{\text{طاقت}}$ کو مشین کا حیلی فائدہ کہتے ہیں۔ پس

مزاحمت = طاقت × حیلی فائدہ

بعض اوقات حیلی فائدہ کی بجائے اصطلاح، قوتی نسبت بھی استعمال کیجاتی ہے۔ تقریباً سب مشینیں اس طرح بنائی جاتی ہیں کہ حیلی فائدہ ایک سے زیادہ رہے۔

**رفتار کی نسبت۔** کسی مشین کی رفتار کی نسبت سے اُن فاصلوں کی نسبت مراد ہوتی ہے جن میں سے بالترتیب ایک ہی وقت کے دوران میں طاقت اور مزاحمت کے نقاط حرکت کرتے ہیں یعنی

$$\text{رفتار کی نسبت} = \frac{\text{وہ فاصلہ جس میں سے ق حرکت کرتا ہے}}{\text{وہ فاصلہ جس میں سے و حرکت کرتا ہے}}$$

اگر مشین ایسی ہو کہ اس کے ترکیبی حصوں کو اٹھانے میں کوئی کام سرانجام نہ دینا پڑے اور اگر یہ بالکل چکنی ہو یعنی اس کے مختلف اجزا کے اندر رگڑ کی قوت بالکل معدوم ہو تو معلوم ہوگا کہ حیلی فائدہ اور رفتار کی نسبت دونوں مساوی ہوتے ہیں۔ پس ایسی صورت میں

$$\frac{\text{و}}{\text{ق}} = \frac{\text{وہ فاصلہ جس میں سے ق حرکت کرتا ہے}}{\text{وہ فاصلہ جس میں سے و حرکت کرتا ہے}}$$

اس لئے و × وہ فاصلہ جس میں سے و حرکت کرتا ہے

= ق × وہ فاصلہ جس میں سے ق حرکت کرتا ہے۔

یعنی طاقت کا کام = وزن کے خلاف کام

۲۱۲۔ ہم دیکھیں گے کہ ذیل کا مسئلہ جو "کام کے اصول" کے نام سے موسوم ہے نہایت عام اور جامع مسئلہ ہے:۔

**خواہ ہماری مشین کیسی ہی ہو بشرطیکہ اس کے اجزاء کے اندر رگڑ نہ ہو اور اس کے مختلف حصوں کے وزنوں کو نظرانداز کر دیا جائے طاقت کا کام ہمیشہ اُس کام کے مساوی ہوتا ہے جو وزن یا مزاحمت کے خلاف کیا جائے۔**

اس اصول کو موہوم کام کے اصول کی توسیع خیال کیا جا سکتا ہے۔ اس میں

بجائے موہوم ہٹاؤں کے ایسے حقیقی اور محدود ہٹاؤ ہوتے ہیں جو مشین کے ہندسی روابط کے مطابق ہوں۔

فرض کرو کہ ہماری مشین سے حیلی فائدہ حاصل ہوتا ہے یعنی وزن سے کم طاقت لگانی پڑتی ہے تو طاقت کا فاصلہ طے کردہ وزن کے فاصلہ طے کردہ سے اسی نسبت میں کم ہوگا۔ عام الفاظ میں اس امر واقعہ کو یوں بیان کرتے ہیں کہ طاقت میں جو فائدہ حاصل ہوتا ہے رفتار میں اتنا ہی نقصان ہوتا ہے۔

یہ کہنا شاید زیادہ جامع ہو کہ حیلی فائدہ کا حصول رفتار میں متناسب کمی پیدا کرتا ہے۔ کسی مشین کے استعمال سے کام میں فائدہ نہیں اٹھایا جا سکتا اگرچہ عام طور پر حیلی فائدہ ہوتا ہے۔ عملی طور پر رگڑ وغیرہ کی وجہ سے ہر مشین کے استعمال سے کچھ نہ کچھ کام کا نقصان ہوتا ہے

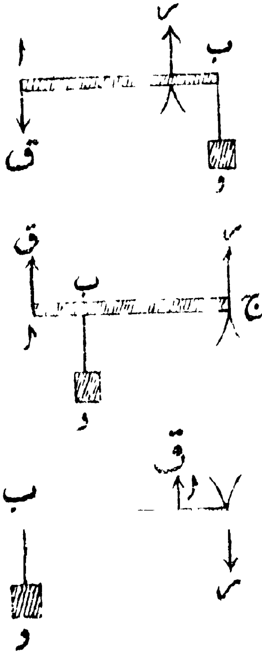
## مشین کے فائدے حسب ذیل ہیں۔

(۱) اس کی مدد سے ایک شخص اس سے بہت زیادہ وزن اٹھا سکتا ہے جتنا کہ وہ مشین کی مدد کے بغیر اٹھا سکتا تھا۔ مثلاً چرخیوں کے نظام یا پیچ اور محور کی مدد سے۔

(۲) مشین کے کسی ایک حصہ کو حرکت میں لانے سے اس کے کسی دوسرے حصہ میں زیادہ تیز حرکت پیدا کی جا سکتی ہے مثلاً بائیسکل میں

(۳) مشین کی مدد سے کسی قابل رسائی مقام پر آسان طریقہ سے قوت لگا سکتے ہیں۔ مثلاً دست پناہ کی مدد سے آگ کو ہلا سکتے ہیں یا چونے کے بڑے ٹوکرے کو ایک چرخی کی مدد سے کسی عمارت پر چڑھا سکتے ہیں اس طور پر کہ ایک رسی ٹوکرے سے باندھ دی جائے اور اسے عمارت پر کی ایک وابستہ چرخی پر سے گزار کر اس کے دوسرے سرے کو زمین پر کا کوئی استادہ شخص کھینچے۔

۲۱۳۔ بیرم۔ بیرم دراصل ایک سیدھی یا ٹیڑھی استوار سلاخ ہوتی ہے جس کا ایک نقطہ ثابت رہے اور باقی ماندہ سلاخ اس نقطے کے گرد گھوم سکتی ہو۔ اس ثابت نقطہ کو نصاب کہتے ہیں اور نصاب سے طاقت اور مزاحمت کے خطوط عمل کے عمودی فاصلوں کو بیرم کے بازو کہتے ہیں۔




قسم اوّل - اس میں وزن و اور طاقت ق نضاب کے مختلف جانب عمل کرتے ہیں۔

قسم دوم - اس میں وزن و اور طاقت ق نضاب کے ایک ہی طرف عمل کرتے ہیں - لیکن طاقت ق وزن و کی نسبت نضاب سے زیادہ فاصلہ پر عمل کرتی ہے۔

قسم سوم - یہاں طاقت ق اور وزن و نضاب ج کے ایک ہی طرف عمل کرتے ہیں لیکن طاقت کا نضاب سے فاصلہ وزن کے فاصلہ سے کم ہوتا ہے۔

## ۲۱۴ - سیدھے بیرم کے تعادل کی شرائط۔

ہر قسم میں جسم پر تین متوازی قوتیں عمل کرتی ہیں لہذا نضاب پر کا تعامل ر قوت ق اور و کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہوگا۔

پہلی اور تیسری قسم میں ہم نے دیکھا ہے کہ ق اور و متقابل سمتوں میں عمل کرتے ہیں۔

دوسری صورت میں وہ ایک ہی سمت میں عمل کرتے ہیں۔ چونکہ ہر صورت میں ق اور و کی حاصل قوت ج میں سے گزرتی ہے اس لئے دفعہ ۳۰ کے مطابق

$$ق \times اج = و \times بج$$

اس لئے $\frac{و}{ق} = \frac{اج}{بج} = \frac{ق \text{ کا بازو}}{و \text{ کا بازو}}$

اس سے ظاہر ہے کہ پہلی قسم میں بالعموم اور دوسری قسم میں ہمیشہ عملی فائدہ حاصل ہوتا ہے۔

لیکن تیسری قسم میں حیلی نقصان ہوتا ہے۔

## ۲۱۵۔ مختلف قسم کے بیرموں کی مثالیں حسب ذیل ہیں۔

**قسم اوّل**۔ آتش گیر جبکہ اسے آگ کو ہلانے کے لئے استعمال کیا جائے اس صورت میں جنگلے کی سلاخ نصاب ہوتی ہے۔

میخ کش جب اسے میخ نکالنے کے لئے استعمال کیا جائے۔ ایک بیل جبکہ اس کا کوئی نقطہ کسی ثابت سہارے پر ساکن ہے۔

ترازو۔ پانی نکالنے کے پمپ کا دستہ وغیرہ

اس قسم کے دوہرے بیرم یہ ہیں:۔ قینچی۔ موچنا

**قسم دوم**۔ ٹھیلہ۔ کاک داب۔ ایک بیل جبکہ اس کا ایک سرا زمین پر ساکن ہو (یہ فرض کر کے کہ اس کا وہ سرا جو پانی کو مس کر رہا ہے ساکن ہے)۔

**بادام شکن**۔ اس قسم کے دوہرے بیرم کی مثال ہے۔

**قسم سوم**۔ خراد کا پائدان۔ انسان کے بازو کا اگلا نصف۔ جبکہ یہ ہتیلی پر کسی وزن کو اٹھائے ہوئے ہو۔ اس صورت میں نصاب کہنی ہوگی اور پٹھوں کے تناؤ کی طاقت زور کا کام دیگی۔

شکر اٹھانے کے چمٹے کو اس قسم کے دوہرے بیرم کی مثال تصور کیا جاسکتا ہے۔

آخری قسم کے بیرم عملی طور پر اس وقت کام آتے ہیں جبکہ طاقت کسی ایسے نقطہ پر لگانا مطلوب ہو جہاں براہ راست طاقت نہ لگائی جاسکے۔

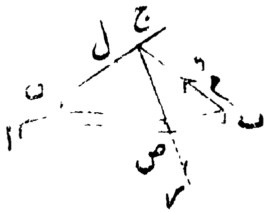
دفعہ ما قبل میں ہم نے بیرم کے وزن کو نظر انداز کیا ہے۔ اگر اس وزن کو بھی ملحوظ رکھا جائے تو تعادل کی شرائط نصاب کے گرد قوتوں کے معیار اثروں کے جبریہ مجموعہ کو صفر کرنے سے حاصل ہوسکتی ہیں۔

بیرم کا اصول حکیم آرشمیدس کو معلوم تھا جو تیسری صدی قبل از مسیح گزرا ہے سولھویں صدی میں قوتوں کے متوازی الاضلاع کا اصول معلوم ہونے تک

بیرم کا اصول سکونیات کا بنیادی اصول تھا۔

۲۱۶- خم دار بیرم- فرض کرو کہ ا ص کوئی ٹیڑھا بیرم ہے

جس کا نصاب ص ہے اور ص ل اور ص م بالترتیب قوت ق کے خطِ عمل ا ج اور مزاحمت و کے خطِ عمل ب ج پر ص سے عمود ہیں۔




ص کے گرد معیار اثر لینے سے

$$\frac{ق}{و} = \frac{ص م}{ص ل} = \frac{\text{نصاب سے مزاحمت کے خطِ عمل پر عمود}}{\text{نصاب سے طاقت کے خطِ عمل پر عمود}}$$

ص و پر تعامل معلوم کرنے کے لئے فرض کرو کہ طاقت ق اور وزن و کی سمتیں ایک دوسرے سے ج پر ملتی ہیں۔ چونکہ جسم پر عمل کرنے والی قوتیں صرف تین ہیں اس لئے ص پر کے تعامل کی سمت لازماً ج میں سے گزرے گی۔ پس لامی کے مسئلہ کی رو سے

$$\frac{ر}{\text{جب ا ص ب}} = \frac{ق}{\text{جب ب ج ص}} = \frac{و}{\text{جب ا ج ص}}$$

تعامل ر کی سمت قوتوں ر، ق اور و کو دو علی القوائم سمتوں میں تحلیل کرنے سے بھی حاصل ہوسکتی ہے۔ اس دفعہ میں ہم نے نصاب پر رگڑ کی قوت کو ملحوظ نہیں رکھا ہے۔ نیز ہم نے یہ فرض کرلیا ہے کہ بیرم پر عمل کرنے والی قوتیں ایک ہی سطح مستوی میں ہیں جو اس محور پر جس کے گرد بیرم گھومتا ہے عمود وار ہے۔ اگر قوتیں کسی اور سمت میں عمل کریں تو تعادل کا مسئلہ دسویں باب کی رو سے تین ابعاد کی قوتوں کا مسئلہ ہوگا۔

۲۱۷- چرخیاں- چرخی لکڑی یا دھات کا چھوٹا سا پہیا ہوتا ہے جس کے محیط پر ایک نالی کھدی ہوتی ہے جس میں ڈوری یا رسی بیٹھ سکے۔ چرخی ایک ایسے محور کے گرد

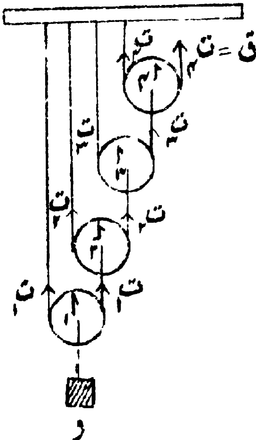
آزادانہ گھوم سکتی ہے جو پہیئے کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور اس کی سطح پر عمود وار ہے۔ اس محور کے سرے لکڑی کے ایک قالب پر سہارے ہوئے ہوتے ہیں۔

اگر چرخی کا قالب حرکت کر سکے تو اس کو قابل حرکت چرخی کہتے ہیں اور اگر اس کا قالب ہمیشہ ثابت رہے تو اسے ثابت چرخی کہتے ہیں۔

عام طور پر چرخی کا وزن اُس وزن کے مقابلے میں جس کو یہ سہارے ہوئے ہے اس قدر چھوٹا ہوتا ہے کہ اس کے اپنے وزن کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ اس قسم کی چرخی کو بے وزن چرخی کہتے ہیں۔ رسی یا ڈوری کے وزن کو جو چرخی پر سے گزرتی ہے ہمیشہ نظر انداز کیا جائے گا۔

ہم چرخی کو ہمیشہ چکنا تصور کریں گے جس کی وجہ سے اس پر سے گزرنے والی رسی کا تناؤ اس کے سب طول پر مساوی سمجھا جائے گا۔

۲۱۸۔ ہم یہاں چرخیوں کے تین نظاموں پر حسب معمول ترتیب میں غور کرینگے۔ اس ترتیب میں کوئی خاص بات نہیں مگر حوالہ دینے کی ضرورتوں کے لحاظ سے اس کو بدستور قائم رکھنا مناسب ہے۔




**چرخیوں کا پہلا نظام۔** اس نظام میں ہر ایک رسی سہارنے والے شہتیر کے ساتھ بندھی ہوئی ہے۔ طاقت اور وزن کا تعلق دریافت طلب ہے۔

چرخیوں کے اس نظام میں وزن سب سے نچلی چرخی کے ساتھ بندھا ہوتا ہے اس کے گرد جو رسی گزرتی ہے اُس کا ایک سرا سہارنے والے شہتیر کے ساتھ بندھا ہوتا ہے اور دوسرا سرا اوپر والی چرخی کے ساتھ بندھا ہوتا ہے اور اسی طرح موخرالذکر چرخی کے گرد گزرنے والی رسی کا ایک سرا شہتیر کے ساتھ اور دوسرا اس چرخی کے اوپر کی چرخی کے ساتھ بندھا ہوتا ہے علی ہذالقیاس۔ آخری رسی کے خالی سرے پر قوت لگائی جاتی ہے

عام طور پر ایک اور زائد ثابت چرخی ہوتی ہے اور آخری رسی کا خالی سرا اس چرخی کے اوپر سے گزرتا ہے۔ اس صورت میں قوت کو نیچے کی طرف لگایا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ چرخیاں نیچے کی طرف سے $ا_1$، $ا_2$، ... ہیں۔ اور ان کے گرد گزرنے والی رسیوں کے تناؤ $ت_1$، $ت_2$، ... ہیں، نیز فرض کرو کہ طاقت ق اور وزن و ہے چرخیوں کے تعادل کے لئے اگر چرخیوں $ا_1$، $ا_2$ ... کے اوزان بالترتیب $و_1$، $و_2$، ..... ہوں تو

$$ت_1 = \frac{و}{۲} + \frac{و_1}{۲} ،\quad ت_2 = \frac{1}{۲}(ت_1 + و_2) = \frac{و}{۲^2} + \frac{و_1}{۲^2} + \frac{و_2}{۲}$$

$$ت_3 = \frac{1}{۲}(ت_2 + و_3) = \frac{و}{۲^3} + \frac{و_1}{۲^3} + \frac{و_2}{۲^2} + \frac{و_3}{۲}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

اگر چرخیوں کی تعداد ن ہو تو بالآخر

$$ق = ت_ن = \frac{و}{۲^ن} + \frac{و_1}{۲^ن} + \frac{و_2}{۲^{ن-1}} + \dots\dots + \frac{و_ن}{۲}$$

$$\therefore\ ۲^ن \times ق = و + و_1 + ۲ و_2 + ۲^2 و_3 + \dots\dots + ۲^{ن-1} و_ن$$

اگر چرخیاں مساوی وزن والی ہوں اور ہر ایک کا وزن $و_1$ ہو تو

$$۲^ن \times ق = و + و_1(1 + ۲ + ۲^2 + \dots\dots + ۲^{ن-1}) = و + و_1(۲^ن - 1)$$

اس سے ظاہر ہے کہ حیلی فائدہ $\frac{و}{ق}$ چرخیوں کے وزن پر موقوف ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ شہتیر پر تناؤ س ہے چونکہ س اور ق مل کر چرخیوں کے نظام کو مع وزن و کے سہارے ہوئے ہیں۔ اس لئے

$$س + ق = و + و_1 + و_2 + \dots\dots + و_ن$$

**۲۱۹ - کام کے اصول کی تصدیق** - اگر وزن و کو فاصلہ لا میں سے اٹھایا جائے تو بشرطیکہ فاصلہ $ل_{۱}$ $ل_{۲}$ میں کوئی تبدیلی واقع نہ ہو چرخی $ل_{۱}$ بھی فاصلہ لا میں سے اوپر اُٹھیگی لیکن دراصل $ل_{۱}$ کو اُٹھانے کے دوران میں اُس رسی کا طول جو $ل_{۱}$ کو شہتیر کے ساتھ ملاتی ہے بقدر لا کے کم ہو جاتا ہے اور رسی کے طول کا بقدر لا حصہ چرخی $ل_{۱}$ پر سے پھسل جاتا ہے۔ اس لئے چرخی $ل_{۲}$ کلیتہً فاصلہ ۲ لا میں سے اوپر چڑھ جاتی ہے۔

اسی طرح سے چرخی $ل_{۳}$ فاصلہ ۴ لا اوپر چڑھتی ہے اور چرخی $ل_{۴}$ فاصلہ ۸ لا اوپر چڑھتی ہے اور بالآخر چرخی $ل_{ن}$ فاصلہ $۲^{ن-۱}$ لا اوپر چڑھتی ہے

چونکہ چرخی $ل_{ن}$ فاصلہ $۲^{ن-۱}$ لا اوپر اُٹھ آتی ہے اس لئے جو رسی اس چرخی کو ایک طرف شہتیر کے ساتھ اور دوسری طرف ق سے ملاتی ہے اس کے ہر ایک حصہ کے طول میں بقدر $۲^{ن-۱}$ لا کے کمی واقع ہو جاتی ہے۔ اس لئے یہ ڈھیلی رسی چرخی $ل_{ن}$ پر سے پھسل جاتی ہے اور ق کا نقطۂ عمل فاصلہ $۲^{ن}$ لا میں سے اوپر اُٹھ جاتا ہے۔

اس لئے وزن (مزاحمت) اور چرخیوں کے وزن پر جو کام ہوتا ہے وہ

$= و \times لا + و_{۱} \times لا + و_{۲} \times ۲ لا + و_{۳} \times ۴ لا \times و_{۴} \times ۸ لا + \cdots\cdots + و_{ن}\, ۲^{ن-۱} لا$

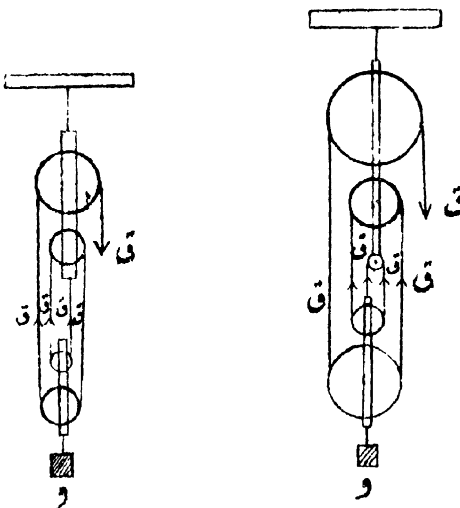
$= ۲^{ن} لا \times ق$ دفعہ ماقبل کی رو سے

= طاقت کا کام

**۲۲۰ - چرخیوں کا دوسرا نظام** - اس میں سب چرخیوں کے گرد ایک ہی رسی گزرتی ہے۔ وزن اور طاقت کا رشتہ معلوم کرو۔

اس نظام میں دو قالب ہوتے ہیں جن میں سے ہر ایک میں چرخیاں ہوتی

ہیں - اوپر کا قالب ساکن ہوتا ہے اور نیچے کا حرکت پذیر - ایک ہی رسی سب چرخیوں پر سے گزرتی ہے جیسا کہ ذیل کی شکلوں میں دکھایا گیا ہے - اس رسی کے کھلے سرے پر قوت لگائی جاتی ہے اور اس کا دوسرا سرا اوپر کے یا نیچے کے قالب کے ساتھ بندھا ہوتا ہے - دونوں صورتوں میں فرض کرو کہ نیچے کے قالب میں رسیوں کے جو حصے ہیں اُن کی تعداد ن ہے - چونکہ ہمارے پاس ایک ہی رسی ہے جو چکنی چرخیوں کے اوپر سے گزرتی ہے اس لئے اس کا تناؤ ہر جگہ مساوی ہے اور ق کے برابر ہے۔




پس ن ق = و + و جہاں و سہارا ہوا وزن ہے اور و نچلے قالب کا وزن ہے۔

عملی طور پر ہر ایک قالب کی چرخیوں کو ایک دوسرے کے متوازی رکھا جاتا ہے۔ اس لئے رسیوں کے حصے اگرچہ ٹھیک طور پر متوازی نہیں ہوتے مگر تقریبی طور پر متوازی ہوتے ہیں اس لئے مندرجہ بالا نتائج پھر بھی درست رہتے ہیں۔

**۲۲۱- چرخیوں کا تیسرا نظام** - اس نظام میں سب رسیاں وزن کے ساتھ بندھی ہوتی ہیں۔ طاقت اور وزن کا رشتہ معلوم کرو۔

اس نظام میں ہر ایک چرخی پر سے گزرنے والی رسی کو ایک طرف وزن و

کو سہارنے والے شہتیر کے ساتھ اور دوسری طرف نیچے کی چرخی سے باندھا جاتا ہے۔ سب سے اوپر کی چرخی ثابت ہوتی ہے اور ایک ساکن شہتیر سے لٹکی رہتی ہے۔ سب سے نیچے کی چرخی پر سے جو رسی گزرتی ہے اُس کا ایک سرا حسب معمول وزن کو سہارنے والے شہتیر کے ساتھ بندھا ہوتا ہے اور دوسرے سرے پر قوت لگائی جاتی ہے۔

فرض کرو کہ نیچے کی طرف سے شروع ہو کر چرخیاں $\text{ا}_1$، $\text{ا}_2$، $\text{ا}_3$ .... ہیں اور ان کے گرد جو رسیاں گزرتی ہیں اُن کے تناؤ بالترتیب $\text{ت}_1$، $\text{ت}_2$، $\text{ت}_3$ .... ہیں۔

اگر طاقت ق ہو تو صریحاً $\text{ت}_1 = \text{ق}$

چرخیوں کے تعادل پر ترتیب وار غور کرو، اگر اُن کے وزن $\text{و}_1$، $\text{و}_2$ .... ہوں تو

$$\text{ت}_2 = 2\,\text{ت}_1 + \text{و}_1 = 2\,\text{ق} + \text{و}_1$$

$$\text{ت}_3 = 2\,\text{ت}_2 + \text{و}_2 = 2^2\,\text{ق} + 2\,\text{و}_1 + \text{و}_2$$

$$\text{ت}_4 = 2\,\text{ت}_3 + \text{و}_3 = 2^3\,\text{ق} + 2^2\,\text{و}_1 + 2\,\text{و}_2 + \text{و}_3$$

" " " " " " " " " " " " " " " " "

$$\text{ت}_{\text{ن}} = 2^{\text{ن}-1}\,\text{ق} + 2^{\text{ن}-2}\,\text{و}_1 + 2^{\text{ن}-3}\,\text{و}_2 + \dots + \text{و}_{\text{ن}-1}$$

اگر چرخیوں کی تعداد ن ہو جن میں سے ن - ۱ قابل حرکت ہوں تو وزن (مزاحمت) کو سہارنے والی سلاخ کی مدد سے

$$\text{و} = \text{ت}_{\text{ن}} + \text{ت}_{\text{ن}-1} + \dots\dots + \text{ت}_2 + \text{ت}_1$$

$$= (۲^{ن} - ۱)\,ق + (۲^{ن-۱} - ۱)\,و_{۱} + (۲^{ن-۲} - ۱)\,و_{۲} + \ldots\ldots$$

$$+ (۲^{۲} - ۱)\,و_{ن-۲} + (۲ - ۱)\,و_{ن-۱} \ldots\ldots\ldots\ (۱)$$

اگر سب چرخیوں کے وزن $و_{۱}$ ہوں تو

$$و = (۲^{ن} - ۱)\,ق + و_{۱}\,(۲^{ن} - ن - ۱)$$

سہارنے والے شہتیر پر کا دباؤ :- یہ دباؤ طاقت، وزن اور چرخیوں کے وزن کو متعادل رکھتا ہے اور اس لئے

$$= ق + و + و_{۱} + و_{۲} + \ldots\ldots + و_{ن}$$

۲۲۲- اس نظام میں ہم دیکھتے ہیں کہ ہر ایک چرخی کا وزن جتنا زیادہ ہوگا ہمیں وزن کو سہارنے کے لئے اتنی ہی کم قوت لگانی پڑیگی - پس چرخیوں کے وزن طاقت کی مدد کرتے ہیں - اگر چرخیوں کے وزن مناسب منتخب کئے جائیں تو بغیر کسی طاقت کے لگانے کے وزن قایم رہ سکتا ہے -

مثلاً فرض کرو کہ ہمارے پاس تین متحرک چرخیاں ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن $و_{۱}$ ہے، تب دفعہ ماقبل کے رشتہ (۱) کی رو سے

$$و = ۱۵\,ق + ۱۱\,و_{۱}$$

اس لئے اگر $۱۱\,و_{۱} = و$ تو طاقت ق صفر ہوگی یعنی رسی کے سرے پر وزن کو (مزاحمت) کو سہارنے کے لئے کسی طاقت کے لگانے کی ضرورت نہ ہو گی -

۲۲۳- تاوقتیکہ وزن کو اس کے سہارنے والی سلاخ کے مناسب مقام پر نہ لٹکایا جائے یہ سلاخ دوران حرکت میں افقی نہ رہیگی - کسی خاص صورت میں لٹکانے کا مناسب محل آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے -

دفعہ ۲۲۱ کی شکل میں فرض کرو کہ نقاط د، ع، ف، گ (جن پر رسیاں بندھی ہیں) کے درمیانی فاصلے $ا_{۱}$ ہیں اور فرض کرو کہ جس نقطہ پر وزن لٹکا ہوا ہے

وہ لا ہے۔ تب ضروری ہے کہ تناؤ $ت_1$، $ت_2$، $ت_3$، $ت_4$ کا حاصل نقطہ لا میں سے گزرے۔

پس دفعہ ۱۴۴ کی رو سے اگر چرخیوں کے وزنوں کو نظر انداز کیا جائے تو

$$\text{دلا} = \frac{ت_4 \times 0 + ت_3 \times ا_1 + ت_2 \times ۲ا_1 + ت_1 \times ۳ا_1}{ت_4 + ت_3 + ت_2 + ت_1}$$

$$= \frac{۴ق \times ا_1 + ۲ق \times ۲ا_1 + ق \times ۳ا_1}{۸ق + ۴ق + ۲ق + ق} = \frac{۱۱}{۱۵}\,\text{دع}$$

۲۲۴- چرخیوں کے تیسرے نظام سے وزنوں کو اٹھانا مقصود نہیں ہوتا۔ اگر اسے اس مقصد کے لئے استعمال کیا جائے تو اس کا ناقابل عمل ہونا بہت جلد ثابت ہو جائے گا۔

اس کا استعمال یہ ہے کہ خفیف سے عرصہ کے لئے بہت زور کا جھٹکا دیا جا سکے مثلاً یہ نظام ایک کشتی کے تختہ پر مستول کو سیدھا رکھنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

دفعہ ۲۲۱ کی شکل میں د ع ف گ ایک کشتی کا تختہ ہے جس کے ساتھ رسیاں بندھی ہیں اور کوئی وزن و نہیں ہے۔ پرنیوں $ا_1$ $ا_2$ $ا_3$ $ا_4$ کی رسیاں سمت انتصابی کے ساتھ میلان رکھتی ہیں اور نقطہ ہ مستول کی چوٹی ہے جسے سیدھا رکھنا مطلوب ہے۔ اس صورت میں مزاحمت وہ قوت ہے جسے ہ پر لگا کر مستول سیدھا رکھا جا سکے۔ طاقت جس طرح عمل کرتی ہے اسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔

**۲۲۵- کام کے اصول کی تصدیق**- فرض کرو کہ وزن و فاصلہ لا میں سے اوپر اٹھتا ہے۔ تب جو رسی چرخی ب کو سلاخ کے ساتھ پیوست کرتی ہے اس کا طول بقدر لا کے کم ہو جاتا ہے جس سے چرخی $ا_1$ فاصلہ لا نیچے اتر آتی ہے۔ چونکہ چرخی $ا_1$ فاصلہ لا نیچے اتر آتی ہے اور سلاخ فاصلہ لا اوپر چڑھ جاتی ہے وہ رسی جو $ا_2$ کو سلاخ کے ساتھ ملاتی ہے بقدر ۲ لا کے کم ہو جاتی ہے اور یہ حصہ $ا_2$ کے اوپر سے پھسلتا ہے۔ پس چرخی $ا_2$ فاصلہ ۲ لا اور نیز وہ فاصلہ جس میں سے $ا_1$

اترتی ہے نیچے اترآتی ہے یعنی مجموعی طور پر فاصلہ ۲ لا + لا = ۳ لا نیچے اترآتی ہے۔ اس سے رسی (۲ ف بقدر ۴ لا کے کم ہو جاتی ہے جو طول چرخی (۲ پر سے پھسل جاتا ہے۔ اس کا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ چرخی (۱ ایک تو فاصلہ ۴ لا اور دوسرے فاصلہ جس میں چرخی (۲ اترتی ہے یعنی مجموعی طور پر فاصلہ ۴ لا + ۳ لا = ۷ لا نیچے اتر جاتی ہے۔ پس پہلی، دوسری، تیسری، ۔۔۔ (ن-۱) ویں چرخیاں بالترتیب

فاصلے لا، ۳ لا، ۷ لا، ۔۔۔ ($۲^{ن-۱}$ - ۱) لا نیچے اترتی ہیں۔ اور طاقت ق کا نقطۂ

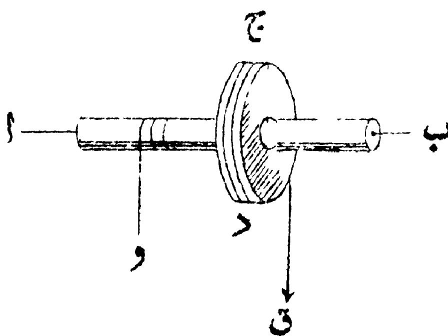
عمل فاصلہ ($۲^{ن}$ - ۱) لا نیچے اترتا ہے۔ پس رفتاری نسبت $۲^{ن}$ - ۱ ہے۔
طاقت اور چرخیوں کے وزنوں (جو اس صورت میں طاقت کی مدد کرتے ہیں) کا کام

$$= ق (۲^{ن} - ۱) + و_۱ (۲^{ن-۱} - ۱) لا + و_۲ (۲^{ن-۲} - ۱) لا + \ldots + ۳ و_{ن-۲} لا + و_{ن-۱} لا$$

= لا × و، دفعہ ۲۲۱ کی رو سے

= وزن و کا کام

**۲۲۶۔ چرخ اور محور۔** اس مشین میں ایک مضبوط مستدیر اسطوانہ یعنی محور ہوتا ہے جس کے سرے دو چولیں ا اور ب ہوتی ہیں اور یہ چولیں ثابت سہاروں پر آزادانہ گھوم سکتی ہیں اس اسطوانہ کے ساتھ استوار طور پر ایک چرخ ج د پیوست ہوتا ہے جس کی سطح مستوی محور پر عمود دار ہوتی ہے۔




محور کے گرد ایک رسی لپٹی ہوتی ہے جس کے ایک سرے کو محور کے ساتھ باندھ دیا جاتا ہے اور دوسرے سرے سے وزن لٹکایا جاتا ہے۔ چرخ کے محیط پر پہلی رسی کی مقابل سمت میں ایک اور رسی لپٹی ہوتی ہے جس کا ایک سرا چرخ کے ساتھ بندھا ہوتا ہے اور دوسرے

سرے پر طاقت لگائی جاتی ہے چرخ کے محیط پر نالی کھدی ہوتی ہے تاکہ رسی پھسل نہ جائے۔

اگر محور کا نصف قطر ا ہو اور چرخ کا نصف قطر ب ہو تو ثابت محوری خط کے گرد معیار اثر لینے سے تعادل کے لئے ضروری ہے کہ

ق × ب = و × ا . . . . . . . (۱)

پس مفادِ حیلی = و/ق = ب/ا = چرخ کا نصف قطر / محور کا نصف محور

**کام کے اصول کی تصدیق**۔ فرض کرو کہ مشین چار قائموں میں سے گھومتی ہے تو رسی کا ایک حصہ جس کا طول ۲ π ب ہے چرخ پر سے کھل جاتا ہے اس لئے ق اس فاصلہ میں سے نیچے اتر آتا ہے۔ اسی اثنا میں طول ۲ π ا محور کے گرد لپیٹا جاتا ہے جس سے وزن و اسی قدر فاصلہ اوپر چڑھ جاتا ہے پس طاقت کا کام = ق × ۲ π ب

اور وہ کام جو طاقت کے خلاف کیا گیا = و × ۲ π ا

یہ دونوں ربط (۱) کی وجہ سے مساوی ہیں۔

نیز رفتاری نسبت (دیکھو دفعہ ۲۱۱)

= ۲ π ب / ۲ π ا = ب/ا = مفاد حیلی

نظری طور پر مقدار ب/ا کو بہت بڑا بنانے سے ہم مفاد حیلی کو جتنا چاہیں اتنا بڑا بنا سکتے ہیں۔ مگر عملی طور پر یہ مقدار خاص حدود سے تجاوز نہیں کر سکتی۔ چونکہ ثابت سہاروں پر کے دباؤ ق اور و کا توازن کرتے ہیں اس لئے ہم محور کی موٹائی یعنی ۲ ا کو بہت کم نہیں کر سکتے اور نہ ہی چرخ کے نصف قطر کو بہت بڑھا سکتے ہیں کیونکہ ایسا کرنے سے مشین بھدی اور ناقابل عمل ہو جائیگی۔ پس مفاد حیلی کی قیمتیں محدود ہیں۔ اس کے حدود ایک طرف تو مشین کی مضبوطی سے اور دوسری مشین کی جسامت کو مناسب رکھنے کی ضرورت سے مقید ہیں۔

۲۲۷- دفعہ ۲۲۶ میں ہم نے رسیوں کی موٹائی کو نظر انداز کر دیا ہے۔ مگر اُن کی موٹائیاں اتنی ہوں کہ چرخ اور محور کے نصف قطروں کے مقابلہ میں نظر انداز نہ ہوسکیں تو ہم اُن کو بھی ملحوظ رکھنے کے لئے یہ فرض کر سکتے ہیں کہ رسیوں کے تناؤ درمیانی ریشے کے ساتھ عمل کرتے ہیں۔

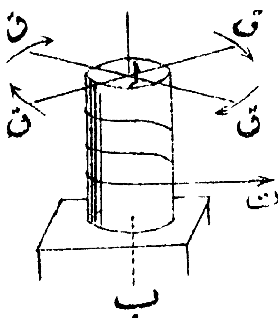
فرض کرو کہ ان رسیوں کے نصف قطر جو بالترتیب محور اور چرخ کے گرد لپٹی ہیں لا اور ما ہیں اس لئے جن خطوط پر اب تناؤ عمل کرتے ہیں ان کے فاصلے چولوں کو ملانے والے خط سے بالترتیب (ا + لا) اور (ب + ما) ہیں۔ پس

تعادل کے لئے ق (ب + ما) = و (ا + لا)، جس سے

$$\frac{\text{ق}}{\text{و}} = \frac{\text{محور اور اس کی رسی کے نصف قطروں کا مجموعہ}}{\text{چرخ اور اسکی رسی کے نصف قطروں کا مجموعہ}}$$

۲۲۸- چرخ اور محور کی دو شکلیں یہ ہیں۔ ڈنڈا چرخ جیسے کوئیں میں سے پانی نکالنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے اور لنگر چرخ جو جہاز پر استعمال کیا جاتا ہے ان مشینوں میں طاقت دفعہ ۲۲۶ کے مطابق اسطوانوں کے گرد لپٹے ہوئے رسوں کے ذریعہ لگانے کی بجائے طاقت ہتھوں پر لگائی جاتی ہے جو محور پر عمود وار سطح مستوی میں پیوست ہوتے ہیں۔

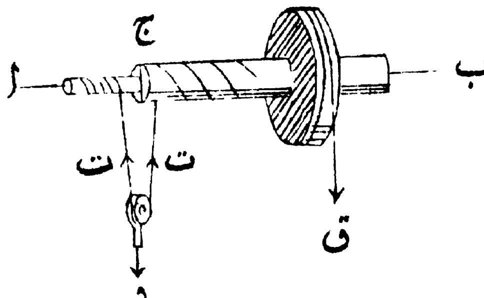
ڈنڈا چرخ میں محور متوازی الافق ہوتا ہے اور لنگر چرخ میں محور انتصابی ہوتا ہے۔ موخرالذکر صورت میں مزاحمت اس رسی کے تناؤ سے مشتمل ہوتی ہے جو محور کے گرد لپٹی ہوتی ہے اور طاقت اُن سلاخوں کے سروں پر لگائی جاتی ہے جو ا پر مستحکم طور پر جڑی ہوتی ہیں۔ سلاخوں کے جوڑے رکھنے کا یہ فائدہ ہے کہ لنگر چرخ کی چولوں پر کا دباؤ بہت کم ہو جاتا ہے یا بالکل معدوم



ہو جاتا ہے۔ تعادل کی شرائط دفعہ ۲۲۶ کے مطابق معلوم ہو سکتی ہیں۔

**۲۲۹ - فرقی چرخ اور محور** - معمولی چرخ اور محور کی ذرا مختلف شکل فرقی چرخ اور محور ہے۔ اس مشین میں دھرا دو اسطوانوں پر مشتمل ہوتا ہے جن کے محور مشترک ہوتے ہیں اور جو سروں پر جڑے ہوتے ہیں۔ ان اسطوانوں کے نصف قطر مختلف ہوتے ہیں۔ رسی ایک طرف سے ایک اسطوانہ پر اور دوسری طرف سے مخالف سمت میں دوسرے اسطوانہ پر لپٹی ہوتی ہے رسی کے ڈھیلے حصہ پر ایک چرخی لٹکی ہوتی ہے جس کے ساتھ وزن بندھا ہوتا ہے۔ چھوٹے اسطوانے کے گرد جو رسی لپٹی ہوتی ہے وہ مشین کو اسی سمت میں گھما سکتی ہے جس سمت میں کہ طاقت گھماتی ہے۔

حسب سابق فرض کرو کہ چرخ کا نصف قطر ب ہے اور محور کے حصوں ا ج اور ج ب کے نصف قطر بالترتیب ا، اور ج، ہیں جہاں ا، > ج، ہے۔ چونکہ چرخی چکنی ہے اس لئے اس کے گرد گزرنے والی رسی کا تناؤ ت اس کے سب طول پر یکساں ہے اور اس لئے وزن کے تعادل کے لئے ت = ½ و




خط ا ب کے گرد معیار اثر لینے سے مشین کے تعادل کے لئے

$$\text{ق} \times \text{ب}_1 + \text{ت} \times \text{ا}_1 = \text{ت} \times \text{ج}_1$$

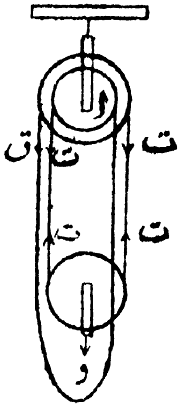
$$\therefore \quad \text{ق} = \frac{\text{و}}{2} \times \frac{\text{ج}_1 - \text{ا}_1}{\text{ب}_1}$$

$$\text{مفاد حیلی} \quad \frac{\text{و}}{\text{ق}} = \frac{2\,\text{ب}_1}{\text{ج}_1 - \text{ا}_1}$$

محور کے دو حصوں کے نصف قطر ب اور ج، کو ایک دوسرے کے تقریباً مساوی لینے سے اور اس طرح مشین کا کوئی حصہ نامناسب طور پر کمزور بھی نہیں ہوگا ہم مفاد حیلی کو بہت بڑا بنا سکتے ہیں۔

۲۳۰۔ **وسٹن کی فرقی چرخی** ۔ اس مشین کے دو قالب ہوتے ہیں اوپر کے حصہ میں دو چرخیاں تقریباً ایک ہی ناپ کی ہوتی ہیں جو ایک ہی چرخی کی مانند پھرتی ہیں۔ نیچے کے قالب میں ایک چرخی ہوتی ہے جس کے ساتھ وزن و بندھا ہوتا ہے۔

نیچے کی شکل میں مشین کی ایک تراش دکھائی گئی ہے بے سرے والی زنجیر کا ایک بڑا حلقہ پہلے اوپر کی چرخیوں میں سے بڑی چرخی کے گرد، پھر نیچے کی چرخی کے گرد اور بعد ازاں اوپر کی چھوٹی چرخی کے گرد گزرتا ہے۔ زنجیر کا باقی حصہ ڈھیلا لٹکتا ہے۔ طاقت ق کے لگانے کا طریقہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ زنجیر کو پھسلنے سے روکنے کے لئے اوپر کی چرخیوں پر دندانے بنے ہوتے ہیں جن کے اندر زنجیر کی کڑیاں پھنس کر آتی ہیں اور زنجیر کو پھسلنے سے روکتی ہیں۔




اگر رسی کے اُن حصوں کا تناؤ جو وزن و کو سہارے ہوتے ہیں ت ہو تو چونکہ یہ حصے تقریباً انتصابی ہیں اس لئے زنجیر کا وزن اور نیز نیچے کی چرخی کا وزن نظر انداز کرنے سے

۲ ت = و . . . . (۱)

اوپر کے قالب کی بڑی اور چھوٹی چرخیوں کے نصف قطر بالترتیب س اور ر ہوں تو اوپر کے قالب کے مرکز ا کے گرد معیار اثر لینے سے

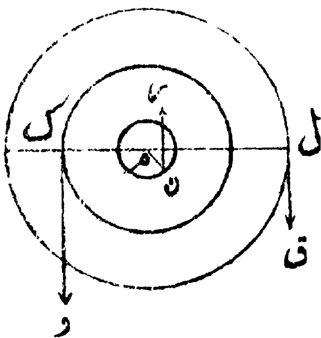
ق × س + ت × ر = ت × س

اس لئے $\text{ق} = \frac{\text{و}}{۲} \times \frac{\text{سا} - \text{ر}}{\text{سا}}$ اور مفاد حیلی $= \frac{\text{و}}{\text{ق}} = \frac{۲\,\text{سا}}{\text{سا} - \text{ر}}$

چونکہ سا اور ر تقریباً مساوی ہیں اس لئے مفاد حیلی بہت زیادہ ہے۔ فرقی چرخی میں فرقی چرخ اور محور کے ایک بڑے نقص کا بہت اچھی طرح سدباب ہوجاتا ہے وہ یہ کہ اول الذکر میں وزن کو اُٹھانے کے لئے مقابلۃً بہت کم طول کی رسی کی ضرورت ہوتی ہے۔

۲۴۱۔ چرخ اور محور جبکہ ان کی چولوں پر رگڑ کی قوت کو بھی ملحوظ رکھا جائے۔

فرض کرو کہ دفعہ ۲۲۶ میں سب سے اندر کا دائرہ چول آ یا ب کو تعبیر کرتا ہے جبکہ مشین کو اس کے محور کے ایک سرے سے دیکھا جائے۔ شکل بالا میں اسے بہت بڑھا کر دکھایا گیا ہے۔




چولوں اور ان کے خولوں کے درمیان جو حاصل تعامل ہے اسے انتصابی ہونا چاہیئے کیونکہ یہ ق اور و کو متوازن رکھتا ہے۔

نیز اگر یہ فرض کریں کہ ق وزن و پر عین غالب آنے کے قریب ہے تو حاصل تعامل کو نقطہ تماس ن پر کے عماد کے ساتھ زاویہ لہ (جو رگڑ کا زاویہ ہے) بنانا چاہیئے۔

اس لئے ن چول کے سب سے نچلے مقام پر واقع نہیں ہوسکتا بلکہ اس کا مقام ایسا ہونا چاہیئے جیسے کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس میں م ن انتصابی کے ساتھ زاویہ لہ بناتا ہے۔ پس ن پر کا حاصل تعامل انتصابی ہے۔

چونکہ سا متعادل رکھتا ہے ق اور و کو

$$\therefore \quad \text{سا} = \text{ق} + \text{و} \quad \ldots\ldots \quad (۱)$$

نیز م کے گرد معیار اثر لینے سے

$$\text{ق} \times \text{ب} - \text{سا} \times \text{ج}\ \text{جب}\ \text{لہ} = \text{و} \times \text{ر} \quad \ldots\ldots \quad (۲)$$

جہاں ج چول کا نصف قطر ہے اور ب اور ا چرخ اور محور کے نصف قطر ہیں۔
(دیکھو دفعہ ۲۲۶)

اس لئے ق = و $\frac{ا + ج\ جب\ لہ}{ب - ج\ جب\ لہ}$

اگر ق وزن و کو سہارنے کے لئے عین کافی ہو یعنی اگر شین کی سمت میں حرکت کرنے کے عین قریب ہو تو لہ کی علامت بدلنے سے

ق = و $\frac{ا - ج\ جب\ لہ}{ب + ج\ جب\ لہ}$

اس صورت میں تماس کا نقطہ ن مرکز م میں سے گزرنے والے انتصابی خط کے بائیں طرف واقع ہوگا۔

۲۳۲۔ **معمولی ترازو**۔ معمولی ترازو میں ایک استوار ڈنڈی ا ب ہوتی ہے جس کے دونوں سروں سے پلڑے لٹکے ہوتے ہیں۔ یہ ڈنڈی نصاب م کے گرد جو اس کے باہر ہوتا ہے آزادانہ گھوم سکتی ہے۔ نصاب اور ڈنڈی استوار طریقہ پر ایک دوسرے کے ساتھ پیوست ہوتے ہیں اور اگر ترازو اچھی ہو تو نقطہ م پر ایک سخت فولادی پچر ہوتا ہے جس کا کنارہ نیچے کی طرف ہوتا ہے اور یشب کے چھوٹے فرص پر ٹکا ہوتا ہے۔

جس جسم کو تولنا مقصود ہو اسے ایک پلڑے میں رکھتے ہیں۔ دوسرے پلڑے میں باٹ رکھے جاتے ہیں جن کی مقداریں معلوم ہوتی ہیں۔ ان وزنوں کو کم و بیش کرکے ترازو کی ڈنڈی کو متوازی الافق محل میں ساکن کیا جاتا ہے۔ اگر م ھ ڈنڈی پر عمود ہو اور بازو ھ ا ، ھ ب کے طول مساوی ہوں اور نیز ترازو کا مرکز ثقل خط م ھ پر واقع ہو اور پلڑوں کے وزن مساوی ہوں تو جسم کا وزن دوسری طرف کے پلڑے کے باٹوں کے مجموعی وزن کے برابر ہوگا۔

اگر جسم کا وزن باٹوں کے وزن کے مساوی نہ ہو تو ترازو کی ڈنڈی حالت تعادل میں افق کے ساتھ کوئی زاویہ بنائیگی۔

عمدہ قسم کی ترازوؤں میں ایک لمبا نمائندہ لگا ہوتا ہے جو ڈنڈی کے ساتھ مقام ھ پر پیوست ہوتا ہے۔ اس نمائندہ کا سرا ایک درجہ دار پیمانہ پر حرکت کرتا ہے اور جب ڈنڈی متوازی الافق ہو تو یہ سرا پیمانہ کے نشان صفر پر ہوتا ہے۔

۳۴۲۔ ترازو کے تعادل کا محل معلوم کرو جبکہ پلڑوں کے اندر کے وزن مساوی نہ ہوں۔

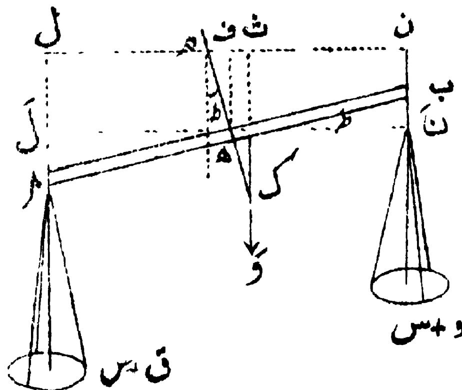
فرض کرو کہ پلڑوں میں رکھے ہوئے جسموں کے وزن ق اور و ہیں جس میں ق وزن و سے بڑا ہے۔ فرض کرو کہ ہر ایک پلڑے کا وزن س ہے، نیز فرض کرو کہ ڈنڈی کا (مع اس کے استوار طور پر پیوستہ حصوں کا) وزن وَ ہے جو مرھ کے کسی نقطہ ک پر عمل کرتا ہے۔

(شکل میں مختلف حصوں کے تناسب کا زیادہ خیال نہیں رکھا گیا ہے تاکہ مختلف نقطوں کی نشاندہی واضح طور پر ہو سکے درحقیقت ک ڈنڈی کے بہت قریب ہوگا)

تعادل کے محل میں فرض کرو کہ ڈنڈی افق کے ساتھ زاویہ ط بناتی ہے نیز فرض کرو کہ مرھ = ھ، مرک = ک، اھ = ھب = ا، نیز فرض کرو کہ نصاب مر میں سے گزرنے والا افقی خط اُن انتصابی خطوں سے جو ا، ک اور ب میں سے گزرتے ہیں بالترتیب ل، ث اور ن پر ملتا ہے۔

مر کے گرد معیار اثر لینے سے

$$(ق+س) \times مرل = (و+س) \times مرن + وَ \times مرث$$



یعنی (ق + س)(ا۲ جم ط − ھ جب ط) = (و + س)(ا۱ جم ط + ھ جب ط) + وَ ک جب ط

∴ مس ط = (ق − و) × ا۱ ÷ [وَ × ک۱ + (ق + و + ۲ س) ھ۱]

## ۴۳۲۔ اچھی ترازو کے لئے ضروری شرائط:۔

(۱) ترازو سچی ہونی چاہیئے۔ ترازو سچی اس صورت میں ہوگی جبکہ اس کی ڈنڈی کے بازو طول میں مساوی ہوں، پلڑوں کے وزن مساوی ہوں اور ڈنڈی کا مرکز ثقل اس خط پر واقع ہو جو نصاب سے ڈنڈی پر عموداً کھینچا جائے۔ اگر یہ شرائط پوری ہوں تو ظاہر ہے کہ پلڑوں کے اندر مساوی وزن رکھنے سے ڈنڈی افق کے متوازی رہیگی۔

یہ جانچ کرنے کے لئے کہ ترازو سچی ہے یا نہیں پہلے یہ دیکھو کہ جب پلڑے خالی ہوں تو ڈنڈی افق کے متوازی ہے یا نہیں۔ پھر ایک پلڑے میں جسم کو رکھ کر دوسرے پلڑے میں باٹوں کی مناسب مقدار رکھو تاکہ ڈنڈی افق کے متوازی ہو جائے۔ اب جسم اور وزنوں کو بلحاظ پلڑوں کے باہم بدل دو۔ اگر اب بھی یہ ایک دوسرے کا تبادل کریں تو ضروری ہے کہ ترازو سچی ہو۔ اگر موخر الذکر حالت میں ترازو کی ڈنڈی افق کے ساتھ کوئی میلان رکھتی ہو تو ترازو سچی نہیں ہے۔

(۲) ترازو کو حسّاس ہونا چاہیئے۔ اس سے یہ مطلب ہے کہ اگر باٹوں اور جسم کے وزنوں میں بہت خفیف سا فرق ہو تو بھی ترازو کی ڈنڈی کو افق کے ساتھ کافی بڑا زاویہ بنانا چاہیئے۔

ق اور و کے کسی معلومہ فرق کے لئے ترازو افق کے ساتھ جتنا زیادہ میلان رکھیگی اتنی ہی زیادہ حسّاس سمجھی جائے گی۔ نیز کسی معلومہ میلان ط کے پیدا کرنے کے لئے وزنوں کا فرق ق − و جتنا کم ہوگا اتنی ہی ترازو زیادہ حسّاس ہوگی۔

پس کسی ترازو کی حساسیت ناپنے کا بہترین معیار مقدار

مس ط ÷ (ق − و) یعنی ا۱ ÷ [وَ ک۱ + (ق + و + ۲ س) ھ۱] (دیکھو دفعہ ۴۳۱)

کی قیمت ہے۔

پس کسی ترازو کی حساسیت بڑی ہوگی اگر بمقابلہ ھ اور ک کے ترازو کی ڈنڈی کے بازو ا کو بڑا بنایا جائے۔ اور ڈنڈی کا وزن وَ اتنا کم ہو جتنا کہ مشین کی استواریت اور طول اجازت دیں۔

اگر ھ صفر نہ ہو تو ظاہر ہے کہ حساسیت ق اور د کی قیمتوں پر یعنی پلڑوں کے اندر کے وزنوں پر موقوف ہوتی ہے۔ کیمیا کے تجربہ خانہ کی ترازو کے لئے یہ مناسب نہیں ہے اس لئے ایسی ترازوؤں میں ھ کو صفر رکھا جاتا ہے یعنی ان میں نقطہ م نقطہ ہ پر منطبق ہوتا ہے۔

لہٰذا ان میں حساسیت ک کے بالعکس بدلتی ہے جہاں ک نقطہ م یا ہ کے نیچے مرکز ثقل کا فاصلہ ہے۔

لیکن ہمیں ھ اور ک دونوں کو ایک ساتھ صفر نہیں بنا دینا چاہیئے۔ ایسا کرنے سے نقاط م اور ک دونوں ہ پر منطبق ہو جائیں گے۔ اس لئے جب پلڑوں میں وزن مساوی ہوں تو ترازو کسی محل میں بھی متعادل رہے گی اور جب یہ وزن برابر نہ ہوں تو ترازو کی ڈنڈی حتی الوسع انتصابی محل اختیار کریگی۔

(۳) ترازو کو قائم التعادل ہونا چاہیئے اور بہت جلدی اپنے تعادل کے محل کو اختیار کر لینا چاہیئے۔

یہ معلوم کرنا کہ ترازو اپنے تعادل کے محل میں آنے میں کتنا وقت لیتی ہے کلیتاً علم حرکت کا سوال ہے۔ تاہم ہم فرض کر سکتے ہیں کہ قوتوں کا نصاب کے گرد معیار اثر جتنا زیادہ ہوگا اتنا ہی کم وقت محل تعادل میں واپس آنے کے لئے درکار ہوگا۔

جب ہر ایک پلڑے میں وزن ق ہو تو حالت تعادل میں واپس لانے والی قوتوں کا معیار اثر م کے گرد

= (ق + س) (ا جم ط + ھ جب ط) − (ق + س) (ا جم ط − ھ جب ط) + وَ × ک جب ط

= [۲ (ق + س) ھ + وَ × ک] جب ط

اس جملہ کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ ھ اور ک کی قیمتیں بڑی سے بڑی ہوں

چونکہ ترازو کی حساسیت ہ اور ک کے چھوٹا ہونے پر موقوف ہے اور اس کا قائم تعادل ہونا ان کے بڑا ہونے کا مقتضی ہے اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ ترازو کا حساس ہونا اور جلدی تولنا ایک حد تک ایک دوسرے کے متناقض ہیں۔ عملاً یہ تناقض کوئی زیادہ اہمیت نہیں رکھتا ۔ کیونکہ جن ترازوؤں میں بہت حساسیت کی ضرورت ہوتی ہے (مثلاً تجربہ خانہ کی ترازوؤں میں) وہاں جلدی تولنے کی خوبی کو چھوڑ سکتے ہیں ۔

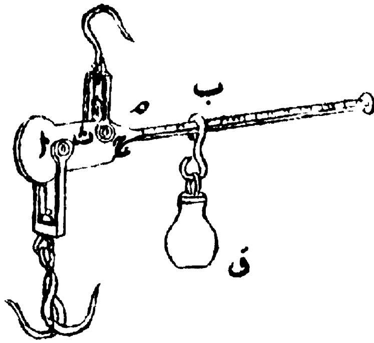
برعکس اس کے تجارتی اغراض کے لئے جن ترازوؤں کو استعمال کیا جاتا ہے اُن میں حساسیت کی چنداں ضرورت نہیں ہوتی ۔ جہاں تک ممکن ہو سکے حساسیت اور جلد تولنا دونوں خوبیوں کے حصول کے لئے ترازو کی ڈنڈی کے بازوؤں کو ہلکا اور کافی لمبا بنانا چاہیئے اور نیز ڈنڈی سے نصاب کا فاصلہ کافی بڑا ہونا چاہیئے ۔

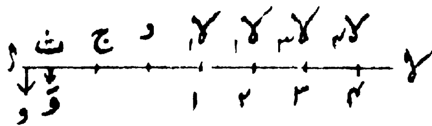
۵ ۳ ۴ ۔ دوہرے تولنے کے طریقے سے کسی جسم کا وزن ٹھیک معلوم ہو سکتا ہے خواہ ترازو صحیح نہ بھی ہو ۔

ایک پلڑے میں جسم رکھو اور دوسری طرف مٹی یا کوئی چیز ڈال کر ڈنڈی کو متوازی الافق کرلو ۔ اب جسم کو ہٹا کر اُس کی بجائے باٹ رکھ کر دیکھو کہ کتنے وزن کے باٹ ڈنڈی کو حسب سابق متوازی الافق بنانے کے لئے درکار ہوتے ہیں یہ باٹ جسم کے وزن کو تعبیر کرینگے ۔

جب کسی چیز کے وزن کو بہت صحت کے ساتھ معلوم کرنا مقصود ہوتا ہے تو نہایت عمدہ ترازوؤں کے باوجود یہی طریقہ استعمال کیا جاتا ہے اس طریقہ کو بورڈا کا طریقہ کہتے ہیں ۔

۶ ۳ ۴ ۔ تک ۔ معمولی تک جسے رومی تک بھی کہتے ہیں ایک قسم کی مشین ہوتی ہے جسے اجسام کے تولنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے اس میں ایک سلاخ ا ب ہوتی ہے جو ایک ثابت نصاب ج کے گرد گھوم سکتی ہے ۔





نقطہ ا پر ایک ہک یا کنڈا ہوتا ہے (بعض اوقات ایک پلڑا ہوتا ہے) جس میں تولنے والا جسم رکھا جاتا ہے۔ بازو ج ب پر ایک وزن ق آویزاں ہوتا ہے جو ادھر ادھر حرکت کرسکتا ہے۔ پلڑے پر کے جسم کا وزن معلوم کرنے کے لئے یہ دیکھنا پڑتا ہے کہ ڈنڈی کو متوازی الافق کرنے کے لئے وزن ق کو کس مقام پر رکھا جائے۔ بازو ج ب پر نشانات لگے ہوتے ہیں اور وہ نشان جہاں ق ٹھیرنے سے توازن پیدا ہوتا ہے جسم کے وزن کو تعبیر کرتا ہے۔

فرض کرو کہ تک اور پلڑے کا وزن وَ ہے اور ڈنڈی کا وہ نقطہ جس میں سے وَ عمل کرتا ہے ث ہے۔ ڈنڈی کو بالعموم اس طرح بنایا جاتا ہے کہ ث چھوٹے بازو اج پر واقع ہوتا ہے۔

جب پلڑے میں کوئی وزن نہ ہو تو فرض کرو کہ وہ مقام جس پر ڈنڈی کو متوازی الافق کرنے کے لئے ق کو رکھنا پڑتا ہے ھ ہے۔ ج کے گرد معیار اثر لینے سے

وَ × ث ج = ق × ج ھ - - - - - - (۱)

اس شرط سے نقطہ ھ کا مقام معلوم ہو جاتا ہے جو ہماری درجہ بندی کا صفر مقام ہے۔

جب پلڑے میں وزن و (= ن ق) رکھا جائے تو فرض کرو کہ ق کو لان پر رکھنا پڑتا ہے۔ معیار اثر لینے سے

ن × ق × ج ا + وَ × ث ج = ق × (ج لان) . . . . . . (۲)

(۱) اور (۲) سے م لان = ن × ج ا

پس تک کی درجہ بندی کرنے کے لئے ہیں م سے، متواتر فاصلے ج ا، ۲ج ا، ۳ج ا.... لینے چاہئیں اور ان کے سروں پر نشانات ۱، ۲، ۳، کندہ کر دینے چاہئیں۔ ان نشانات کے درمیانی فاصلوں کو ق پونڈ کی کسروں کو ظاہر کرنے کے لئے مزید تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

۲۳۷- ڈینی تک میں ایک سلاخ ا ب ہوتی ہے جس کے ایک سرے پر وزنی گولہ ب ہوتا ہے۔ وزن کو اٹھانے کے لئے ا پر ایک کنڈا یا پلڑا ہوتا ہے۔

جسم کا وزن یہ دیکھنے سے معلوم کیا جاتا ہے کہ سلاخ کے کس نقطہ پر مشین متعادل ہوتی ہے۔ یہ عمل عام طور پر ایک رسی کے حلقہ کی مدد سے جو سلاخ پر پھسل سکتا ہے کیا جاتا ہے اور یہ دیکھا جاتا ہے کہ تعادل کے لئے رسی کو سلاخ کے کس مقام پر رکھنا پڑتا ہے۔

فرض کرو کہ سلاخ کا وزن مع اس کے پلڑے وغیرہ کے ق ہے اور اس کا مرکز ثقل ث ہے۔ جب کوئی وزن و (= ن × ق) پلڑے میں رکھا جائے تو فرض کرو کہ تعادل کی حالت میں نصاب کا مقام ج پر ہوتا ہے۔

ج کے گرد معیار اثر لینے سے

اج × و = ج ث × ق

یعنی اج × ن ق = ق × (اث - اج)

∴ اج = ۱/(ن + ۱) اث

ا ج ث ب
ق و

ا ۵ ۴ ۳ ج ۲ ۱ ث
و ق

پس تک کی درجہ بندی کرنے کے لئے ہمیں ا سے متواتر فاصلے $\frac{1}{2}$ ا ث، $\frac{1}{3}$ ا ث $\frac{1}{4}$ ا ث، ۔۔۔ کے مساوی لینے چاہیں اور ان کے سروں پہ ہندسے ۱، ۲، ۳، ...... کندہ کرنے چاہئیں۔

اسی طرح سے کسری وزنوں کے لئے بالترتیب فاصلے $\frac{2}{3}$ ا ث، $\frac{3}{4}$ ا ث، $\frac{4}{5}$ ا ث، ۔۔۔ لینے چاہئیں اور اُن کے سروں پر $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$ لکھنا چاہیئے

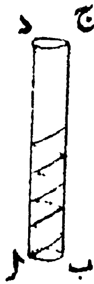
نقطہ ث آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ یہ وہ نقطہ ہے جس پر مشین متوازن رہتی ہے جبکہ ا پر کوئی وزن نہ لٹکایا جائے۔

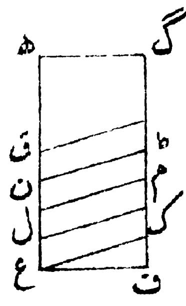
۲۳۸- **ترپیچ** - ترپیچ دھات کا ایک اسطوانہ ہوتا ہے جس کے گرد باہر نکلی ہوئی دھات کی چوڑی لپٹی ہوئی ہے۔

فرض کرو کہ ا ب ج د کوئی ٹھوس اسطوانہ ہے اور ع ف گ ھ کوئی مستطیل ہے جس کا قاعدہ ع ف ٹھوس اسطوانہ کے قاعدہ کے محیط کے مساوی ہے۔ ع ھ اور ف گ پر نقطے ل، ن، ق، ۔ ک، م، ط.... ایسے لو کہ ع ل، ل ن، ... ف ک، ک م، م ط، ۔۔۔ سب مساوی ہوں

ع ک، ل م، ن ط، .... کو ملاؤ۔

اس مستطیل کو اسطوانہ کے گرد اس طرح لپیٹو کہ نقطہ ع اسطوانہ کے نقطہ ا پر منطبق ہو جائے اور کنارہ ع ھ خط ا د پر پڑے۔ تب نقطہ ف نقطہ ع سے نقطہ ا پر منطبق ہو جائے گا۔ اور خطوط ع ک، ل م، ن ط، .... اسطوانہ کی سطح پر ایک مسلسل چکردار خط بن جائیں گے۔ اب اگر ہم فرض کریں کہ اس چکردار خط کے ہر مقام پر دھات تھوڑا سا ابھر آئی ہے تو اس سے ہمیں پیچ کی چوڑی حاصل ہو جائیگی




ظاہر ہے کہ پیچ کی چوڑی اسطوانہ پر لپٹی ہوئی ایک ایسی مائل سطح ہے جس کا میلان اس کے ہر نقطہ پر مساوی ہے۔ اور زاویہ ک ع ف کے برابر ہے۔ اس زاویہ کو بالعموم پیچ کا زاویہ کہتے ہیں اور دو مسلسل چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ کو جو پیچ کے محور کے متوازی ناپا جائے پیچ کی گھائی کہتے ہیں۔ بعض مصنفین پیچ کی گھائی کی تعریف یوں بھی کرتے ہیں کہ پیچ کی گھائی سے وہ فاصلہ مراد ہوتا ہے جو کوئی نقطہ محور کے متوازی طے کرتا ہے جبکہ اس نقطہ کو پیچ پر اکائی زاویہ میں سے گھمایا جائے۔ اس تعریف کی رو سے

$$\text{گھائی} = \frac{\text{ک ف}}{۲\pi}$$

$$\text{نیز مس (پیچ کا زاویہ)} = \frac{\text{ف ک}}{\text{ع ف}}$$

دو متواتر چوڑیوں کے درمیان فاصلہ

= اس دائرہ کا محیط جس کا نصف قطر برابر ہے پیچ پر کے کسی نقطہ کا محور سے فاصلہ

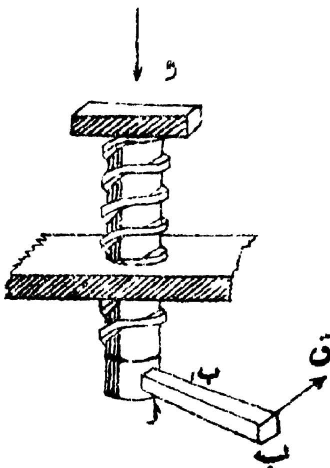
عملاً چوڑیوں کے پیچ کی تراشش مختلف شکلوں کی ہوتی ہے۔ لیکن یہاں ہم

صرف اسی صورت پر غور کرینگے جس میں تراش مستطیلی ہو۔

۲۳۹۔ پیچ بالعموم ایک ثابت قالب میں عمل کرتا ہے، اس قالب کے اندر پیچ کی چوڑی کی شکل والی ایک نالی کھدی ہوتی ہے اور پیچ کی چوڑی اس نالی میں پھسلتی ہے۔ پیچ صرف ایک ہی طرح سے حرکت کرسکتا ہے یعنی یہ اپنے محور کے گرد گھوم سکتا ہے اور ساتھ ہی اپنے طول کے متوازی آگے پیچھے ہٹ سکتا ہے۔
اگر پیچ کو انتصابا رکھا جائے اور اس کی چوٹی پر وزن رکھ دیا جائے تو پیچ عام طور پر گھوم کر نیچے اترے گا۔ اس لئے اگر پیچ کو متعادل رکھنا مقصود ہو تو اس پر کوئی نہ کوئی قوت لگانی پڑے گی۔ یہ قوت عام طور پر ایک افقی بازو کے ایک سرے پر لگائی جاتی ہے، جس کا دوسرا سرا پیچ کے ساتھ استوار طور پر پیوست ہوتا ہے۔

۲۴۰۔ ایک چکنے پیچ میں طاقت اور وزن کا رشتہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ چوڑی کے کسی نقطہ کا پیچ کے محور سے فاصلہ ا ہے اور ب (= ا ب) محور سے اس نقطہ کا فاصلہ ہے، جس پر طاقت ق لگائی جاتی ہے۔
اب پیچ ان قوتوں کے زیر عمل تعادل میں ہے طاقت ق، وزن و اور قالب اور پیچ کی چوڑیوں کے نقاط تماس پر تعامل۔
فرض کرو کہ پیچ کی چوڑی کے مختلف نقطوں پر ثابت قالب کی وجہ سے جو تعامل ہیں وہ س، س، س ...... ہیں۔
یہ تعامل سب کے سب پیچ کی چوڑی پر عمود وار ہونگے۔ کیونکہ پیچ کو چکنا فرض کیا گیا ہے، لہذا جب پیچ حرکت کرتا ہے تو یہ کوئی کام نہیں کرتے۔




طاقت ق کی ہر ایک مکمل گردش سے پیچ دو مسلسل چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ کے مساوی اوپر اٹھتا ہے۔ ہر ایک مکمل گردش میں طاقت جو کام سرانجام دیتی ہے وہ = طاقت × اس دائرہ کا محیط جو طاقت کے بازو کا سرا مرتسم کرتا ہے اور

وزن کے خلاف جو کام سرانجام پذیر ہوتا ہے وہ

= و × دو مسلسل چوڑیوں کا درمیانی فاصلہ

کام کے اصول کی رو سے یہ دونوں مقداریں مساوی ہیں۔ اس لئے

$$\text{حیلی مفاد} = \frac{\text{و}}{\text{ق}} = \frac{\text{۲ ꟷ ب}}{\text{۲ ꟷ ا × مس عہ}}$$

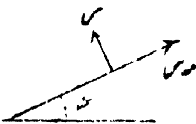
= اس دائرہ کا محیط جس کا نصف قطر طاقت کے بازو کے مساوی ہے / پیچ کی دو مسلسل چوڑیوں کا درمیانی فاصلہ

**۲۴۱۔ کھردرے پیچ کا تعادل۔** رگڑ کو ملحوظ رکھ کر پیچ کی صورت میں طاقت اور وزن کا رشتہ معلوم کرو۔

دفعہ ۲۴۰ کی ترقیم کے مطابق فرض کرو کہ پیچ نیچے کی طرف حرکت کرنے کے عین قریب ہے اور بنا بر علیہ رگڑ اوپر کی طرف چوڑی کے ساتھ عمل کرتی ہے۔

قالب کے دباؤ کے انتصابی اجزائے ترکیبی

ر (جم عہ + مہ جب عہ)، س (جم عہ + مہ جب عہ)، ....



ہیں اور ان دباؤں کے افقی اجزائے ترکیبی

ر (جب عہ - مہ جم عہ)، س (جب عہ - مہ جم عہ)، ....

ہیں انتصاباً تحلیل کرنے اور پیچ کے محور کے گرد معیار اثر لینے سے

و = (ر + س + ط + ....) (جم عہ + مہ جب عہ) .. .. .. .. (۱)

ق × ب = ا (ر + س + ط + ....) (جب عہ - مہ جم عہ) .. .. .. .. (۲)

اس لئے

$$\frac{\text{ق × ب}}{\text{و}} = \text{ا} \frac{\text{جب عہ - مہ جم عہ}}{\text{جم عہ + مہ جب عہ}} = \text{ا} \frac{\text{جب (عہ - لہ)}}{\text{جم (عہ - لہ)}}$$

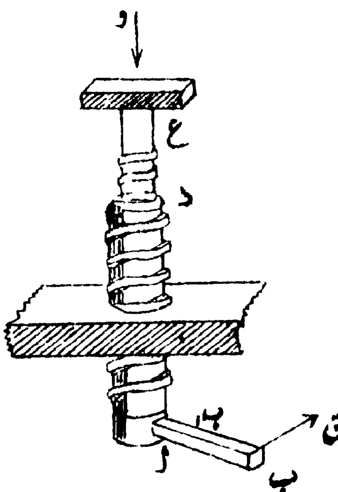
$$\therefore \frac{ق}{و} = \frac{ا}{ب_{١}} \text{ مس } (عہ - لہ)$$

اسی طرح اگر پیچ اوپر کی طرف حرکت کرنے کے عین قریب ہو تو مہ کی علامت کو بدلنے سے

$$\frac{ق_{١}}{و} = \frac{ا}{ب_{١}} \times \frac{\text{جب عہ} + \text{مہ جم عہ}}{\text{جم عہ} - \text{مہ جب عہ}} = \frac{ا}{ب_{١}} \text{ مس } (عہ + لہ)$$

اگر طاقت کی مقدار ق اور $ق_{١}$ کے درمیان ہو تو پیچ متعادل رہے گا لیکن اس صورت میں رگڑ انتہائی رگڑ نہ ہوگی۔ یہ بات قابل غور ہے کہ اگر پیچ کا زاویہ عہ رگڑ کے زاویہ لہ کے مساوی ہو تو طاقت صفر ہو جائیگی۔ اس صورت میں بغیر کسی بیرونی طاقت کے لگانے کے پیچ صرف رگڑ کی وجہ سے جو پیچ کی چوڑی کے ساتھ عمل کریگی متعادل رہیگا۔ اگر عہ > لہ تو ق منفی ہوگی یعنی پیچ خود بخود نیچے نہیں اُترے گا بلکہ اس کو نیچے اتارنے کے لیئے طاقت لگانی پڑے گی۔

۲۴۲۔ نظری طور پر پیچ کی صورت میں پیچ کی چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ کو حسب خواہش کم کرنے سے مفادمیکی کو جتنا بڑا چاہیں بنا سکتے ہیں مگر عملی طور پر ایسا کرنا ممکن نہیں کیونکہ اگر ہم چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ کو بہت کم کردیں تو چوڑی ان دباؤں کو جو اس پر پڑتے ہیں برداشت کرنے کے قابل نہیں رہے گی۔




ہنٹر کے فرقی پیچ میں اس نقص کو رفع کردیا گیا ہے۔ اس مشین میں ایک پیچ ا د ہوتا ہے جو ایک ثابت قالب کے اندر پھرتا ہے۔ پیچ ا د کا اندرونی حصہ کھوکھلا ہوتا ہے اور اس کے اندر ایک نالی کھدی ہوتی ہے۔ اس نالی میں ایک اور چھوٹا پیچ د ع حرکت کرتا ہے۔ پیچ د ع، ع پر ایک قالب کے ساتھ اس طرح بندھا ہوتا ہے کہ گھوم نہیں سکتا

بلکہ صرف اپنے طول کی سمت میں حرکت کرسکتا ہے۔

جب طاقت کا بازو ا ب ایک مکمل گردش کرتا ہے تو باہر کا پیچ اپنے دو مسلسل چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ کے مساوی فاصلہ اوپر چڑھتا ہے اور ساتھ ہی چھوٹا پیچ ہ ذ اپنے دو مسلسل چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ کے برابر بڑے پیچ کے اندر نیچے اترتا ہے۔ اس لئے مجموعی طور پر چھوٹا پیچ اور بنا بر علیہ وزن دونوں چوڑیوں کے درمیانی فاصلوں کے فرق کے مساوی فاصلہ پر اوپر چڑھتا ہے۔ اس لئے حسب دفعہ ۳۴۰ اگر پیچ چکنے ہوں تو کام کے اصول سے

$$\frac{و}{ق} = \frac{۲\pi\ ا ب}{۲\pi\ ا س ع - ۲\pi\ ا س ع'}$$

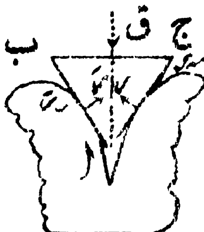
$$= \frac{\text{اس دائرہ کا محیط جو طاقت کے بازو کا سرا مرتسم کرتا ہے}}{\text{دونوں پیچوں کی گھائیوں کا فرق}}$$

دونوں پیچوں کی متصل چوڑیوں کے درمیانی فاصلوں کے فرق کو حسب منشا کم کرنے سے ہم مشین کو کمزور کرنے کے بغیر مفاد حیلی کو جتنا بڑا چاہیں بنا سکتے ہیں۔

۳۴۴- فانہ - دھات یا لوہے کا ایک پچر ہوتا ہے جسکی دو مستوی سطحیں ایک تیز دھار پر ملتی ہیں۔ فانہ لکڑیوں یا دیگر سخت چیزوں کو چیرنے کے کام آتا ہے ہتوڑی سے اسکے اوپر کے رخ پر مسلسل ضربیں لگانے سے اس کی تیز دھار کو اندر دھکیلا جاتا ہے۔

فانہ کے عمل کی تحقیق دراصل علم حرکت کا سوال ہے۔

یہاں ہم اس مسئلہ پر صرف سکونی نقطۂ نظر سے غور کریں گے یعنی یہ دیکھیں گے کہ اس کے اوپر کے رخ پر کس قدر یکساں طاقت لگانے سے اسے تعادل میں رکھا جاسکتا ہے۔ ساتھ کی شکل میں ا ب ج ایک ایسے فانہ کی تراش ہے جس کے رخ اس کے قاعدہ ب ج کے ساتھ مساوی میلان رکھتے ہیں۔



فرض کرو کہ زاویہ ج ا ب = عہ

فرض کرو کہ اس کے اوپر کے رُخ پر قوت ق لگائی گئی ہے، ر۱ اور ر۲ خانہ کے اُن نقطوں پر عمادی تعامل ہیں جہاں یہ لکڑی سے مس کرتا ہے۔ مہ ر۱، مہ ر۲ رگڑ کی قوتیں ہیں جو کہ خانہ کے نیچے اترنے کے عین قریب ہونے کی صورت میں اوپر کی طرف عمل کرتی ہیں۔ نیز فرض کرو کہ قوت ق، خط ب ج کے وسطی نقطہ پر ب ج کے علی القوائم سمت میں عمل کرتی ہے اور خانہ کا وزن بمقابلہ ق کے بہت چھوٹا ہے اور اس لئے نظرانداز ہوسکتا ہے۔

ب ج کی سمت میں اور اس کی عمودی سمت میں تحلیل کرنے سے

مہ ر۱ جب عہ/۲ - ر۱ جم عہ/۲ = مہ ر۲ جب عہ/۲ - ر۲ جم عہ/۲ .. .. .. .. (۱)

ق = مہ (ر۱ + ر۲) جم عہ/۲ + (ر۱ + ر۲) جب عہ/۲ .. .. .. .. .. (۲)

∴ ر۱ = ر۲ اور ۲ر/ق = ۱ / (مہ جم عہ/۲ + جب عہ/۲) = جم لہ / جب (عہ/۲ + لہ)

جہاں لہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

خانہ کی پھاڑنے کی طاقت کا ناپ ر۱ لیا جاتا ہے پس کسی معلومہ قوت ق کے لئے پھاڑنے کی طاقت بڑی سے بڑی ہوگی جب زاویہ عہ چھوٹے سے چھوٹا ہو نظری طور پر یہ اُس وقت ہوگا جب زاویہ عہ صفر ہو یعنی جب خانے کی مضبوطی بہت کم ہو۔ عملاً خانے کا زاویہ اتنا چھوٹا بنایا جاتا ہے جتنا کہ اس کی مضبوطی کے منافی نہ ہو۔

۴۴۲۔ ممکن ہے کہ خانہ پر لکڑی کی دباؤ کی قوت کافی بڑی ہو اور قوت ق اس قدر بڑی نہ ہو کہ خانہ کو عین نیچے دھکیل سکے۔ بلکہ برعکس اس کے خانہ باہر نکل آنے کے عین قریب ہو تو ایسی صورت میں ق کی قیمت ق۱ ہوگی جہاں ق۱ کی قیمت دفعہ ۴۴۲ میں مہ کی علامت کو بدلنے سے حاصل ہوگی۔ یعنی

ق۱ = ۲ر۱ (جب عہ/۲ - مہ جم عہ/۲) - ۲ر۱ قطلہ جب (عہ/۲ - لہ)

اگر $\frac{ع}{۲}$ > لہ تو ق، مثبت ہوگا

اور $\frac{ع}{۲}$ < لہ تو ق، منفی ہوگا اور خانہ اوپر نکلنے کے قریب ہوگا اگر اس کی بالائی سطح پر اوپر کی طرف قوت لگائی جائے۔

اگر $\frac{ع}{۲}$ = لہ تو خانہ بغیر کسی قوت لگانے کے عین پھنسا رہیگا۔

۲۴۵ - **سطح مائل** - حیلی طاقت کے نقطہ نظر سے سطح مائل ایک ایسی استوار سطح مستوی کو تعبیر کرتی ہے جو افق کے ساتھ کوئی میلان رکھتی ہو۔

سطح مائل وزنی اجسام کو اٹھانے کے لئے کام میں لائی جاتی ہے۔ سطح مائل پر ایک ذرہ کے تعادل کے مسئلہ پر اس سے قبل دفعات ۸۷ تا ۸۰ میں بحث ہو چکی ہے۔

معلوم کرو کہ کھردری سطح مائل پر سطح مذکورہ کے متوازی قوت کے زیر عمل ایک جسم کو اوپر کی طرف کھینچنے میں کس قدر کام کرنا پڑتا ہے۔

دفعہ ۸۷ کے مطابق قوت ق، جو جسم کو سطح مستوی کے اوپر کھینچنے کے لئے عین کافی ہو = و (جب عہ + مہ جم عہ)

اس لئے وہ کام جو اس کو ا سے ج تک لیجانے میں کیا جاتا ہے

= ق × اج = و × اج جب عہ + مہ × و × اج جم عہ = و × ب ج + مہ و × ا ب =

وہ کام جو سطح مائل کے بغیر جسم کو اتنی ہی اونچائی میں سے اوپر انتصاباً کھینچنے میں کرنا ہوتا ہے + وہ کام جو جسم کو سطح مائل کے مساوی کھردری افقی سطح پر مائل سطح کے قاعدہ کے برابر فاصلہ میں سے کھینچنے میں کرنا پڑتا ہے۔

۲۴۶ - دفعہ ماقبل سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ طاقت جو کام انجام دیتی ہے وہ اس کام سے زیادہ ہوتا ہے جو کہ وزن کے خلاف عمل میں آتا ہے۔ یہ بات ہر مشین کے لئے درست ہے۔ اس اصول کو حسب ذیل الفاظ میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

**کسی مشین میں طاقت جو کام انجام دیتی ہے وہ مساوی ہوتا ہے اُس کام کے جو وزن کے خلاف کیا جائے معہ اُس کام**

کے جو مشین کی مزاحمتوں کے خلاف کیا جائے معہ اس کام کے جو مشین کے جزوی حصوں کے اوزان کے خلاف کیا جائے۔

کسی مشین میں وزن کے خلاف کام کو کل کام سے جو نسبت ہوتی ہے مشین کی استعداد کہلاتی ہے۔ پس

$$\text{استعداد} = \frac{\text{مشین کا مفید کام}}{\text{مشین پر کا کل کام}}$$

فرض کرو کہ رگڑ کے نہ ہونے کی صورت میں جو طاقت درکار ہوتی ہے وہ ق ب ہے اور در اصل طاقت ق لگائی جاتی ہے۔ تب دفعہ ۲۱۱ کی رو سے

وزن کے خلاف جو کام کیا جاتا ہے وہ

= ق ب × وہ فاصلہ جس میں سے ق کا نقطہ عمل حرکت کرتا ہے اور وہ کام جو مشین پر صرف ہوا

= ق × وہ فاصلہ جس میں سے ق کا نقطہ عمل حرکت کرتا ہے

پس تقسیم کرنے سے

$$\text{استعداد} = \frac{\text{ق ب}}{\text{ق}} = \frac{\text{طاقت جب کہ رگڑ موجود نہ ہو}}{\text{طاقت جب کہ رگڑ موجود ہو}}$$

ہم نہ تو کبھی مزاحمت کی قسم کی قوتوں سے پورے طور پر نجات حاصل کر سکتے ہیں، اور نہ ہی مشین کو ایسا بنا سکتے ہیں کہ اس کے پرزے بالکل بے وزن ہوں اس کا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ ان دو وجوہ سے کچھ نہ کچھ کام ضرور ضائع ہوتا ہے۔ پس کسی مشین کی استعداد کبھی اکائی تک نہیں پہنچ سکتی۔ لیکن استعداد اکائی کے جس قدر قریب ہوگی اتنی ہی مشین زیادہ اچھی سمجھی جائے گی۔

کوئی مشین ایسی نہیں جس کی مدد سے کام پیدا کیا جا سکے اور عملاً مشین خواہ کتنی بھی بے رگڑ اور کم وزن کیوں نہ ہو کچھ نہ کچھ کام ہمیشہ ضائع ہوتا ہے۔ مشین کا فائدہ صرف اس قدر ہوتا ہے کہ اس کی مدد سے طاقت کے اثر کو زیادہ موثر بنایا جا سکتا ہے اور ساتھ ہی قوت کے عمل کرنے کے لئے جو فاصلہ درکار ہوتا ہے اس میں بھی نسبتاً مناسب

فاصلہ سے کمی کی جاسکتی ہے۔

۲۴۷۔ عملی طور پر مشینوں کے چلنے میں رگڑ کا اثر اس قدر زیادہ اور اہم ہوتا ہے کہ نظری تحقیقات زیادہ مفید ثابت نہیں ہوتی اور کسی خاص مشین کی صورت میں نتائج کو نظری تحقیقات پر نہیں بلکہ تجربہ پر مبنی کرنا پڑتا ہے۔ اس کا طریقہ ہر قسم کی مشینوں کے لئے یکساں ہے۔

رفتاری نسبت تجربہ سے معلوم ہوسکتی ہے۔ کیونکہ سب مشینوں میں یہ نسبت اُن فاصلوں کی کسر کے مساوی ہوتی ہے جو بالترتیب طاقت اور وزن ایک ہی وقت میں طے کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ یہ نسبت ن کے مساوی ہے۔

نیز فرض کرو کہ جو وزن اٹھایا جاتا ہے وہ و ہے۔ تب نظری طاقت ق جب کہ رگڑ بالکل نہ ہو $\frac{و}{ن}$ ہوگی۔ تجربہ سے طاقت کی وہ حقیقی قیمت ق معلوم کرو جو وزن و کو اٹھانے کے لئے عملاً عین کافی ہوتی ہے تب حقیقی مفاد میکانیکی $\frac{و}{ق}$ ہوگا اور مشین کی استعداد دفعہ ۲۴۶ کی رو سے $\frac{ق_۰}{ق}$ ہوگی۔

۲۴۸۔ مثال کے طور پر تجربہ خانہ کے فرقی چرخ اور محور پر غور کرو جس پر کچھ تجربہ کئے گئے تھے۔ تجربہ کے وقت مشین اچھی حالت میں نہیں تھی اور قبل از ایں صاف نہیں کی گئی تھی اور اس کے یا اس کی چرخیوں کے سہاروں کے مقاموں پر کوئی چکنائی کی چیز نہیں لگائی گئی تھی۔

دفعہ ۲۲۹ کی ترقیم کے مطابق ا، ب اور ج کی قیمتیں $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۳}{۴}$، ۲ اور ۳ انچ تھیں۔ پس رفتاری نسبت کی قیمت ن $= \frac{۲ب}{ج_۱ - ا_۱} = ۹$

اس قیمت کی تصدیق تجربہ سے بھی کی گئی کیونکہ یہ دیکھا گیا ہے کہ جب ق فاصلہ ۹ انچ نیچے اُترتا ہے تو و صرف ایک انچ اوپر چڑھتا ہے

ق کی قیمت پلڑے میں رکھے ہوئے باٹوں سے دریافت کی گئی تھی اور پلڑے

کا وزن بھی قوت ق میں شریک کرلیا گیا تھا۔ اس طرح بوجھ و کے لئے اس چرخی کا وزن بھی جس کے ساتھ بوجھ و بندھا ہوا تھا و کی قیمت میں شامل کرلیا گیا تھا۔ ق اور و کی جو متناظر قیمتیں گرام وزن میں حاصل ہوئیں وہ ذیل کی جدول میں درج ہیں اس میں ق کی وہ قیمتیں درج ہیں جو بوجھ و کو اٹھانے کے لئے عین کافی تھیں تیسرے کالم میں ق. کی (یعنی اُس طاقت کی جو رگڑ کے نہ ہونے کی صورت میں درکار ہوتی) متناظر قیمتیں دکھائی گئی ہیں۔

| و | ق | ق. = و/ن | د = ق./ق | م = و/ق |
|---|---|---|---|---|
| ۵۰ | ۲۸ | ۵٫۵۵ | ٫۲ | ۱٫۷۹ |
| ۱۰۰ | ۳۶ | ۱۱٫۱۱ | ٫۳۱ | ۲٫۷۸ |
| ۱۵۰ | ۴۵ | ۱۶٫۶۷ | ٫۳۷ | ۳٫۳ |
| ۲۵۰ | ۶۰ | ۲۷٫۷۸ | ٫۴۶ | ۴٫۱۷ |
| ۴۵۰ | ۹۰ | ۵۰ | ٫۵۶ | ۵ |
| ۶۵۰ | ۱۱۹ | ۷۲٫۲۲ | ٫۶۱ | ۵٫۴۶ |
| ۸۵۰ | ۱۴۷ | ۹۴٫۴۴ | ٫۶۴ | ۵٫۷۸ |
| ۱۰۵۰ | ۱۷۵ | ۱۱۶٫۶۷ | ٫۶۷ | ۶ |
| ۱۲۵۰ | ۲۰۳ | ۱۳۸٫۸۸ | ٫۶۸ | ۶٫۱۶ |
| ۱۴۵۰ | ۲۳۲ | ۱۶۱٫۱۱ | ٫۶۹۴ | ۶٫۲۵ |

چوتھے کالم میں د یعنی استعداد کی قیمتیں مندرج ہیں اور آخری کالم میں مفاد حیلی م کی متناظر قیمتیں مندرج کی گئی ہیں۔

اوپر کے نتیجوں کو مربع دار کاغذ پر مرتسم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ق اور و کی متناظر قیمتیں تقریباً ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہوتی ہیں جو تیسرے اور آخری نقطہ میں سے گزرتا ہے پس ق اور و کا ربط اس شکل کا ہے ق = ا و + ب

جہاں ا اور ب مستقل ہیں۔

نیز ق = ۴۵ جبکہ و = ۱۵۰ اور ق = ۲۳۲ جبکہ و = ۱۴۵۰

اس لیئے ا = ٫۱۴۴ ، ب = ۲۳٫۴ تقریباً اس لیئے ق = ٫۱۴۴ و + ۲۳٫۴

اسے مشین کا کلیہ کہتے ہیں۔

نیز $\text{ق}_\text{ب} = \frac{1}{9}\,\text{و} = ٫۱۱۱ \times \text{و}$

$$\text{لہذا}\quad \text{د} = \frac{\text{ق}_\text{ب}}{\text{ق}} = \frac{٫۱۱۱ \times \text{و}}{٫۱۴۴ \times \text{و} + ۲۳٫۴}$$

$$\text{اور}\quad \text{م} = \frac{\text{و}}{\text{ق}} = \frac{\text{و}}{٫۱۴۴ \times \text{و} + ۲۳٫۴}$$

ان سے د اور م کی قیمتیں و کی کسی قیمت کے جواب میں حاصل ہوسکتی ہیں۔ جیسے جیسے و بڑھتا جاتا ہے د اور م کی قیمتیں بھی بڑھتی جاتی ہیں اگر و کی تمام قیمتوں کے لیئے د کی مذکورہ بالا قیمت کو درست تسلیم کیا جائے تو د کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ و کی قیمت لا انتہا بڑی ہوجائے اور اس وقت د تقریباً ٫۷۷ ہوگا۔ پس اس مشین میں جو کام کیا جاتا ہے اس کا کم از کم ۲۳ فیصدی ضایع ہوجاتا ہے۔

$$\text{پس مفاد حیلی کی بڑی سے بڑی قیمت} = \frac{1}{٫۱۴۴} = \text{تقریباً } ۷$$

اگر استعمال سے پہلے مشین کو اچھی طرح صاف کرکے چکنا بنالیا جاتا تو بالضرور مقابلتہً اس سے بہت اچھے نتائج حاصل ہوتے۔

۲۴۹۔ دفعہ ماقبل کی مثال کے مانند دیگر مشینوں میں بھی حقیقی استعداد اکائی سے بہت کم ہوتی ہے۔

جن مشینوں کی استعداد بہت کم ہوتی ہے ان سے عموماً ایک عملی فائدہ حاصل ہوتا ہے۔ یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ جن مشینوں میں رگڑ کی مقدار قوت کی مقدار پر منحصر نہیں ہے ان میں کسی طاقت کے موجود نہ ہونے کی صورت میں وزن خود بخود نیچے نہیں اترے گا بشرطیکہ استعداد $\frac{1}{2}$ سے کم ہو۔ اس قسم کی مشینوں کی مثال ایک ایسا پیچ ہوسکتا ہے جس کا زاویہ چھوٹا ہو اور جس کی طاقت دفعہ ۲۴۱ کی طرح افق

کے متوازی عمل کرے یا ایک سطح مائل ہوسکتی ہے جس میں طاقت سطح مائل کے ساتھ اوپر کی طرف عمل کرے۔

اُن مشینوں میں جن میں رگڑ کی مقدار طاقت پر موقوف ہوتی ہے ایسا کوئی عام قاعدہ نظری طور پر ثابت نہیں کیا جا سکتا اور ہر ایک صورت پر جداگانہ غور کرنا چاہیے لیکن جن مشینوں میں قوت کارگر کی مقدار پر کم اثر پڑتا ہے ان کے لئے ہم تقریبی طور پر یہ اصول قرار دے سکتے ہیں کہ وزن نیچے نہیں اترے گا بشرطیکہ استعداد $\frac{1}{2}$ سے کم ہو ایسی مشینوں کے بارے میں کہتے ہیں کہ یہ بازگشت یا الٹ مار نہیں کرتی۔

مثلاً دفعہ ۲۳۰ کی معمولی فرقی چرخی کی استعداد $\frac{1}{2}$ سے کم ہوتی ہے اور طاقت کی عدم موجودگی میں یعنی جبکہ مشین کو چھوڑ دیا جائے اور رسی کو ڈھیلا کر دیا جائے تو بھی بوجھ خود بخود نیچے نہیں اترے گا۔ مشین کے عدم بازگشت ہونے کی خوبی سے بہت حد تک مشین کی کم استعدادی کی تلافی ہو جاتی ہے۔

فرقی چرخ اور محور میں مفاد حیلی اکثر زیادہ ہوتا ہے اور بنا بریں استعداد بالعموم $\frac{1}{2}$ سے کافی زیادہ ہوتی ہے، لیکن چونکہ اس میں وزن خود بخود نیچے اتر سکتا ہے، اس لئے اسے عملی طور پر ہمیشہ فرقی چرخی سے زیادہ سود مند مشین تصور نہیں کیا جا سکتا۔

جو طالب علم عملی طور پر مشینوں کے استعمال کے متعلق مزید واقفیت حاصل کرنا چاہتا ہے وہ سر رابرٹ بال کی کتاب "تجربی حرکیات" کا مطالعہ کرے۔

# مثالیں

۱۔ ایک چرخ اور محور کے مرکز ثقل کا فاصلہ اس کے محوری خط سے ا ہے، ثابت کرو کہ مشین ایسی حالت میں ساکن رہ سکتی ہے جس میں اس کے محوری خط اور مرکز ثقل میں سے گزرنے والی سطح مستوی سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ ط سے کم زاویہ بنائے جہاں جب ط = $\frac{ب}{ا}$ جب فہ، اس میں ب محور کا نصف قطر اور فہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

۲۔ ایک ترازو کے بازو مساوی طول کے ہیں اور ڈنڈی پر مختلف وزن ہیں، اگر ایک جسم کو باری باری سے ہر ایک پلڑے میں رکھ کر تولا جائے تو ثابت کرو کہ اس کا اصلی وزن اس کے ظاہری وزنوں کے حسابی اوسط کے مساوی ہوگا۔

۳- ایک ترازو کے بازو غیر مساوی طول کے ہیں لیکن جب ڈنڈی کے سروں پر کوئی وزن نہ ہو تو ڈنڈی افق کے متوازی رہتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر کسی جسم کو باری باری سے دونوں پلڑوں میں رکھ کر تولا جائے تو اس کا اصلی وزن اس کے ظاہری وزنوں کا ہندسی اوسط ہوگا۔

نیز ثابت کرو کہ اگر کوئی دوکاندار اس ترازو کے دونوں پلڑوں میں باری باری سے کوئی چیز تول کر دے تو خود اس کو نقصان ہوگا۔

۴- ایک ترازو کے پلڑوں کے وزن غیر مساوی ہیں اور ڈنڈی کے بازوؤں کے طول بھی غیر مساوی ہیں۔ اگر ایک دوکاندار کسی خریدار کو کوئی شے مساوی حصوں میں دونوں پلڑوں سے طول کر دے تو ثابت کرو کہ اسے خود نقصان ہوگا اگر ڈنڈی کا مرکز ثقل لمبے بازو کے اندر ہو۔

۵- ایک معمولی تک کی درجہ بندی اس مفروضہ کی بنا پر کی گئی ہے کہ اس کا اپنا وزن ق ہے اور متحرک راکب کا وزن و ہے۔ مگر یہ دونوں مفروضے غیر صحیح ہیں۔ اگر دو جسموں کے اصلی وزن $س_۱$ اور $س_۲$ ہوں اور ظاہری وزن $س_۱ + لا$ اور $س_۲ + ما$ ہوں تو ثابت کرو کہ قابل حرکت وزن اور تک کے وزن بالترتیب ان کی مفروضہ قیمتوں سے بقدر $\frac{و}{د}(لا - ما)$ اور

$$\frac{ق}{د}(لا - ما) - \frac{ب}{ا\,د}(س_۱ ما - س_۲ لا)$$ کے کم ہیں جہاں $د = س_۱ - س_۲ + لا - ما$

اور ب اور ا بالترتیب وہ فاصلے ہیں جو لنفاسیہ سے (دونوں ایک ہی سمت میں) سلاخ کے مرکز ثقل تک اور شے کے نقطہ آویزش تک ناپے گئے ہیں۔

نیز ثابت کرو کہ اگر کسی جسم کا اصلی وزن س ہو تو اس کا ظاہری وزن ہوگا

$$س + \frac{س(لا - ما) + س_۱ ما - س_۲ لا}{س_۱ - س_۲}$$

۶- ثابت کرو کہ پیچ کی استعداد بڑی سے بڑی ہوگی جب کہ اس کا زاویہ ۴۵° - $\frac{لم}{۲}$ ہو۔ رگڑ کی موجودگی میں کسی بوجھ و کو اٹھانے کے لئے جو طاقت درکار ہوتی ہے وہ

$$= و \times \frac{ل}{ب_۱}\, مس(عہ + لم)$$

اور جب رگڑ موجود نہ ہو تو طاقت

= و × (لا / ب۱) مس عہ

مطلوبہ استعداد ان کی نسبت ہوتی ہے - پس

استعداد = مس عہ / مس (عہ + لہ) = [جب (۲ عہ + لہ) − جب لہ] / [جب (۲ عہ + لہ) + جب لہ]

= ۱ − ۲ جب لہ / [جب (۲ عہ + لہ) + جب لہ]

استعداد کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی جب ۲ عہ + لہ = ۹۰

۷ - چرخیوں کے دوسرے نظام میں ہر دو قالب میں دو چرخیاں ہیں - بتاؤ کہ ۳۰۰ پونڈ کا بوجھ اُٹھانے کے لئے کتنی طاقت درکار ہوگی؟ اگر رگڑ کی وجہ سے کوئی طاقت اُس وزن کا جو یہ رگڑ کی عدم موجودگی میں اُٹھا سکتی ہے صرف ۴۵ گنا وزن اُٹھا سکے تو بتاؤ کہ کتنی طاقت درکار ہوگی۔

[۷۵ پونڈ ، ۱۹۶ ۲/۳ پونڈ]

۸ - چرخیوں کے دوسرے نظام میں رفتاری نسبت ۸ : ۱ ہے ، رگڑ اس قدر ہے کہ طاقت کا صرف ۵۵ فیصد حصہ مفید کام انجام دے سکتا ہے - بتاؤ کہ کتنی طاقت ۵ ہنڈرڈ ویٹ وزن اُٹھانے کے لئے درکار ہوگی۔

(جواب ۱ ۳/۲۲ ہنڈرڈ ویٹ)

۹ - ایک پیچ جاک میں بوجھ و کی قیمتیں بالترتیب ۱۵۰ ، ۱۸۰ ، ۲۱۰ ، ۲۴۰ اور ۲۷۰ پونڈ ہیں اور طاقت ق کی متناظر قیمتیں ۲۰٫۹ ، ۲۲٫۷ ، ۲۵٫۷ ، ۲۸٫۴ ، ۳۱٫۴ پونڈ وزن ہیں -

یہ فرض کرکے کہ ق = ا + ب و ، ا اور ب کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

[۵٫۳ ، ٫۰۹۷]

۱۰ - چرخیوں کے دوسرے نظام میں مزاحمت و اور طاقت ق کی متناظر قیمتیں حسب ذیل ہیں ، وزن میں نیچے کے قالب کا وزن بھی شامل ہے ۔

و = ۷۵، ۱۷۵، ۲۷۵، ۴۷۵، ۶۷۵، ۸۷۵، ۱۰۷۵

ق = ۲۵، ۳۸، ۷۱، ۱۱۹، ۱۶۶، ۲۱۴، ۲۶۴

نیز نیچے کے تالب میں پانچ رسیاں ہیں - ق اور و کے درمیان تقریبی رشتہ معلوم کرو اور استعداد اور مفاد حیلی کی متناظر قیمتیں معلوم کرو۔

ق، ق/ استعداد ے اور مفاد حیلی م کی ترسیمیں کھینچو

[ق = ۳٫۷ + ۲۳۶ء و]

۱۱- ایک حاملہ پر کے بوجھ اور طاقت کی قیمتیں ذیل کی جدول میں دکھائی گئی ہیں

بوجھ (ٹن اکائیوں میں) ۱، ۳، ۵، ۷، ۸، ۱۰، ۱۱

طاقت (پونڈ وزن میں) ۹، ۲۰، ۲۸، ۳۷، ۴۲، ۵۱، ۵۶

طاقت اور وزن کا رشتہ تقریبی طور پر معلوم کرو اور ۵ اور ۱۰ ٹن بوجھ کے لئے استعداد بھی درست کرو۔ یہ معلوم ہے کہ رفتاری نسبت ۵۰۰ ہے۔

[ق = ۳٫۴ + ۴٫۷ و، ۸ء ۸۸ء، ۸۸ء]

۱۲- ایک پیچ جاک کی گہائی ½ انچ ہے اور طاقت ۱۵ انچ لمبے بیرم کے سرے پر علی القوائم لگائی جاتی ہے۔ بوجھ کی قیمتیں ٹنوں میں اور طاقت کی متناظر قیمتیں پونڈوں میں جدول ذیل میں دکھائی گئی ہیں۔

بوجھ ۱، ۲٫۵، ۵، ۷، ۸، ۱۰

طاقت ۲۴، ۳۲، ۴۶، ۵۷، ۶۳، ۷۳

طاقت اور بوجھ کا رشتہ تقریبی طور پر معلوم کرو اور اس کی استعداد ۴ اور ۹ ٹن بوجھ کے لئے معلوم کرو

[ق = ۱۸٫۵ + ۵٫۵ و، ۵۹ء اور ۷۹ء]

# تیرھواں باب

## رسیوں اور زنجیروں کا تعادل

۲۵۰۔ کامل طور پر مڑ سکنے والی رسی اس رسی کو کہتے ہیں جس کی کسی عمادی تراشش پر کا تعامل صرف ایک قوت پر مشتمل ہو جس کی سمت رسی کے مماس کی سمت ہو۔ اس تراشش کو اتنا چھوٹا فرض کرنا چاہیے کہ رسی محض ایک منحنی خط متصور ہو سکے۔ رسی اپنے کسی نقطہ پر مڑنے کے خلاف کوئی مزاحمت پیش نہیں کر سکتی اس لئے اس کی شکل میں کوئی استواریت نہیں ہے اگر کسی زنجیر کی کڑیاں بہت چھوٹی اور چکنی ہوں تو اسے بھی مڑ سکنے والی رسی تصور کیا جا سکتا ہے۔

ساتویں باب میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی رسی میں جو مکمل طور پر مڑ سکنے والی نہ ہو یا تار کی صورت میں کسی عمادی تراش پر کے تعامل صرف ایک مماسی قوت میں تحویل نہیں ہو سکتے بلکہ ایک جفت اور ایک قوت میں تحویل ہوتے ہیں۔

۲۵۱۔ ایک یکساں وزنی انکھیچ رسی جاذبہ ارض کے زیر عمل آزادانہ لٹک رہی ہے۔ جس منحنی کی شکل یہ اختیار کرتی ہے اس کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ منحنی کا سب سے نچلا نقطہ ج ہے، اور ن رسی پر کا کوئی اور نقطہ ہے، ج ن قوس کا طول س ہے، فرض کرو کہ ن پر کا تناؤ ت اور ج پر کا تناؤ $ت_ب$ ہے۔

تب رسی کا حصہ ج ن، تناؤں $ت_ب$ اور ت اور اس حصہ کے وزن $و_۱ \times س$ کے زیر عمل متعادل ہے جہاں $و_۱$ رسی کے اکائی طول کا وزن ہے۔
اگر ن پر کے مماس کا میلان افق کے ساتھ سا ہو تو

$$ت \,\text{جم}\, سا = ت_ب \quad \ldots \ldots \quad (۱)$$

اور

$$ت \,\text{جب}\, سا = و_۱ \times س \quad \ldots \ldots \quad (۲)$$

فرض کرو کہ سب سے نچلے نقطہ پر کا تناؤ رسی کے طول $ج_۱$ کے وزن کے مساوی ہے، تب $ت_ب = و_۱ ج_۱$

لہذا

$$\text{مس}\, سا = \frac{و_۱ س}{ت_ب} = \frac{س}{ج_۱} \quad \ldots \ldots \quad (۳)$$

یعنی $\frac{\text{فر}ما}{\text{فر}لا} = \frac{س}{ج_۱}$ بشرطیکہ لا اور ما کے محور انتصابی اور افقی ہوں تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فر}^۲ما}{\text{فر}لا^۲} = \frac{۱}{ج_۱} \times \frac{\text{فر}س}{\text{فر}لا} = \frac{۱}{ج_۱} \times \sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فر}ما}{\text{فر}لا}\right)^۲}$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{\text{فر}^۲ما}{\text{فر}لا^۲}}{\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فر}ما}{\text{فر}لا}\right)^۲}} = \frac{۱}{ج_۱}$$

تکمل کرنے سے

$$\text{لوگ}\left[\frac{\text{فر}ما}{\text{فر}لا} + \sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فر}ما}{\text{فر}لا}\right)^۲}\right] = \frac{لا}{ج_۱} + \text{مستقل}$$

اگر ما کا محور ج میں سے گزرے تو $\frac{\text{فر}ما}{\text{فر}لا} = ۰$ جبکہ $لا = ۰$۔ اس لئے مستقل بالا صفر ہے۔

$$\therefore \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2} = \text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}}$$

اب $- \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}} = \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}}$

اس لئے تفریق کرنے سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{2}\left[\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}} - \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}}\right] \quad \ldots \quad (۴)$$

تکمل کرنے سے $\text{ما} = \frac{\text{ج}_1}{2}\left[\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}}\right] + \text{ا}$

اگر مبدا نقطہ ج سے فاصلہ $\text{ج}_1$ نیچے لیا جائے تو $\text{ما} = \text{ج}_1$ جب $\text{لا} = ۰$، اس لئے $\text{ا} = ۰$۔

ان محوروں کے لحاظ سے منحنی کی مساوات ہے

$$\text{ما} = \frac{\text{ج}_1}{2}\left[\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}}\right] = \text{ج}_1 \, \text{جمز} \, \frac{\text{لا}}{\text{ج}_1} \quad \ldots \quad (۵)$$

اس منحنی کو سادہ زنجیرہ کہتے ہیں۔ اور ولا کو اس کا مرتب کہتے ہیں۔

مساواتوں (۳) اور (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{س} = \text{ج}_1 \, \text{مس سا} = \text{ج}_1 \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

$$= \frac{\text{ج}_1}{2}\left[\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}} - \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}}\right] = \text{ج}_1 \, \text{جبز} \, \frac{\text{لا}}{\text{ج}_1} \quad \ldots \quad (۶)$$

ان دو مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما}^2 = \text{ج}_1^2 + \text{س}^2 \quad \ldots\ldots \quad (۷)$$

اس نتیجہ کو مساوات (۳) کے ساتھ ملانے سے

$$\text{ما} = \text{ج}_1 \, \text{قط سا} \quad \text{اور} \quad \text{س} = \text{ج}_1 \, \text{مس سا} \quad \ldots \quad (۸)$$

اگر ن سے معین ن ل کھینچا جائے اور ل ما عمود ہو ن ط پر تو زاویہ

ما ل ن = سا

اور اس لئے (۸) سے

$$ل\,ما = ج_{۱} = و\,ج$$

اور

$$ن\,ما = س = قوس\,ج\,ن$$

اب (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$ت = و\,ج_{۱}\,قط\,سا = و\,ما$$

یعنی زنجیرہ کے کسی نقطہ ن پر کا تناؤ رسی کے اُس طول کے وزن کے مساوی ہوتا ہے جو نقطہ ن اور مرتب کے درمیان عمودی فاصلہ کے برابر ہو مقدار $ج_{۱}$ کو بس سے زنجیرہ کا ناپ متعین ہوتا ہے اس کا مبدل کہتے ہیں۔

۲۵۲ - $ج_{۱}$ کی تمام قیمتوں کے لئے لا کی چھوٹی قیمتوں تک منحنی کی شکل اس مساوات سے تقریباً حاصل ہوتی ہے $۲ ج_{۱} [ما - ج_{۱}] = لا^{۲}$۔

یہ امر مساوات (۵) کی بائیں جانب کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلانے سے ظاہر ہے، لہٰذا منحنی کے سب سے نچلے نقطہ کے قرب میں منحنی کی شکل مکافی کی ہوتی ہے۔

$ج_{۱}$ کے مقابلہ میں لا کی بڑی قیمتوں کے جواب میں $و^{-\frac{لا}{ج_{۱}}}$ کی قیمت نظر انداز ہو سکتی ہے اس لئے اس صورت میں منحنی کی شکل قوت نما منحنی سے ملتی ہے۔

۲۵۳ - مشق ۱ - ایک یکساں زنجیر کا طول ۲ ل ہے، اس کے سروں کو دو نقطوں سے جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں اور جن کا درمیانی فاصلہ ۲ ا ہے باندھ دیا گیا ہے، اگر ل، ا سے بقدر ایک چھوٹی مقدار کے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ زنجیر کا تناؤ اس کے طول $ا\sqrt{\frac{ا^{۳}}{۶(ل-ا)}}$ کے وزن کے مساوی ہوگا اور جھوک یعنی زنجیر کے دونوں سروں کو ملانے والے خط سے سب سے نچلے نقطہ کی گہرائی تقریباً $\frac{۱}{۲}\sqrt{۶\,ا\,(ل-ا)}$ ہوگی۔

چونکہ ل، ا سے تھوڑا سا بڑا ہے اس لئے زنجیر کا تناؤ لازماً بہت بڑا ہوگا اور بنا بر علیہ ج، بہت بڑا ہوگا۔

تب دفعہ ۲۵۱ کی مساوات (۶) ہو جاتی ہے $\text{ل} = \frac{\text{ج،}}{۲}\left[\text{قو}^{\frac{\text{ا}}{\text{ج،}}} - \text{قو}^{-\frac{\text{ا}}{\text{ج،}}}\right]$

قوت نمائی مسئلہ سے پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{ل} = \frac{\text{ج،}}{۲}\left[۲\frac{\text{ا}}{\text{ج،}} + ۲\frac{\text{ا}^۳}{۶\times\text{ج،}^۳} + \cdots\right] = \text{ا} + \frac{\text{ا}^۳}{۶\times\text{ج،}^۲} + \frac{\text{ا}^۵}{۱۲۰\,\text{ج،}^۴} + \cdots$$

پس پہلے تقرب تک

$$\text{ل} - \text{ا} = \frac{\text{ا}^۳}{۶\,\text{ج،}^۲} \qquad \text{اور اس لئے} \quad \text{ج،} = \sqrt{\frac{\text{ا}^۳}{۶(\text{ل}-\text{ا})}}$$

یعنی سب سے نچلے نقطہ پر کا تناؤ زنجیر کے اس قدر طول کے وزن کے مساوی ہے۔

اب دفعہ ۲۵۱ کی مساوات (۵) کی رو سے زنجیر کے سرے کا معین

$$\text{ما} = \frac{\text{ج،}}{۲}\left[\text{قو}^{\frac{\text{ا}}{\text{ج،}}} + \text{قو}^{-\frac{\text{ا}}{\text{ج،}}}\right] = \frac{\text{ج،}}{۲}\left[۲ + ۲\frac{\text{ا}^۲}{۲\,\text{ج،}^۲} + ۲\frac{\text{ا}^۴}{۲۴\,\text{ج،}^۴} + \cdots\right]$$

$$= \text{ج،} + \frac{\text{ا}^۲}{۲\,\text{ج،}} + \frac{\text{ا}^۴}{۲۴\,\text{ج،}^۳} + \cdots$$

اس لئے سب سے نچلے نقطہ کا جھوک

$$= \text{ما} - \text{ج،} = \frac{\text{ا}^۲}{۲\,\text{ج،}} \;\text{تقریباً}\; = \frac{\text{ا}^۲}{۲}\sqrt{\frac{۶(\text{ل}-\text{ا})}{\text{ا}^۳}} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۶\,\text{ا}(\text{ل}-\text{ا})}$$

اس سے آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر سب سے نچلے نقطہ کا جھوک د ہو تو وہاں تناؤ تقریباً زنجیر کے طول $\frac{\text{ا}^۲}{۲\text{د}}$ کے وزن کے مساوی ہوگا۔

مشق ۲۔ ایک پتنگ زمین سے بلندی ھ پر اڑ رہی ہے اور ڈوری کا طول ل، چھوڑا جا چکا ہے۔ رسی کا آزاد سرا زمین کے ساتھ بندھا ہے۔ ثابت کرو کہ پتنگ پر ڈوری کا میلان زمین کے ساتھ $۲\,\text{مس}^{-۱}\frac{\text{ھ}}{\text{ل،}}$ ہے اور ڈوری کے تناؤ پتنگ اور زمین والے

سروں پر بالترتیب

$\text{و}_1 \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ھ}_1^2}{۲\,\text{ھ}_1}$ اور $\text{و}_1 \frac{\text{ل}_1^2 - \text{ھ}_1^2}{۲\,\text{ھ}_1}$ ہیں جہاں $\text{و}_1$ ڈوری کے اکائی طول کا وزن ہے۔

دفعہ ۲۵۱ کی شکل کے مطابق ن، ڈوری کا پتنگ والا سرا ہے اور ج زمین والا سرا۔

اس لئے $\text{ل ن} = \text{ھ} + \text{ج}_1$

لہذا مثلث ل ما ن سے

$$(\text{ھ}_1 + \text{ج}_1)^2 = \text{ل ما}^2 + \text{ما ن}^2 = \text{ج}_1^2 + \text{ل}_1^2$$

$$\therefore \quad \text{ج}_1 = \frac{\text{ل}_1^2 - \text{ھ}_1^2}{۲\,\text{ھ}_1} \quad \text{اور} \quad \text{ل ن} = \text{ج}_1 + \text{ھ}_1 = \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ھ}_1^2}{۲\,\text{ھ}_1}$$

$$\text{نیز جم سا} = \frac{\text{ج}_1}{\text{ج}_1 + \text{ھ}_1} = \frac{\text{ل}_1^2 - \text{ھ}_1^2}{\text{ل}_1^2 + \text{ھ}_1^2} \quad \text{اس لئے مس} \frac{\text{سا}}{۲} = \frac{\text{ھ}_1}{\text{ل}_1}$$

نیز ن اور ج پر مطلوبہ تناؤ ہیں $\text{و}_1 \times \text{ن ل}$ اور $\text{و}_1 \times \text{ج}$۔

مشق ۴۳۔ ایک یکساں وزنی رسی جس کا طول ۹۰ انچ ہے دو چکنی میخوں پر سے جو مختلف بلندیوں پر ہیں لٹک رہی ہے رسی کے جو حصے انتصاباً لٹک رہے ہیں اُن کے طول بالترتیب ۳۰ انچ اور ۳۳ انچ ہیں۔ ثابت کرو کہ زنجیرہ کا راس کل رسی کو ۴ : ۵ میں تقسیم کرتا ہے۔ نیز میخوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ میخوں سے زنجیرہ کے راس ج سے فاصلے بالترتیب $\text{س}_1$ اور $\text{س}_2$ ہیں، گویا

$$\text{س}_1 + \text{س}_2 = ۹۰ - ۶۳ = ۲۷$$

اگر زنجیرہ کا مبدل $\text{ج}_1$ ہو تو دفعہ ۲۵۱ کی مساوات (۷) کی رُو سے $\text{س}_1^2 + \text{ج}_1^2 = ۳۰^2$

اور $\text{س}_2^2 + \text{ج}_1^2 = ۳۳^2$

چونکہ چکنی میخ پر گزرنے سے رسیوں کے تناؤ میں کوئی فرق نہیں آتا اس لئے دفعہ ۲۵۱ کی آخری خاصیت کی رو سے رسی کے دونوں سروں کو زنجیرہ کے مرتب پر واقع ہونا چاہیئے۔

اس لئے آسانی سے $\text{س}_1 = ۱۰$ ، $\text{س}_2 = ۱۷$ اور $\text{ج}_1 = ۲۰\sqrt{۲}$

لہٰذا $\frac{س_۱ + ۳۰}{س_۲ + ۳۳} = \frac{۴}{۵}$

نیز اگر میخوں کے فصلے لا۱ اور لا۲ ہوں تو

$۳۰ = \frac{ج_۱}{۲}$ جمز $\frac{لا_۱}{ج_۱}$ اور $۳۳ = \frac{ج_۱}{۲}$ جمز $\frac{لا_۲}{ج_۱}$

پس میخوں کے درمیان کل افقی فاصلہ

$$= ۲۰\sqrt{۲}\left[ جمز^{-۱} \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} + جمز^{-۱}\frac{۳۳\sqrt{۲}}{۲۰}\right]$$

**مشق ۴** - ایک یکساں زنجیر کا طول ۲ل۱ اور وزن و ہے، اسے دو نقطوں أ اور ب سے جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں لٹکایا گیا ہے۔ اب اس کے وسطی نقطہ د سے ایک وزن ق لٹکایا گیا ہے، اگر أ ب = ۲ا۱ تو تعادل کی حالت میں د کی گہرائی أ ب کے نیچے معلوم کرو

فرض کرو کہ ج اُس زنجیرہ کا سب سے نچلا نقطہ ہے جس کا ایک حصہ د أ ہے فرض کرو کہ اس کا مبدل ج۱ ہے نیز فرض کرو کہ قوس ج د = س اور د کا معین = ما
تو ق = د پر کے تناؤ کا انتصابی جزو ترکیبی = ۲ ت جب سا (دفعہ ۲۵۱)

$$= ۲\frac{و}{۲ل_۱} ما \times \frac{س}{ما} = و\frac{س}{ل_۱}$$

نیز دفعہ ۲۵۱ کی مساوات (۷) کی رو سے

$س^۲ + ج_۱^۲ = ما^۲$ اور $(س + ل_۱)^۲ + ج_۱^۲ = (ما + ھ_۱)^۲$ ...... (۱)

جہاں ھ۱ مطلوبہ گہرائی ہے

ان مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے $س = \frac{ل_۱ \times ق}{و}$ اور $ما = \frac{ل_۱^۲}{۲ھ_۱} \times \frac{و + ۲ق}{و} - \frac{ھ_۱}{۲}$ ...... (۲)

نیز اگر د کا فصلہ لا ہو تو دفعہ ۲۵۱ کی مساواتوں (۵) اور (۶) سے

$$ا + س = ج_1 \; و \; \frac{\text{ل}_1}{\text{ج}_1} \quad \text{اور} \quad ا + ھ_1 + س + ل_1 = ج_1 \; و \; \frac{\text{لا} + \text{ل}_1}{\text{ج}_1}$$

$$\therefore \; و \; \frac{\text{ل}_1}{\text{ج}_1} = ۱ + \frac{ھ_1 + ل_1}{ا + س}$$

(۱) اور (۲) سے قیمتیں درج کرنے سے ہیں ھ، کی قیمت حاصل ہو سکتی ہے۔

**مشق ۵** - ایک زنجیرہ طول ۲ل ہے، اسے دو چھوٹی چکنی چرخیوں پر سے جو ایک ہی افقی خط میں ایک دوسرے سے فاصلہ ۲ا پر واقع ہیں لٹکایا گیا ہے تعادل کے محل معلوم کرو اور نیز بتاؤ کہ یہ قائم ہیں یا غیر قائم۔

چونکہ زنجیر کے تناؤ میں چرخی پر سے گزرنے سے کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی اور چونکہ ایک طرف تو یہ آزاد حصہ اَل کے وزن کے مساوی ہے اور دوسری طرف یہ زنجیر کے اس حصہ کے وزن کے مساوی ہے جس کا طول انتصاباً مرتب تک کے فاصلہ کے مساوی ہے (بموجب دفعہ ۲۵)

اس لئے ظاہر ہے کہ سرے ل اور نیز لَ دونوں زنجیرہ کے مرتب پر واقع ہیں۔

اس لئے ل = قوس ج ا + خط ال

$$= \frac{ج_1}{۲}\left[و^{\frac{ا}{ج_1}} - و^{-\frac{ا}{ج_1}}\right]$$

$$+ \frac{ج_1}{۲}\left[و^{\frac{ا}{ج_1}} + و^{-\frac{ا}{ج_1}}\right] = ج_1 \; و^{\frac{ا}{ج_1}} \quad \ldots \ldots \ldots \; (۱)$$

جہاں ج، زنجیرہ کا مبدل ہے۔

مساوات (۱) کو جبریہ طور پر حل نہیں کیا جا سکتا لیکن اگر ا، اور ل، کی قیمتیں تعداداً دی ہوئی ہوں تو ترسیمی حل حسب ذیل طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$\frac{ا_1}{ج_1}$ = لا رکھو، تب $و^{لا} = \frac{ل_1}{و_1} \times لا$ . . . . . . (۲)

منحنی ما = $و^{لا}$ اور خطِ مستقیم ما = $\frac{ل_1}{و_1}$ لا کھینچو۔ نقطے ق اور س (جہاں منحنی اور خطِ مستقیم ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں) ان کے فصلے مساوات (۲) کے تقریبی حل ہیں اور اس لئے $\frac{ا_1}{ج_1}$ = لا سے ج، کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔ ظاہر ہے کہ یہ حل حقیقی، منطبق یا خیالی ہونگے

بموجب اسکے کہ $\frac{ل_1}{و_1} \gtreqless$ مس ن و لا

جہاں و ن مماس ہے منحنی کا نقطہ و سے۔

اب ن اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$\frac{ما}{لا}$ = مس ن و لا = $\frac{فر\,ما}{فر\,لا}$

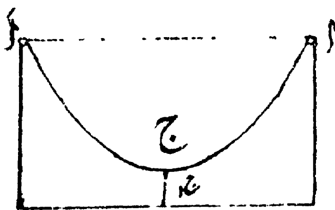
= $و^{لا}$ = ما

اس لئے ن کے محدد (۱، و) ہیں

پس مس ن و لا = و

پس زنجیروں کا دو، ایک یا نہ ہونا اس بات پر منحصر ہے کہ بالترتیب $ل_1 \gtreqless ا_1$ و

ایک منحنی تقریباً ایسا ہوگا جیسا کہ پہلی شکل میں دکھایا گیا ہے، اور دوسرا منحنی تیسری شکل میں دکھایا گیا ہے۔




پہلی صورت میں ج، کی قیمت صریحاً دوسری صورت میں ج، کی قیمت سے بڑی ہوگی۔

## تعادل قائم یا غیر قائم۔

دفعہ ۴۴۱ کی مشق ۲ کی رو سے

زنجیرہ کے مرکز ثقل کی بلندی اس کے مرتب کے اوپر $= \frac{\text{ج}_1\text{لا} + \text{س}\,\text{ما}}{2\,\text{س}}$

$\therefore$ اس کی گہرائی اَ اَ کے نیچے $= \text{ما} - \frac{\text{ج}_1\text{لا} + \text{ما}\,\text{س}}{2\,\text{س}} = \frac{\text{ما}\,\text{س} - \text{لا}\,\text{ج}_1}{2\,\text{س}}$

اس لئے اَ اَ کے نیچے کل زنجیر کے مرکز ثقل کی گہرائی

$$= \frac{2\text{س} \times \frac{\text{ما}\,\text{س} - \text{لا}\,\text{ج}_1}{2\text{س}} + 2\,\text{ما} \times \frac{\text{ما}}{2}}{2\,\text{س} + 2\,\text{ما}} = \frac{\text{ما}^2 + \text{ما}\,\text{س} - \text{لا}\,\text{ج}_1}{2(\text{ما} + \text{س})}$$

اب صورت بالا میں $\text{لا} = \text{ا}_1$ ، $\text{ما} = \frac{\text{ج}_1}{2}\left(\text{و}^{\frac{\text{ا}_1}{\text{ج}_1}} + \text{و}^{-\frac{\text{ا}_1}{\text{ج}_1}}\right)$

$$\text{س} = \frac{\text{ج}_1}{2}\left(\text{و}^{\frac{\text{ا}_1}{\text{ج}_1}} - \text{و}^{-\frac{\text{ا}_1}{\text{ج}_1}}\right)$$

اور $\text{ل}_1 = \text{ما} + \text{س} = \text{ج}_1\,\text{و}^{\frac{\text{ا}_1}{\text{ج}_1}}$

اس لئے کل زنجیر کے مرکز ثقل کی گہرائی اَ اَ کے نیچے

$$= \frac{\text{ما} \times \text{و}^{\frac{\text{ا}_1}{\text{ج}_1}} - \text{ا}_1}{2\,\text{و}^{\frac{\text{ا}_1}{\text{ج}_1}}} = \frac{\frac{\text{ل}_1}{\text{ج}_1} \times \frac{\text{ج}_1}{2}\left[\frac{\text{ل}_1}{\text{ج}_1} + \frac{\text{ج}_1}{\text{ل}_1}\right] - \text{ا}_1}{\frac{\text{ل}_1}{\text{ج}_1} \times 2}$$

$$= \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ج}_1^2 - 2\,\text{ا}_1\text{ج}_1}{4\,\text{ل}_1} = \frac{(\text{ل}_1^2 - \text{ا}_1^2) + (\text{ج}_1 - \text{ا}_1)^2}{4\,\text{ل}_1}$$

اس لئے $\text{ج}_1$ جتنا بڑا ہوگا اتنی ہی مرکز ثقل کی گہرائی اَ اَ کے زیادہ نیچے ہوگی۔ اس لئے ممکن منحنیوں کی پہلی شکل قائم ہے اور دوسری غیر قائم۔

**مشق ۶** ۔ معلومہ طول ل کی ایک یکساں وزندار رسی دو نقطوں ف اور ق کے ساتھ بندھی ہے، ف سے ق کا افقی فاصلہ ﮦ اور انتصابی فاصلہ ک ہے

یہ رسی بحالت سکون جس زنجیرہ کی شکل اختیار کرتی ہے اس کے مبدل ج کی قیمت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مرتب و لا اور زنجیرہ کے سب سے نچلے نقطہ ج میں سے گزرنے والے انتصابی خط کے لحاظ سے نقطہ ن کے محدد (لا، ما) ہیں۔ (دیکھو دفعہ ۲۵۱)

دفعہ مذکورہ کی مساواتوں کی رو سے

$$\text{ما} = \frac{\text{ج}_1}{2}\left[\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}}\right] \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{ما}+\text{ک} = \frac{\text{ج}_1}{2}\left[\text{و}^{\frac{\text{لا}+\text{ھ}}{\text{ج}_1}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}+\text{ھ}}{\text{ج}_1}}\right] \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\text{اور ل} = \text{س}_{\text{ق}} - \text{س}_{\text{ن}} = \frac{\text{ج}_1}{2}\left[\text{و}^{\frac{\text{لا}+\text{ھ}}{\text{ج}_1}} - \text{و}^{-\frac{\text{لا}+\text{ھ}}{\text{ج}_1}}\right] - \frac{\text{ج}_1}{2}\left[\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}} - \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}}\right] \ldots (3)$$

$$\therefore \text{ل}+\text{ک} = \text{ج}_1\,\text{و}^{\frac{\text{لا}+\text{ھ}}{\text{ج}_1}} - \text{ج}_1\,\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}} = \text{ج}_1\,\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}}\left(\text{و}^{\frac{\text{ھ}}{\text{ج}_1}} - 1\right) \quad \ldots (4)$$

$$\text{اور ل}-\text{ک} = -\text{ج}_1\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}+\text{ھ}}{\text{ج}_1}} + \text{ج}_1\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}} = \text{ج}_1\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}}\left(1 - \text{و}^{-\frac{\text{ھ}}{\text{ج}_1}}\right) \ldots (5)$$

$$\therefore \text{ل}^2 - \text{ک}^2 = \text{ج}_1^2\left[\text{و}^{\frac{\text{ھ}}{\text{ج}_1}} - 2 + \text{و}^{-\frac{\text{ھ}}{\text{ج}_1}}\right] \text{ جس سے}$$

$$\therefore \sqrt{\text{ل}^2 - \text{ک}^2} = \text{ج}_1\left[\text{و}^{\frac{\text{ھ}}{2\text{ج}_1}} - \text{و}^{-\frac{\text{ھ}}{2\text{ج}_1}}\right] \quad \ldots\ldots (6)$$

اس مساوات کو جبریہ طور پر حل نہیں کیا جا سکتا۔ لیکن ترسیمی حل $\frac{\text{ھ}}{2\text{ج}_1} = \text{لا}$ رکھنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اس لئے (۶) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جبز لا} = \pm \frac{\sqrt{\text{ل}^2 - \text{ک}^2}}{\text{ھ}} \times \text{لا} \quad \ldots\ldots (7)$$

اس لئے $\text{لا}$ وہ نقطہ ہے جہاں خطوط مستقیم

$$\text{ما} = \pm \frac{\sqrt{\text{ل}^2 - \text{ک}^2}}{\text{ھ}_1}\ \text{لا}$$

منحنی ما = جبز لا سے ملتے ہیں۔

منحنی کھینچنے سے ہمیں لا کی دو مساوی اور مخالف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور اس لئے

ج، کی دو مساوی اور مخالف قیمتیں ملتی ہیں بشرطیکہ $\frac{\sqrt{\text{ل}^2 - \text{ک}^2}}{\text{ھ}} > 1$

یعنی بشرطیکہ ل بڑا ہو طول ضـ ق سے۔

چونکہ ج، کی قیمت تقریب کے کسی مطلوبہ درجہ تک معلوم ہو سکتی ہے اس لئے مساوات (۴) سے لا کی اور مساوات (۱) سے ما کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔ پس حل مکمل ہے۔

ظاہر ہے کہ ج، کی صرف مثبت قیمت لینی چاہیئے کیونکہ ج، کی منفی قیمت سے ما منفی ہو جائیگا۔

فرض کرو کہ مساوات (۷) کے تقریبی حل کے طور پر لا کی قیمت لا، ترسیمی طریقہ سے حاصل کی گئی ہے تب مزید درجہ کی تقریبی قیمت تحلیلی طور پر معلوم ہو سکتی ہے۔ کیونکہ (۶) میں اوپر کی علامت لینے سے اور

$\frac{\sqrt{\text{ل}^2 - \text{ک}^2}}{\text{ھ}_1} = \text{لہ}$ رکھنے سے ہمیں جبز لا = لہ لا کو حل کرنا ہے جہاں لا، ایک تقریبی حل ہے۔

$\text{لا} = \text{لا}_1 + \text{د}$ رکھو جہاں د بہت چھوٹا ہے

تو $\quad$ جبز (لا، + د) = لہ (لا، + د)

یعنی جبز لا، + د جمز لا، + ..... = لہ (لا، + د) ٹیلر کے مسئلہ سے

اس لئے د کے مربعوں کو نظر انداز کرنے سے

$$د = \frac{\text{ل لا}_1 - \text{جبز لا}_1}{\text{جبز لا}_1 - \text{ل}} = \frac{\sqrt{\text{ل}^2 - \text{ک}^2}\ \text{لا}_1 - \text{ہ جبز لا}_1}{\text{ہ جبز لا}_1 - \sqrt{\text{ل}^2 - \text{ک}^2}}$$

پس $\text{لا}_1 + د$ دوسری تقریبی قیمت ہے۔

# مثالیں

۱۔ ایک تار کا وزن ۵ء۱ پونڈ فی گز ہے۔ اس کے سرے دو نقطوں سے جن کے درمیان افقی فاصلہ ۱۰۰ فٹ ہے بندھے ہیں اور تار کے جھوک یعنی سب سے نچلے نقطے کی گہرائی ۱ فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ تار کا بڑے سے بڑا تناؤ تقریباً $\frac{1}{2}$ ۶۲ پونڈ وزن ہے۔

۲۔ ایک تار برقی کا نظام لوہے کے تار نمبر ۸ سے جس کا وزن ۴۲ء۷ پونڈ فی ۱۰۰ گز ہے بنا ہے کھمبوں کے درمیان فاصلہ ۱۵۰ فٹ ہے اور وسط میں تار کا جھوک ۱ فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ سروں پر اس کا تناؤ ۲۰۵ پونڈ وزن کے مساوی ہے۔

۳۔ ایک تار ۱۲۰۰ فٹ نصف قطر والے منحنی کے گرد کھمبوں پر بندھا ہوا ہے اور ہر دو متصل کھمبوں کے درمیان ۴۰ گز کا فاصلہ ہے اور ہر فصل کے وسط میں کھمبوں کے درمیان تار کا جھوک ۶ انچ ہے۔ اگر تار کا وزن $\frac{1}{2}$ ۱ پاؤنڈ فی گز ہو تو ثابت کرو کہ ہر ایک کھمبے پر حاصل افقی کھچاؤ تقریباً ۱۸۰ پونڈ وزن ہوگا۔

۴۔ محض سکونیات کے اصولوں کی مدد سے ثابت کرو کہ عام زنجیرہ کے نقاط ن اور ق پر کے مماس جس نقطہ پر ملتے ہیں وہ قوس ن ق کے مرکز ثقل ث میں سے گزرنے والے انتصابی خط پر واقع ہوتا ہے۔

۵۔ ایک یکساں وزنی زنجیر کو جس کا طول ۱۵۵ فٹ ہے دو نقطوں سے جو افقی سطح مستوی میں ۱۵۰ فٹ کے فاصلہ پر واقع ہیں لٹکایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ سب سے نچلے نقطہ پر کا تناؤ کل زنجیر کے وزن کا تقریباً ۰۸ء۱ گنا ہے۔

۶۔ اگر ایک یکساں زنجیر کو اس کے سروں پر سے لٹکایا جائے اور اسکی کڑیوں کی کوئی تعداد ایک ہی انتصابی سطح مستوی میں چکنے افقی تاروں پر آزادانہ حرکت کر سکے تو ثابت کرو کہ ان مسلسل کڑیوں کے درمیان زنجیر کے حصے ایک ہی زنجیر کی قوس ہیں۔

۷ — اگر سب بلندیوں پر ہوا کی رفتار وہی ہو اور اس کا اثر جو ایک پتنگ کی ڈوری پر پڑتا ہے نظر انداز ہو سکتا ہو تو ثابت کرو کہ جیسے جیسے پتنگ اوپر چڑھتا ہے ویسے ویسے اسے قائم رکھنے کے لئے جو قوت درکار ہوتی ہے اس میں کمی ہوتی جاتی ہے۔

۸ — ایک یکساں زنجیر کا طول ۲ ل اور وزن و ہے اسے دو نقطوں ا اور ب سے جو ایک ہی افقی خط پر واقع ہیں لٹکایا گیا ہے۔ زنجیر کے وسطی نقطہ د سے ایک وزن ق لٹکایا گیا ہے اور اس نقطہ کی گہرائی خط اب کے نیچے ھ ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک سرے پر کا تناؤ $\frac{1}{2}\left[ن\frac{ل}{هـ} + و \times \frac{هـ^2 + ل^2}{2\,هـ}\right]$ ہے۔

۹ — ایک ناقابل کھنچاؤ رسی کا طول ۲ ل ہے اور فی اکائی طول وزن و ہے اس کو ایک ہی بلندی پر کے دو نقطوں سے جن کا درمیانی فاصلہ ۲ د ہے لٹکایا گیا ہے۔ سہارے کے نقطوں کے نیچے رسی کے سب سے نچلے نقطہ کی گہرائی معلوم کرنے کی مساواتیں حاصل کرو۔

۱۰ — ایک وزنی یکساں رسی کا طول ل ہے، اس کے ایک سرے کو ثابت نقطہ ا سے باندھ دیا گیا ہے اور دوسرے سرے ب کو افقی قوت کے ساتھ جو رسی کے طول د کے وزن کے مساوی ہے کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ ا اور ب کے درمیان افقی اور انتصابی فاصلے بالترتیب $د\ \text{جیبز}^{-1}\frac{ل}{د}$ اور $\sqrt{ل^2 + د^2} - د$ ہیں۔

۱۱ — ایک یکساں زنجیر کو جس کا طول ل ہے ایک ہی افقی خط پر کے دو نقطوں ا اور ب سے اس طرح لٹکانا منظور ہے کہ سروں پر کے تناؤ وسطی نقطہ پر کے تناؤ کا ن گنا ہوں ثابت کرو کہ فاصلہ اب ہوگا $\frac{ل}{\sqrt{ن^2 - 1}}\ \text{لوک}_و\left[ن + \sqrt{ن^2 - 1}\right]$۔

اگر ل = ۱۰۰ فٹ اور ن = ۳ تو جدولوں کی مدد سے ثابت کرو کہ طول تقریباً ۶۲،۳ فٹ ہوگا۔

۱۲ — ایک جہاز کو پانی میں اتارنے کے لئے اس کے پچھلے حصہ سے ایک زنجیر انتصاباً لٹکی ہوئی زمین تک پہنچتی ہے اور رسی کا باقی حصہ جہاز کی مخالف سمت میں ۸۰ گز کے فاصلہ تک

زمین پر پڑا ہے۔ اس کے دوسرے سرے کے ساتھ ایک وزنی لنگر بندھا ہے جس کو ہلانے کے لئے ۲۵ ٹن کی افقی قوت درکار ہوتی ہے زنجیر کا انتصابی حصہ ۵ فٹ لمبا ہے۔ بتاؤ کہ زنجیر کا وزن فی فٹ کیا ہونا چاہیئے کہ جب جہاز کی متوازی الافق حرکت سے کل زنجیر زمین پر سے اُٹھ آئے تو تناؤ لنگر کو کھینچ سکنے کے لئے عین کافی ہو۔

[ ۶۸۵۶ ۰۰۰۰ پونڈ ]

۱۳۔ ایک کشتی کو ایک ۲۰ فٹ لمبی یکساں زنجیر کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے۔ زنجیر کا ایک سرا کشتی کے پچھلے حصہ کے نقطہ ب سے اور دوسرے سرے کو ایک کھمبے کی چوٹی ا سے جو ب سے ۱۲ فٹ اونچی ہے باندھ دیا گیا ہے۔ پانی کی رو کشتی پر ۷½ پونڈ وزن کی قوت لگاتی ہے اور زنجیر کا وزن ½ پونڈ فی فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ ب کا فاصلہ ا میں سے گزرنے والے انتصابی خط سے ۳۰ لوک$_و$ ۵/۳ فٹ ہے۔

۱۴۔ ایک تار ۱۴۰ گز لمبا دو نقطوں کے درمیان لٹک رہا ہے۔ نقطوں کے درمیان فاصلہ افقاً ۱۳۸ گز اور انتصاباً ۵۰ فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ سب سے نچلے نقطہ پر تناؤ تقریباً ۴۹۵ پونڈ وزن ہے۔ تار کا وزن فی فٹ نصف پونڈ ہے۔

۱۵۔ ایک رسی جس کا طول ل ہے دو نقطوں کے درمیان (جو ایک ہی انتصابی خط میں نہیں ہیں) اس طرح لٹک رہی ہے کہ سہارے کے نقطوں پر رسی انتصابی خط کے ساتھ بالترتیب عہ اور بہ کے زاوئے بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ک ایک نقطہ کی بلندی ہو دوسرے نقطہ کے اوپر اور زنجیرہ کا راس سہارے کے درمیان نہ ہو تو

$$\text{ک جم}\ \frac{\text{عہ} - \text{بہ}}{۲} = \text{ل جم}\ \frac{\text{عہ} + \text{بہ}}{۲}$$

۱۶۔ طول ۲ل والی وزنی زنجیر کا ایک سرا ایک نقطہ ا کے ساتھ بندھا ہے اور دوسرا سرا ایک وزنی چھلے کے ساتھ بندھا ہے جو ا میں سے گزرنے والی کھردری افقی سلاخ پر پھسل سکتا ہے۔ اگر چھلے کا وزن زنجیر کے وزن کا ن گنا ہو تو ثابت کرو کہ ا سے چھلے کا بڑے سے بڑا فاصلہ

$$\frac{۲\text{ل}}{\text{د}}\ \text{لوک}\left[\text{د} + \sqrt{۱ + \text{د}^{۲}}\right]$$ ہوگا

جہاں $\frac{1}{\text{ٹہ}}$ = مہ (۲ن + ۱)، مہ رگڑ کی قدر کو تعبیر کرتا ہے۔

۱۷ — ایک وزنی کھردری یکساں رسی کا ایک سرا ایک نقطہ ن سے بندھا ہے جس کی بلندی ایک میز کے اوپر ھ₁ ہے۔ رسی کا طول ی (> ل − ھ₁) ن میں سے گزرنے والی انتصابی سطح مستوی میں میز پر ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ جب رسی کو میز پر ن سے آگے دور کھینچا جائے جو تعادل کے منافی نہ ہو تو ی اس مساوات کو پورا کریگا

$$\text{ی}^2 - 2(\text{ل} + \text{مہ ھ}_1)\,\text{ی} + \text{ل}^2 - \text{ھ}_1^2 = 0$$

جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے اور ل رسی کا طول ہے۔
[سب سے نچلے نقطہ پر تناؤ میز پر کے طول کے وزن کا مہ گنا ہوگا اس لئے ج₁ = مہ ی/ نیز

$(\text{ھ}_1 + \text{ج}_1)^2 = \text{ج}_1^2 + (\text{ل} - \text{ی})^2$ ]

۱۸ — ایک وزنی زنجیر کا کل طول ل ہے۔ اس کا ایک سرا ایک کھردرے میز پر پڑا ہے اور دوسرا کھردرے فرش پر۔ اس کو اتنا کھینچا گیا ہے جتنا کہ ممکن ہے یعنی تعادل انتہائی ہے اگر میز اور زمین دونوں پر رگڑ کی قدر مہ ہو اور میز کی بلندی ب ہو تو ثابت کرو کہ فرش پر زنجیر کا طول ہوگا

$$\frac{\text{مہ}}{4}\left[\text{ب} + \frac{2\text{ل}}{\text{مہ}} - \sqrt{\text{ب}^2 + \frac{4\text{ل ب}}{\text{مہ}}}\right] - \frac{\text{ب}}{2\text{مہ}} \qquad \text{بشرطیکہ}$$

$\text{ل} > \text{ب} + \frac{\text{ب}}{\text{مہ}}$ ہے۔

۱۹ — ایک زنجیر کا طول ۲ل اور وزن ۲و ہے اس کا ایک سرا ا ایک افقی تار کے ایک ثابت نقطہ کے ساتھ بندھا ہے اور دوسرا سرا ب ایک ہلکے حلقہ کے ساتھ بندھا ہے جو تار پر پھسلتا ہے، اولاً ا اور ب ایک دوسرے پر منطبق ہیں ثابت کرو کہ حلقہ کو تار کے اوپر اتنا کھینچنے سے کہ ا پر زنجیر کا میلان خطِ انتصابی کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بنائے کے کام ہوگا

$$\text{و ل}\left[1 - \sqrt{2} + \text{لوگ}_{\text{و}}(1 + \sqrt{2})\right]$$

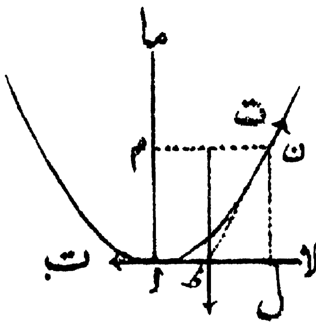
[دفعہ ۸۹ اور دفعہ ۴۴ کی مشق ۲ کو استعمال کرو]

۲۰۔ ایک یکساں رسی کا طول ۱۸ فٹ اور وزن ۳ و پونڈ ہے۔ اس کے سرے ایک سلاخ کے سروں کے ساتھ بندھے ہیں سلاخ کا وزن ۲ و پونڈ ہے۔ یہ دونوں ایک چکنے افقی میز پر ساتھ پڑے ہیں۔ جب رسی کے وسطی نقطہ کو میز کے اوپر سے ۱ بلندی تک اُٹھایا جائے تو میز پر کا دباؤ عین صفر ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ سلاخ کا طول ۱۶ لوگ ۲ فٹ ہے اور اٹھانے میں جو کام انجام ہوتا ہے وہ $\frac{1}{4}$ و (۱۵ + ۴۴ لوگ ۲) فٹ پونڈ ہے۔

۲۱۔ ایک تار برقی کا تار کسی معلومہ شے کا بنا ہوا ہے اور اس کا طول دو مساوی الارتفاع کھمبوں کے سروں کے ساتھ جن کا درمیانی فاصلہ د ہے بندھا ہے۔ اگر سرے کے نقطوں پر تناؤ کم سے کم ہوں تو ثابت کرو کہ ل = $\frac{د}{ل}$ جیبزل جہاں ل مساوات ل جیبزل = ۱ سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۵۴۔ ایک رسی جاذبہ ارض کے زیر عمل لٹک رہی ہے اس کو اس طرح وزنی بنایا گیا ہے کہ اس کے ہر جزو کا وزن اس جزو کے افقی ظل کے تناسب ہے۔ ثابت کرو کہ رسی مکافی کی شکل میں لٹکتی ہے۔

فرض کرو کہ رسی کے کسی نقطہ ن پر تناؤ ت ہے اور رسی کے سب سے نچلے نقطہ ا پر تناؤ ت ہے۔ ن پر مماس ن ط اور ا میں سے گزرنے والے افقی اور انتصابی خطوں پر ن سے عمود ن ل اور ن م نکالو۔




چونکہ رسی ا ن کے ہر جزو کا وزن م ن پر اس کے ظل کے تناسب ہے اس لئے ظاہر ہے کہ ا ن کے مرکز ثقل کا فصل م ن کے مرکز ثقل کے فصل کے مساوی ہے یعنی ا ن کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والا انتصابی خط م ن کی یعنی ا ل کی

تنصیف کرتا ہے۔ نیز چونکہ اس انتصابی خط کو لازماً ط میں سے بھی گزرنا چاہیئے

اس لئے اط = ط ل = $\frac{لا}{۲}$

اب ن ط ل قوس ا ن کے لئے قوتوں کا مثلث ہے۔

اس لئے اگر رسّی کے افقی فصل کے فی اکائی طول کا وزن و، ہو تو

$$\frac{ت}{ن ط} = \frac{ت}{ط ل} = \frac{ا ن \text{ کا وزن}}{ن ل} = \frac{و_۱ لا}{ما}$$

اگر ت، رسّی کے افقی فصل کے طول ج کا وزن ہو تو

$$\frac{و_۱ ج_۱}{\frac{لا}{۲}} = \frac{و_۱ لا}{ما} \quad \text{یعنی} \quad لا^۲ = ۲ ج_۱ ما$$

یعنی منحنی وترِ خاص ۲ ج، کا مکافی ہے۔

$$\text{نیز } ت = و_۱ \frac{لا}{ما} \times ن ط = و_۱ \times \frac{لا}{ما} \times \sqrt{ما^۲ + \frac{لا^۲}{۴}}$$

$$= و_۱ \sqrt{لا^۲ + \frac{لا^۴}{۴ ما^۲}} = و_۱ \sqrt{۲ ج_۱ ما + ج_۱^۲}$$

چونکہ ط میں سے گزرنے والا انتصابی خط ہم ن کی تنصیف کرتا ہے، اس لئے یہ خطِ مستقیم ا ن کی بھی تنصیف کرے گا۔ پس منحنی ایسا ہے کہ اس کے دو ماسوں کے نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والا محور کے متوازی خط وترِ تماس کی تنصیف کرتا ہے اور یہ مکافی کی ایک اساسی خاصیت ہے۔ لہٰذا بغیر کسی قسم کے تحلیلی طریقہ کو استعمال کرنے کے یہ ظاہر ہے کہ منحنی مکافی ہے۔

**۲۵۵**۔ جب زنجیرہ کو بہت زور سے کھینچا جائے تو یہ بالآخر تقریب کے درجہ اول تک مکافی بن جاتا ہے۔

چونکہ ج، رسّی کے اس حصہ کا طول ہوتا ہے جس کا وزن سب سے نچلے نقطہ پر کے تناؤ کے مساوی ہو اس لئے ج، بہت بڑا ہوگا۔

زنجیرہ کی مساوات جب کہ اس کے سب سے نچلے نقطہ ج کو مبدا مانا جائے یہ ہوتی ہے

$$\text{ما} + \text{ج}_1 = \frac{\text{ج}_1}{۲}\left[\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1}}\right] = \frac{\text{ج}_1}{۲}\left[۲ + ۲ \times \frac{\text{لا}^۲}{\lfloor۲\;\text{ج}_1^۲} + ۲ \times \frac{\text{لا}^۴}{\lfloor۴\;\text{ج}_1^۴} + \cdots\cdots\right]$$

مسئلہ قوت نما کی مدد سے

$$= \text{ج}_1 + \frac{\text{لا}^۲}{۲\;\text{ج}_1} + \frac{\text{لا}^۴}{۲۴\;\text{ج}_1^۳} + \cdots\cdots$$

$$\text{یعنی}\quad ۲\;\text{ج}_1\;\text{ما} = \text{لا}^۲ + \frac{\text{لا}^۴}{۱۲\;\text{ج}_1^۲} + \cdots\cdots$$

جب $\text{ج}_1$ کو بہت بڑا بنایا جائے تو زنجیرہ کی شکل تقرب کے پہلے درجہ تک مکافی $\text{لا}^۲ = ۲\;\text{ج}_1\;\text{ما}$ ہو جاتی ہے۔ ایک دوسرے نقطہ نظر سے بھی ہمیں اسی نتیجہ کی توقع کرنی چاہیئے تھی۔ کیونکہ جب زنجیرہ کو بہت زور سے کھینچا جائے تو اس کا میلان افق کے ساتھ بہت چھوٹا ہو جاتا ہے اس لئے اس کے کسی جزو پر کا بوجھ جو اس جزو کے طول کے متناسب ہے تقریباً اس جزو کے افقی ظل کے طول کے متناسب ہوگا۔ اس لئے دفعہ ہذا کا مسئلہ تقریباً دفعہ ماقبل کا مسئلہ بن جاتا ہے۔

**۲۵۶۔ معلق پل۔** معلق پل کی صورت میں دو زنجیریں اس طرح لٹکتی ہوتی ہیں کہ وہ ایک دوسرے کے متوازی ہوتی ہیں اور ان کے سروں کو ثابت سہاروں سے وابستہ کر دیا جاتا ہے ان زنجیروں کے مختلف نقطوں سے دیگر زنجیریں یا سلاخیں لٹکی ہوتی ہیں جو پل کے وزن کو سنبھالے رہتی ہیں۔ یہ سلاخیں عموماً اس طرح لگی ہوتی ہیں کہ ان کے درمیان افقی فاصلے ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

زنجیروں اور سلاخوں کے وزن کو پل کے وزن کے مقابلہ میں نظرانداز کیا جا سکتا ہے اس طرح ہم سلاخوں پر کے بوجھ کو پل کے مساوی حصوں کے وزن کے برابر تصور کر سکتے ہیں۔

اس لئے ہمیں دفعہ ۴۲۵ کی صورت حاصل ہوتی ہے لہٰذا معلق پل کی زنجیر کی شکل تقریباً مکافی کی شکل سے ملتی ہے سہارنے والی سلاخوں کے درمیانی فاصلے اور تمام سلاخوں اور زنجیروں کے وزن جس قدر کم ہونگے اتنا ہی اس کی شکل مکافی کے زیادہ مشابہ ہوگی۔

**مشق ۱** — ایک معلق پل کا کل وزن ۲۰۰ ٹن ہے جو اس کے تمام افقی فصل جس کا طول ۱۵۰ فٹ ہے مساوی طور پر منقسم ہے اور اس کی بلندی ۲۰ فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ زنجیر کے سب سے نچلے نقطہ پر اور سہارے کے مقاموں پر تناؤ بالترتیب ۱۸۷ ½ اور ۲۱۲ ½ ٹن ہیں۔

**مشق ۲** — ایک زنجیر کا فصل ۳۰ فٹ ہے اور سہارے کے مقاموں سے سب سے نچلے نقطہ کی گہرائی ۱۰ فٹ ہے وزن جو فصل پر مساوی طور پر منقسم ہے فی فٹ نصف ٹن کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک سرے پر کا تناؤ ۹٫۳۷۵ ٹن وزن ہے۔

**مشق ۳** — ایک زنجیر کا طول ل اور وزن و ہے، اس کو دو نقطوں ا اور ب سے جو افقی خط میں واقع نہیں ہے کھینچکر لٹکایا گیا ہے زنجیر کے وسطی نقطہ ج کی گہرائی انتصاباً خط ا ب کے نیچے ک ہے۔ ثابت کرو کہ زنجیر کا تناؤ تقریباً $\frac{\text{و ل}}{\text{۸ ک}}$ ہے۔

[ا ج، اور ج ب، انتصاباً کھینچو جن میں سے ہر ایک $\frac{\text{و}}{\text{۲}}$ کو تعبیر کرے ا، اور ب، دونوں میں سے ا، وَ اور ب، وَ، ا اور ب پر کے مماسوں کے متوازی کھینچو۔ تب ا، وَ اور ب، وَ اور ج، وَ بالترتیب ا، ب، ج پر کے تناؤ ت، تَ اور ت، کو تعبیر کرتے ہیں

چونکہ وَ ا،² + وَ ب،² = ۲ × وَ ج،² + ۲ ج ب،²

∴ ت² + تَ² = ۲ ت،² + $\frac{\text{و}^2}{\text{۲}}$

نیز ت، = $\frac{\text{ت + تَ}}{\text{۲}}$ − $\frac{\text{و}}{\text{ل}}$ ک زنجیر کے خواص کی رو سے

ت، کو ساقط کرنے سے ۲ ت² + ۲ تَ² = (ت + تَ − $\frac{\text{۲ و ک}}{\text{ل}}$)² + و²

لیکن انتہا میں ت = تَ اس لئے مساوات بالا سے حاصل ہوتا ہے

$$\cdot = -\frac{8\,ک}{ل}\,ت + \frac{4\,و^2\,ک^2}{ل^2} + و^2$$

یعنی $ت = \frac{و\,ل}{8\,ک} + \frac{ک\,و}{2\,ل} = \frac{و\,ل}{8\,ک}$ تقریباً

کیونکہ ک بہت چھوٹا ہے]

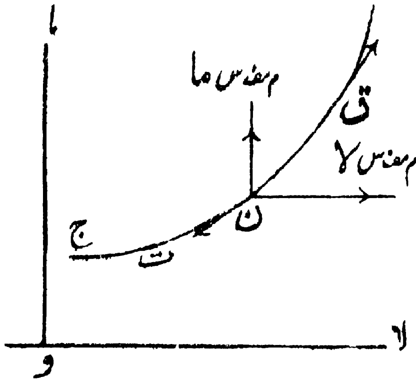
**۲۵۷ ـ قوتوں کے ایک معلوم نظام کے زیر عمل رسی کے تعادل کی عام شرائط معلوم کرو۔**

فرض کرو کہ رسی ایک ہی سطح مستوی میں ہے جس میں قوتیں عمل کرتی ہیں۔

فرض کرو کہ ن رسی کا کوئی نقطہ (لا، ما) ہے جس کا قوسی فاصلہ ایک ثابت نقطہ ج سے س ہے۔

فرض کرو کہ ق کوئی اور نقطہ ن کے بہت قریب واقع ہے اس لئے

ن ق = مف س اس لئے




نقطہ ق کے محدد لا + مف لا، ما + مف ما ہیں۔

فرض کرو کہ ن اور ق پر کے تناؤ ت اور ت + مف ت ہیں

فرض کرو کہ ن پر فی اکائی کمیت عمل کرنے والی قوتیں لا اور ما ہیں، لہذا جزو ن ق پر محوروں کے متوازی عمل کرنے والی قوتیں بالترتیب م مف س × لا اور م مف س × ما ہیں جہاں م فی اکائی طول کمیت ہے۔

[حقیقت میں قوت کے یہ اجزائے ترکیبی ن پر عمل نہیں کرتے بلکہ ن اور ق کے درمیان مختلف نقطوں پر عمل کرتے ہیں مگر چونکہ ہم ن ق کو بہت چھوٹا لے رہے ہیں اس لئے یہ کہنے میں کہ وہ ن پر عمل کرتے ہیں کسی غلطی کا اندیشہ نہیں ہے]

ن پر کے تناؤ کو محور لا کی سمت میں تحلیل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $ت \frac{فرلا}{فرس}$

اور یہ صریحاً قوس س کا کوئی تفاعل ف (س) ہے کیونکہ اس کی قیمت ن کے تمام

پر ہوتو ت سے ہے ۔

اسی طرح سے ق پر کے تناؤ کا جزو تحلیلی محور ولا کی سمت میں

= ف (س + مف س ) = ت (س) + مف س × تک (س) + ... ٹیلر کے مسئلہ سے

= ت فرلا/فرس + مف س فر/فرس (ت فرلا/فرس) + .....

قوس ن ق پر ولا کی سمت میں عمل کرنے والی قوتوں کو مساوی کرنے سے

ت فرلا/فرس = م × مف س × لا + ت فرلا/فرس + مف س × فر/فرس (ت فرلا/فرس) + .....

+ مف س کے مربعے اور بالاتر قوتوں والی رقمیں

مف س پر تقسیم کرنے اور اختصار کرنے سے اور مف س کو بہت چھوٹا بنانے سے یعنی ق کو ن کے بہت قریب لانے سے

فر/فرس (ت فرلا/فرس) + م لا = ۰ . . . . . (۱)

اسی طرح سے قوتوں کو محور ما کے متوازی تحلیل کرنے سے

فر/فرس (ت فرما/فرس) + م ما = ۰

اگر قوتیں لا اور ما اور نیز کمیت م کی قیمتیں رسی کے ہر ایک نقطہ ن کے لئے معلوم ہوں تو ان دو مساواتوں سے کسی نقطہ پر ت کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے ۔

نیز رسی کی شکل کے لئے تفرقی مساوات معلوم ہو جاتی ہے ۔

**۲۵۸ مشق ۱** ۔ فرض کرو کہ رسی یکساں ہے اور دفعہ ۲۵۱ کی مانند جاذبہ ارض کے زیر عمل آزادانہ لٹک رہی ہے لہذا اگر محور متوازی الافق اور انتصابی ہوں تو لا = ۰ اور ما = -ج اس لئے مساوات (۱) اور (۲) یہ شکل اختیار کرتی ہیں

فر/فرس (ت فرلا/فرس) = ۰ اور فر/فرس (ت فرما/فرس) = م ج

پہلی مساوات سے حاصل ہوتا ہے ت فرلا/فرس = مستقل = م ج گ (فرض کرو) یعنی رسی کے تمام طول میں افقی تناؤ مستقل ہے ۔

دوسری مساوات میں ت کی قیمت مندرج کرنے سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{گ}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right) = 1$$

یعنی

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \frac{1}{\text{گ}}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{گ}}\sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}$$

دفعہ ۲۵۱ کی تفرقی مساوات بھی یہی ہے۔

**مشق ۲۔** فرض کرو کہ رسی کو اس طرح وزنی بنایا گیا ہے کہ ہر جزو کا وزن افقی ظل کے طول کے متناسب ہے (جیساکہ معلق پُل کی صورت میں ہوتا ہے)

تب $\text{لا} = 0$ ، $\text{ما مف س} = -\,\text{ل مف لا}$

اس لئے مساوات (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{ت}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\right) = 0 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{ت}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\right) = \text{لم}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$$

$$\therefore \text{ت}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \text{مستقل} = \text{گ} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{گ}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right) = \text{لم}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$$

یعنی

$$\text{گ}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \text{لم}$$

تکمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ دفعہ ۲۵۱ کے مطابق منحنی مکافی ہے۔ اگر رسی کے اکائی طول کی کمیت م کسی طرح بدلے تو بھی اسی طرح حاصل ہو سکتا ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{گ}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right) = \text{م ج}$$

اگر م جزو مف س کے مقام کی رقوم میں معلوم ہو تو اس مساوات سے منحنی کی شکل حاصل ہوتی ہے نیز اگر رسی کے منحنی کی شکل معلوم ہو تو اسی مساوات سے کمیت کا تغیر بھی معلوم ہو سکتا ہے۔

**۲۵۹۔ یکساں طاقت کا زنجیرہ۔** فرض کرو کہ ہم یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ زنجیرہ کی مساوات کیا ہوگی اگر رسی کی کمیت اس کے ہر ایک نقطہ ن پر اس کے تناؤ کے متناسب

ہو۔ اس صورت میں رسی کی طاقت ہر نقطہ پر اس قوت کے متناسب ہوتی ہے جو اسے برداشت کرنی پڑتی ہے۔

اس صورت میں لا = ۰ اور ما = ـج اور ص = ت یعنی ص = لہ ت

جہاں لہ کوئی مستقل ہے۔

تب دفعہ ۲۵۷ کی مساواتیں ہو جاتی ہیں

$$ت \frac{فرلا}{فرس} = گ \quad اور \quad \frac{فر}{فرس}\left(ت \frac{فرما}{فرس}\right) = لہ\, ت\, ج \quad \ldots \quad (۱)$$

ت کی قیمت مندرج کرنے سے

$$\frac{فر}{فرس}\left(\frac{فرما}{فرس}\right) = لہ\, ج\, \frac{فرس}{فرلا}$$

$$یعنی \quad \frac{فر^۲ ما}{فرلا^۲} = لہ\, ج \left(\frac{فرس}{فرلا}\right)^۲ = لہ\, ج \left[۱ + \left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^۲\right]$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{فر^۲ ما}{فرلا^۲}}{۱ + \left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^۲} = لہ\, ج$$

تکمل کرنے سے $مس^{-۱} \frac{فرما}{فرلا} = لہ\, ج\, لا + گ_۱$

اگر ہم رسی کے سب سے نچلے نقطہ کو مبدا مانیں تو $\frac{فرما}{فرلا} = ۰$ جبکہ لا = ۰ اور اس لئے $گ_۱ = ۰$

$$\therefore \quad \frac{فرما}{فرلا} = مس\,(لہ\, ج\, لا) = مس\left(\frac{لا}{ا}\right) \quad اگر \quad \frac{۱}{ا} = لہ\, ج$$

تکمل کرنے سے $ما = ۔ ا\, لوک\, جم \frac{لا}{ا} = ا\, لوک\, قط \frac{لا}{ا}$

تکمل کا مستقل صفر ہے کیونکہ لا اور ما ایک ساتھ صفر ہوتے ہیں

اس منحنی کے دو انتصابی متقارب ہیں $\text{لا} = \pm \frac{\pi}{2}\,\text{ا}$

رسی کی کمیت کی تبدیلی کا قانون :—

$$(1)\ \text{سے}\quad \text{ت} = \text{گ}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} = \text{گ}\sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2} = \text{گ قط}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

اس لئے $\text{س} = \text{ا لوگ مس}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{لا}}{2\text{ا}}\right)$ اگر س کو سب سے نچلے نقطہ سے ناپا جائے۔

$$\therefore\quad \text{و}^{\frac{\text{س}}{\text{ا}}} + \text{و}^{-\frac{\text{س}}{\text{ا}}} = \text{مس}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{لا}}{2\text{ا}}\right) + \text{مم}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{لا}}{2\text{ا}}\right) = 2\,\text{قط}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

$$\therefore\quad \text{ت} = \text{گ}\,\frac{1}{2}\left(\text{و}^{\frac{\text{س}}{\text{ا}}} + \text{و}^{-\frac{\text{س}}{\text{ا}}}\right)$$

اس لئے کسی نقطہ ن پر جس کا فاصلہ سب سے نچلے نقطہ سے س ہے کمیت فی اکائی طول ایسے بدلتی ہے جیسے

$\frac{1}{2}\left(\text{و}^{\frac{\text{س}}{\text{ا}}} + \text{و}^{-\frac{\text{س}}{\text{ا}}}\right)$ یعنی ایسے بدلتی ہے جیسے

$$\text{جمز}\left(\frac{\text{س}}{\text{ا}}\right)$$

۲۶۰ - اگر رسی ایک ہی سطح مستوی میں واقع نہ ہو اور قوتوں کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی لا ، ما سے ہوں تو تعادل کی مساواتیں دفعہ ۲۵۷ کے مطابق حسب ذیل ہوں گی

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{ت}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\right) + \text{م لا} = 0$$

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{ت}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\right) + \text{م ما} = 0$$

$$\frac{ف}{فس}\left(ت \frac{فی}{فس}\right) + م ے = ۰$$

اس لئے $\frac{ف^۲لا}{فس^۲} + \frac{فلا}{فس} \times \frac{فت}{فس} + م لا = ۰$ . . . . . . (۱)

$ت \frac{ف^۲ما}{فس^۲} + \frac{فما}{فس} \times \frac{فت}{فس} + م ما = ۰$ . . . . . . (۲)

$ت \frac{ف^۲ی}{فس^۲} + \frac{فی}{فس} \times \frac{فت}{فس} + م ے = ۰$ . . . . . . (۳)

ان مساواتوں کو بالترتیب $\frac{فلا}{فس}$ ، $\frac{فما}{فس}$ ، $\frac{فی}{فس}$ سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

اور مماثلات $\left(\frac{فلا}{فس}\right)^۲ + \left(\frac{فما}{فس}\right)^۲ + \left(\frac{فی}{فس}\right)^۲ = ۱$

اور بناءً علیہ $\frac{فلا}{فس} \times \frac{ف^۲لا}{فس^۲} + \frac{فما}{فس} \times \frac{ف^۲ما}{فس^۲} + \frac{فی}{فس} \times \frac{ف^۲ی}{فس^۲}$

$$= \frac{۱}{۲} \frac{ف}{فس}\left[\left(\frac{فلا}{فس}\right)^۲ + \left(\frac{فما}{فس}\right)^۲ + \left(\frac{فی}{فس}\right)^۲\right] = ۰$$

کو استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{فت}{فس} + م\left(لا \frac{فلا}{فس} + ما \frac{فما}{فس} + ے \frac{فی}{فس}\right) = ۰$ ، یعنے

$$ت = گ - \int م \left(لا\, فلا + ما\, فما + ے\, فی\right)$$

پس اگر بیرونی قوتیں ایسی ہوں جن کا مماس کی سمت کوئی جزو ترکیبی نہ ہو تو تناؤ مستقل ہوگا۔

نیز اگر ہم مساوات (۱)، (۲) اور (۳) سے ت اور $\frac{فت}{فس}$ کو ساقط کردیں تو

$$\text{لا}\left[\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\times\frac{\text{فر}^2\text{ے}}{\text{فرس}^2}-\frac{\text{فرے}}{\text{فرس}}\times\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}\right]+\text{ما}\left[\frac{\text{فرے}}{\text{فرس}}\times\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}-\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\times\frac{\text{فر}^2\text{ے}}{\text{فرس}^2}\right]$$

$$+\text{ے}\left[\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\times\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}-\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\times\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}\right]=0$$

یعنی $\text{لا ل} + \text{ما م} + \text{ے ن} = 0$

جہاں (ل، م، ن) اس منحنی کے ثنائی عماد (Binormal) کی سمتی جیوب التمام ہیں جس میں رسی واقع ہے۔

اس لئے کسی نقطہ ن پر جو حاصل بیرونی قوت عمل کرتی ہے اس کی سمت ن پر کے ثنائی عماد کی سمت پر علی القوائم ہوتی ہے۔

اگر ہم (۱)، (۲) اور (۳) کو $\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}$، $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}$، $\frac{\text{فر}^2\text{ے}}{\text{فرس}^2}$ سے بالترتیب ضرب دے کر جمع کریں تو

$$\frac{\text{ت}}{\text{ر}}+\text{م س}=0$$

جہاں ر انحنا کا نصف قطر ہے اور س بیرونی قوت کا جزو تحلیلی ہے صدر عماد کی سمت میں جس کی سمتی جیوب التمام ہیں

$$\text{ر}\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}\ ،\ \text{ر}\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}\ ،\ \text{ر}\frac{\text{فر}^2\text{ے}}{\text{فرس}^2}$$

دفعہ ہذا کی مساواتوں کو ایک دفعہ اور تکمیل کرنے سے

$$\text{ت}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}+\int\text{م لا فرس}=\text{ا}$$

$$\text{ت}\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}+\int\text{م ما فرس}=\text{ب}$$

اور

$$\text{ت}\frac{\text{فرے}}{\text{فرس}}+\int\text{م ے فرس}=\text{ج}$$

اس لئے اُس منحنی کی مساواتیں جس میں رسی واقع ہے یہ ہیں

$$\frac{\text{ا} - \text{گ}\,\text{م}\,\text{لا}\ \text{فرس}}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}} = \frac{\text{ب} - \text{گ}\,\text{م}\,\text{ما}\ \text{فرس}}{\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}} = \frac{\text{ج} - \text{گ}\,\text{م}\,\text{ے}\ \text{فرس}}{\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}}$$

جہاں ا، ب، ج مستقل ہیں۔

۲۶۱۔ رسی جو ایک چکنی سطح پر معلومہ قوتوں کے زیر عمل پڑی ہے۔

فرض کرو کہ رسی کے کسی نقطہ پر سطح کا دباؤ سہ ہے اور اس نقطہ پر سطح کا جو عماد اندر کی طرف کھینچا جائے اس کی سمتی جیوب التمام ($\text{ل}_1$، $\text{م}_1$، $\text{ن}_1$) ہیں۔ تب تعادل کی مساواتیں ہیں

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{ت}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\right) + \text{م}\,\text{لا} - \text{سہ}\,\text{ل}_1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{ت}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\right) + \text{م}\,\text{ما} - \text{سہ}\,\text{م}_1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{ت}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}\right) + \text{م}\,\text{ے} - \text{سہ}\,\text{ن}_1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

نیز سطح کی مساوات معلوم ہے جو فرض کرو یہ ہے

$$\text{ف}\,(\text{لا}، \text{ما}، \text{ی}) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

چونکہ $\text{ل}_1 \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \text{م}_1 \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} + \text{ن}_1 \frac{\text{فری}}{\text{فرس}}$ متناسب ہے

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرس}}$$

کے لہٰذا وہ صفر کے مساوی ہے۔

مساواتوں (۱)، (۲) اور (۳) کو دفعہ ۲۶۰ کی طرح بالترتیب $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$ ، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}$ ، $\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}$ سے ضرب دینے اور جمع کرکے تکمل کرنے سے

$$\text{ت} = \text{گ} - \int \text{م} \left( \text{لا فرلا} + \text{ما فرما} + \text{ے فری} \right) \quad \ldots \ldots \quad (۵)$$

$$= \text{گ} - \text{قہ}$$ اگر بیرونی قوتیں توہ تفاعل قہ کے ذریعہ دی ہوئی ہوں۔

نیز اگر مساواتوں (۱)، (۲) اور (۳) میں سے ہم $\frac{\text{فرت}}{\text{فرس}}$ اور ی کو ساقط کردیں تو

$$\left( \text{ت} \frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2} + \text{م لا} \right) \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} \text{ن}_1 - \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \text{م}_2 \right) + \ldots\ldots + \ldots\ldots = ۰$$

ت کی مندرجہ بالا قیمت مندرج کرنے سے ہمیں مساوات (۴) کی مدد سے اس منحنی کی مساوات معلوم ہوسکتی ہے جو رسی سے بنتا ہے۔

۲۶۲۔ اگر دفعہ ماقبل میں رسی پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں تو $\text{لا} = \text{ما} = \text{ے} = ۰$
اور اس لئے (۵) سے $\text{ت} = \text{مستقل} = \text{گ}$
اس لئے (۱)، (۲) اور (۳) سے

$$\frac{\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}}{\text{ل}_1} = \frac{\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}}{\text{م}_1} = \frac{\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرس}^2}}{\text{ن}_1}$$

یعنی

$$\frac{\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرس}^2}}{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}} = \frac{\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرس}^2}}{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}} = \frac{\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرس}^2}}{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}}$$

اس لئے رسی کا منحنی ایسا ہے کہ ہر نقطہ پر اس کا صدر عماد سطح کے عماد پر منطبق ہوتا ہے یعنی رسی کے ہر نقطہ پر کالنمی مستوی سطح کے عماد میں سے گزرتا ہے۔ اس قسم کے منحنی

کو سطح کا تقسیم ارضی منحنی کہتے ہیں اور یہ ایسا ہوتا ہے کہ اس کا کوئی جزو ن ق ، سطح پر ن اور ق کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہوتا ہے۔

# مثالیں

۱ــ یکساں طاقت کے زنجیرہ میں ثابت کرو کہ

لا = ا سا ، س = ا لوک {قط سا + مس سا} ، جم سا جز $\frac{س}{ا}$ = ۱

اور ر = ا جز $\frac{س}{ا}$ جہاں ر انحنا کا نصف قطر ہے اور سا محور لا کے ساتھ مماس کا میلان ہے۔

اس لئے ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر فی اکائی طول کی کمیت ایسے بدلتی ہے جیسے اس نقطہ پر انحناء کا نصف قطر

۲ــ یکساں طاقت کے زنجیرہ کا فصل ۵۰ فٹ اور اس کا کل وزن ۶۰۰ پونڈ ہے۔ مادہ کی کثافت ۸۰ پونڈ فی مکعب فٹ ہے۔ اور اس کی تراش پر فی مربع انچ تناؤ ۲۰ پونڈ وزن کے مساوی ہے منحنی کی مساوات معلوم کرو۔ اور سب سے نچلے اور اوپر کے نقطہ پر اس کی تراشوں کے رقبے معلوم کرو۔

[ $\frac{ی}{۳۶}$ = لوک قط $\frac{لا}{۳۶}$ ، ۱۵ انچ، $\frac{۲۵}{۳۶}$ اور ۱۵ انچ $\frac{۲۵}{۳۶}$ مربع انچ ]

۳ــ اگر ایک رسی کے ہر ایک نقطہ پر کثافت ایسے بدلے جیسے اس منحنی کا نصف قطر انحنا جس میں یہ لٹک رہی ہو تو ثابت کرو کہ منحنی یکساں طاقت کا زنجیرہ ہوگا۔

۴ــ ثابت کرو کہ اگر معلق پل کی سلاخوں کے وزنوں کو بھی ملحوظ رکھا جائے لیکن باقی پل کے وزن کو نظرانداز کر دیا جائے تو معلق پل کے منحنی کی شکل زنجیرہ کا قایم ظل ہوگی۔ سلاخوں کو انتصابی اور ایک دوسرے متساوی الفصل فرض کیا گیا ہے۔

۵ــ ایک رسی کی کثافت کسی نقطہ پر $\frac{ت}{ج ا}$ قط$^۲$ $\frac{س}{ا}$ ہے جہاں ت تناؤ ہے سب سے نچلے نقطہ پر اور س فاصلہ ہے متغیر نقطہ کا اس نقطہ سے۔ رسی کے منحنی کی شکل معلوم کرو۔

[نصف قطر ا کا دائرہ]

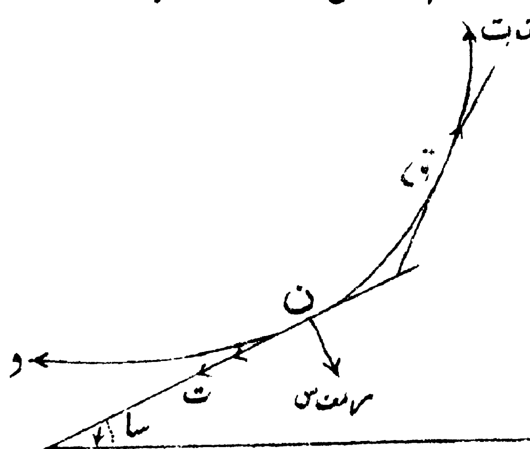
۷ — ایک غیر متجانس رسی جس کی تراش کا رقبہ کسی نقطہ پر اس کے تناؤ کے بالعکس متناسب ہے جاذبہ ارض کے زیر عمل لٹک رہی ہے - ثابت کرو کہ اس کی شکل ایک مکافی کی قوس ہے جس کا محور انتصابی ہے۔

۸ — ایک یکسان رسی مکافی کی شکل میں لٹک رہی ہے جس کا ماسکہ س ہے - اس پر عمل کرنے والی قوتیں ہر نقطہ پر عماد کی سمت میں ہیں - ثابت کرو کہ کسی نقطہ ن پر کی قوت بالعکس ایسے بدلتی ہے جیسے (س ن)$^{\frac{3}{2}}$ اور تناؤ مستقل ہے۔

۳۶۲ - ہلکی نا امتداد پذیر رسی جو ایک چکنے مستوی منحنی پر ساکن ہے - فرض کرو کہ ن ق رسی کا کوئی جزو مف س ہے جہاں قوس و ن کا طول س ہے اور و منحنی پر کوئی ثابت نقطہ ہے۔

فرض کرو کہ ن اور ق پر کے تناؤ بالترتیب ت اور ت + مف ت ہیں اور ان پر کے مماس کسی ثابت خط کے ساتھ زاویے سا اور سا + مف سا بناتے ہیں۔

نیز فرض کرو کہ منحنی کا جو تعامل رسی کے جزو ن ق پر عمل کرتا ہے وہ فی اکائی طول ر کے مساوی ہے پس اس جزو پر کا تعامل ر مف س ہے اور یہ ن پر کے عماد کی سمت میں باہر کی طرف عمل کرتا ہے




ن پر کے مماس اور عماد کی سمتوں میں تحلیل کرنے سے

(ت + مف ت) ×
جم مف سا = ت

(ت + مف ت) جب مف سا = ر مف س

اس لئے مف سا کی درجہ اوّل کی قیمتوں تک جم مف سا = ۱ اور جب مف سا = مف سا

∴ ت + مف ت = ت یعنی مف ت = ۰ . . . . . . (۱)

ت مف سا = ر مف س جو انتہائی صورت میں ہوجاتا ہے

ت = ر $\frac{\text{فر س}}{\text{فر سا}}$ = ر × ر ....(۲) جہاں ر نقطہ ن پر نصف قطر انحنا کی قیمت ہے۔

(۱) سے حاصل ہوتا ہے ت = مستقل

اس لئے ہلکی رسی کا تناؤ جو ایک چکنے منحنی پر ساکن ہو ہر جگہ مستقل ہوتا ہے۔

نیز (۲) سے حاصل ہوتا ہے ر ∝ $\frac{۱}{ر}$ یعنی عمادی تعامل ایسے بدلتا ہے جیسے منحنی کا انحنا۔

۴۲۶- وزنی رسی جو ایک چکنے منحنی پر ساکن ہے۔

اگر وہ خط جس سے سا ناپا جائے افقی ہو اور اسے لا کا محور مانا جائے تو ہمیں دفعۂ ماقبل کی قوتوں کے علاوہ ن پر عمل کرنے والی انتصابی قوت و مف س کو بھی شریک کرنا پڑے گا۔

اس لئے دفعہ ماقبل کی مساواتوں کی بجائے ہمیں ذیل کی مساواتیں ملیں گی

(ت + مف ت) جم مف سا = ت + و مف س × جب سا

اور (ت + مف ت) جب مف سا = ر مف س + و مف س × جم سا

ان سے حسب سابق حاصل ہوتا ہے

مف ت = و مف س × جب سا = و مف ما . . . . . . (۱)

ت $\frac{\text{فر سا}}{\text{فر س}}$ = ر + و جم سا . . . . . . (۲)

(۱) سے حاصل ہوتا ہے ت = گ + و ما اگر و کو مستقل فرض کیا جائے۔

اس لئے اگر $ت_۱$ اور $ت_۲$ تناؤ ہوں ان نقطوں پر جن کے معین $ما_۱$ اور $ما_۲$ ہیں تو

$$ت_۱ - ت_۲ = و_۱ (ما_۱ - ما_۲)$$

یعنی اگر ایک وزنی یکساں رسی ایک چکنے منحنی پر ساکن ہو تو اس کے کسی دو نقطوں پر کے تناؤں کا فرق اُن نقطوں کے معینوں کے فرق کے برابر طول والی رسی کے وزن کے مساوی ہوتا ہے۔

جب $ت$ معلوم ہو جائے تو (۲) سے تعامل $س$ حاصل ہوتا ہے

$$س = \frac{ت}{ر} - و_۱ جم سا$$

جہاں $ر$ منحنی کا نصف قطر انحنا ہے ن پر۔

۲۶۵ - **مشق** - ایک یکساں وزنی رسی ایک ایسے چکنے زنجیرہ پر متشاکلاً پڑی ہے جس کا محور انتصابی اور راس اوپر کی طرف ہے۔ کسی نقطہ پر دباؤ اور رسی کا تناؤ معلوم کرو۔

دفعۂ ماقبل کی مساواتیں اس صورت میں ہو جاتی ہیں

$$\frac{فت}{فس} + و_۱ جب سا = ۰ \quad \text{- - - - - - (۱)}$$

$$س = \frac{ت}{ر} + و_۱ جم سا \quad \text{- - - - - - (۲)}$$

لیکن $س = ج مس سا$ یعنی $\frac{فت}{فسا} = - و_۱ ج \frac{جب سا}{جم^۲ سا}$

$$\therefore ت = - \frac{و_۱ ج}{جم سا} + ا = و_۱ ج [قط سبا - قط سا]$$

جہاں $سبا$ آزاد سروں میں سے کسی ایک سرے پر کے مماس کا میلان ہے۔

اس لئے (۲) سے حاصل ہوتا ہے

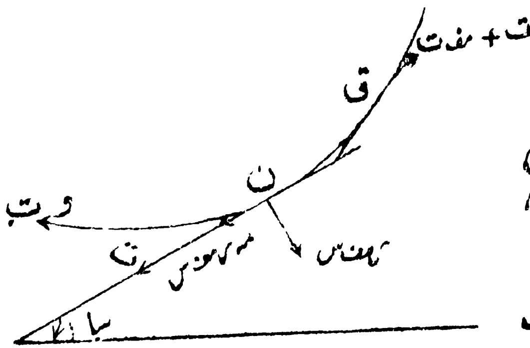
$$\text{س} = \frac{\text{ت جم}^{2}\text{سا}}{\text{ج}_{1}} + \text{و}_{1}\text{جم سا} = \text{و}_{1}\text{قط سا}_{1} \times \text{جم}^{2}\text{سا}$$

$$= \frac{\text{و ج}_{1}^{2}}{\text{ا}^{2}} \times \text{قط سا}_{1}$$

اس میں س بالعکس ایسے بدلتا ہے جیسے زنجیرہ کے مرتب سے نقطہ کے فاصلہ کا مربع۔

**۴۲۶**۔ ہلکی انکھنچ رسی انتہائی تعادل کی حالت میں ایک کھردرے مستوی منحنی پر بغیر کسی بیرونی قوت کے عمل کے ساکن ہے۔

فرض کرو کہ رسی کا کوئی جزو ن ق ہے، نیز فرض کرو کہ قوس و ن اس کے مساوی ہے جہاں و کوئی ثابت نقطہ ہے۔ ن ق، مف س ہے اور ن، ق پر کے مماس کسی ثابت خط کے ساتھ سا اور سا + مف سا کے زاویئے بناتے ہیں۔




فرض کرو کہ ان نقطوں پر جہاں رسی منحنی کو چھوڑتی ہے رسی کے تناؤ ت اور ت، ہیں، نیز فرض کرو کہ تناؤ ت، ت پر غالب آجانے کے عین قریب ہے یعنی جزو ن ق مماس ن ق کی سمت میں حرکت کرنے کے عین قریب ہے گویا رگڑ سمت ن ت میں عمل کرتی ہے۔

اگر ن ق پر تعامل فی اکائی طول س ہو تو مجموعی عمادی تعامل جو ن ق پر عمل کرتا ہے س × مف س کے مساوی ہوگا اور اس کا نقطہ عمل ن فرض کیا جا سکتا ہے اور مماسی عمل مہ س × مف س لیا جا سکتا ہے جو ن ت کی سمت میں عمل کرتا ہے۔

ن پر کے مماس اور عماد کی سمت میں قوتوں کو تحلیل کرنے سے

(ت + مف ت) جم مف سا = ت + مہ سَ × مف س

اور (ت + مف ت) جب مف سا = سَ مف س

لیکن جم مف سا = ۱ اور جب مف سا = مف سا جبکہ مف سا کے مربعوں کو نظر انداز کیا جائے۔

اس لئے ان مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر ت}}{\text{فر س}} = \text{مہ سَ} \quad \text{اور} \quad \text{ت} \frac{\text{فر سا}}{\text{فر س}} = \text{سَ}$$

سَ کو ساقط کرنے سے $\frac{\text{فر ت}}{\text{ت}}$ = مہ فر سا

∴ لوک ت = مہ سا + مستقل

یعنی ت = ا و^مہ سا^

اگر سا ایک ایسے خط سے ناپا جائے جو رسی کی اس سمت کے متوازی ہو جہاں یہ منحنی کو چھوڑتی ہے تو ت = ت٫ جبکہ سا = ۰

اس لئے ا = ت٫ اور ت = ت٫ و^مہ سا^

اس سے کسی نقطہ ن پر کا تناؤ سرے پر کے تناؤ اور اس زاویہ کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے جو سرے پر کے مماس اور نقطہ ن کے مماس کے درمیان بنتا ہے۔

۲۶۷ - بطور عددی مثال کے اس رسی پر غور کرو جو ایک کھمبے کے گرد ایک مکمل گردش میں سے لپٹی ہوئی ہے۔ اگر معمولی مونج کی رسی کو آبنوس کے کھمبے کے گرد لپیٹا جائے تو مہ = ½ تقریباً

اس لئے $\frac{\text{ت}}{\text{ت}_{\text{٫}}}$ = و^½ × ۲π^ = و^π^ = (۲٫۷۱۸)^۳٫۱۴۱۶^ = ۲۳ تقریباً

یعنی رسی کا تناؤ کھمبے کے گرد ایک دفعہ لپٹنے سے تقریباً ۲۳ گنا ہو جاتا ہے اگر اسے دو دفعہ

لپیٹا جائے تو تناؤ ۵۳۵ گنا ہو جاتا ہے ۔

**۲۶۸ ۔ وزنی رسی** ۔ اگر رسی وزنی ہو اور اس کا وزن فی اکائی طول $\text{و}_1$ ہو اور سا کو افقی سمت سے ناپا جائے تو دفعہ ماقبل کی مساواتوں کی بجائے مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$(\text{ت} + \text{مف ت})\,\text{جم مف سا} = \text{ت} + \text{مہ ر مف س} + \text{و}_1\,\text{مف س جب سا}$$

$$(\text{ت} + \text{مف ت})\,\text{جب مف سا} = \text{ر مف س} + \text{و}_1\,\text{مف س جم سا}$$

اس لئے انتہا میں

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} = \text{مہ ر} + \text{و}_1\,\text{جب سا} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\text{ت}\,\frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \text{ر} + \text{و}_1\,\text{جم سا} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\therefore \quad \frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} - \text{مہ ت}\,\frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \text{و}_1(\text{جب سا} - \text{مہ جم سا})$$

چونکہ ہماری شکل میں س اور سا ایک ساتھ بڑھتے ہیں اس لئے $\frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \text{ر}$

$$\therefore \quad \frac{\text{فرت}}{\text{فرسا}} - \text{مہ ت} = \text{و}_1\,\text{ر}\,(\text{جب سا} - \text{مہ جم سا})$$

اس خطی تفرقی مساوات کو حل کرنے کے لئے ہم حسب قاعدہ $\text{و}^{-\text{مہ سا}}$ سے ضرب دیتے ہیں ۔ تب تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت}\,\text{و}^{-\text{مہ سا}} = \text{گ} + \int \text{و}_1\,\text{ر}\,(\text{جب سا} - \text{مہ جم سا})\,\text{و}^{-\text{مہ سا}}\,\text{فرسا}$$

چونکہ ہمیں وہ منحنی جس پر رسی ساکن ہے معلوم ہے اس لئے ہم مذکورہ کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں اور بائیں طرف کے تکملہ کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں ۔

**۲۶۹** ۔ ایک یکساں انکھنچ رسی جس کا طول ل ہے انتہائی تناؤ کی حالت میں ایک ثابت کھردرے اسطوانہ پر جس کا محور افق کے متوازی اور جس کا نصف قطر

ا سے لٹک رہی ہے ثابت کرو کہ دو انتصابی حصوں میں سے بڑے حصہ کا طول ہے

$$\frac{ل - ۳ ا}{۱ + و^{مہ \pi}} + \frac{۲ مہ ا}{۱ + مہ^{۲}}$$

فرض کرو کہ بڑے اور چھوٹے حصے بالترتیب افقی قطر ا ب کے سروں ا اور ب سے لٹک رہے ہیں اور ان کے طول بالترتیب $ما_۱$ اور $ما_۲$ ہیں - نیز فرض کرو کہ حرکت ا سے ب کی طرف شروع ہونے والی ہے - تب اگر کسی نقطہ ن پر تناؤ ت ہو اور ان کے محاذی مرکز پر زاویہ ط بنتا ہو تو ہمیں دفعۂ ماقبل کے مطابق حاصل ہوتا ہے -

$$(ت + مف ت) جم مف ط - ت - مہ ر مف س - م ج جم ط مف س = ۰$$

اور $$(ت + مف ت) جب مف ط - ر مف س + م ج جب ط مف س = ۰$$

$$\therefore \frac{۱}{ا} \frac{فر ت}{فر ط} = مہ ر + م ج جم ط$$

اور $$\frac{ت}{ا} = ر - م ج جب ط$$

اس لئے $$\frac{فر ت}{فر ط} - مہ ت = م ج ا (جم ط + مہ جب ط)$$

$$\therefore ت و^{-مہ ط} = م ج ا \int (جم ط + مہ جب ط) و^{-مہ ط} فر ط$$

$$= م ج ا و^{-مہ ط} \left[ \frac{(۱ - مہ^{۲}) جب ط - ۲ مہ جم ط}{۱ + مہ^{۲}} \right] + گ$$

اگر ط = ۰ تو $ت = م ج ما_۱$ اور اگر $ط = \pi$ تو $ت = م ج ما_۲$

$$\therefore م ج ما_۱ = - م ج ا \frac{۲ مہ}{۱ + مہ^{۲}} + گ$$

اور    م ج ما۲ × و^(-مہ π) = م ج ا ۲مہ / (۱ + مہ۲) و^(-مہ π) + گ

اس لیئے   ما۲ و^(-مہ π) − ما۱ = ۲مہ ا / (۱ + مہ۲) (۱ + و^(-مہ π))

نیز    ما۱ + ما۲ + π ا = ل

لہذا نتیجہ مطلوبہ حاصل ہوتا ہے۔

# مثالیں

۱ ــ ایک واحد قابل حرکت چرخی جس کا وزن و ہے طاقت ق کے ذریعہ جو ایک ہلکی رسی کے ایک سرے پر لگائی گئی ہے ساکن ہے۔ رسی کو چرخی کے نیچے سے گزار کر ایک ثابت نقطہ کے ساتھ باندھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر رسی کے اس حصہ کے محاذی جو چرخی سے مس کرتا ہے مرکز پر زاویہ فہ بنے تو ق۲ (۱ − ۲ و^(مہ فہ) جم فہ + و^(۲مہ فہ)) = و۲

۲ ــ ایک ہلکی رسی دو کھردری میخوں ا اور ب پر سے گزاری گئی ہے جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں جن کا درمیانی فاصلہ ۲ ا ہے۔ رسی کے سروں کو ایک وزن ج کے ساتھ باندھا گیا ہے۔ انتہائی تعادل کی حالت میں ا ب کے محاذی ج پر زاویہ قائمہ بنتا ہے ثابت کرو کہ ج کا افقی فاصلہ ا ب کے وسطی نقطہ سے ا مسز (۳ − مہ π/۲) ہے جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے۔

۳ ــ ایک وزنی ذرہ ایک ہلکی انکھنچ رسی کے حلقہ کے ساتھ بندھا ہے اور رسی کا یہ حلقہ ایک انتصابی سطح مستوی میں ایک ثابت کھردری چرخی پر سے گزرتا ہے۔ اگر رسی کے سیدھے حصے ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ ع بنائیں تو ثابت کرو کہ انتہائی تعادل کے لیئے سمت انتصابی کے ساتھ ان کے میلان مستا جب ع / (جم ع + و^(± مہ (ع + π))) ہیں۔

۴ ــ ایک انتصابی سطح میں چار گول کھردری کھونٹیاں اس طرح لگائی گئی ہیں کہ ان سے ایسا مربع بنتا ہے جس کے اضلاع افقی اور انتصابی ہیں۔ ان میخوں میں سے ہر ایک میخ پر سے ایک رسی گزرتی ہے جس کے ایک سرے سے وزن و بندھا ہے اور

رسیوں کے دوسرے سروں کو ایک دوسرے کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا وزن جو اس گرہ کے ساتھ باندھا جا سکتا ہے تاکہ یہ گرہ مربع کے مرکز پر رہے ۲√۲ و $و^{\frac{\text{مہ π}}{۴}}$ جبز $\frac{\text{مہ π}}{۲}$ ہے ۔

۵ ـــ تین مساوی طور پر کھردری میخیں ا ، ب ، ج جن کی تراشیں گول اور مساوی ہیں ایک ایسے مساوی الاضلاع مثلث ا ب ج کے کونوں پر لگی ہیں کہ ب ج افقی خط ہے اور ا اس کے اوپر ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر ایک رسی کے ایک سرے سے وزن و باندھ کر رسی کو ان میخوں پر سے گزارا جائے تو رسی کے دوسرے سرے سے زیادہ سے زیادہ وزن و $و^{\text{۵ مہ π}}$ سہارا جا سکتا ہے جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے ۔

۶ ـــ ایک دائرہ ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح ساکن ہے کہ یہ ایک رسی کی وجہ سے کامل طور پر کھردری انتصابی دیوار کو دبا رہا ہے رسی کا ایک سرا دیوار کے ایسے نقطہ سے جو دائرہ کے اوپر ہے بندھا ہے ۔ اور دوسرے سرے سے وزن ق لٹک رہا ہے ۔ رسی اور دائرہ کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے ۔ اگر دائرہ کا وزن و ہو اور رسی اور دیوار کے درمیان زاویہ ط بنے تو ثابت کرو کہ جب دائرہ پھسلنے کے عین قریب ہو تو

$$ق\,(۱ + \text{جم}\,ط)\, و^{\text{مہ}\,ط} = و + ۲\,ق$$

۷ ـــ ایک بے وزن رسی ایک ہی سطح مستوی میں ایک کھردرے کرہ پر تنی ہوئی ہے ۔ کرہ کا نصف قطر ا ہے ۔ ثابت کرو کہ سطح مستوی کا فاصلہ مرکز سے ا جب د سے زیادہ نہیں ہو سکتا ۔ جہاں د رگڑ کا زاویہ ہے ۔

۸ ـــ اگر ایک وزنی یکساں رسی ایک ہی انتصابی مستوی میں بہت سے چکنے منحنیوں کے گرد گزرتی ہو اور اس کے سرے آزادانہ لٹکتے ہوں تو ثابت کرو کہ یہ سرے ایک ہی افقی خط میں واقع ہونگے ۔

۹ ـــ ایک یکساں وزنی رسی ایک چکنے مکافی پر جس کا محور انتصابی اور راس اوپر کی طرف ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کے سرے وتر خاص کے سروں پر ہیں

ثابت کرو کہ اس نقطہ پر جس پر مماس افق کے ساتھ زاویہ فہ بناتا ہے منحنی پر دباؤ $\frac{\text{و}}{۲}(\text{۲ جم}^{۳}\text{ فہ} + \text{جم فہ})$ ہوگا جہاں و رسی کے اکائی طول کا وزن ہے۔

۱۰— ایک کھردرے دائرہ پر جو انتصاباً ثابت ہے ایک رسی پڑی ہے جس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاویہ فہ بنتا ہے۔ اگر رسی پھسلنے کے عین قریب ہو تو ثابت کرو کہ اس کے اوپر والے سرے کا دائرہ کے بالاتر نقطے سے زاوئی فاصلہ ع، مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{جم}(\text{ع} + \text{یہ} - ۲\,\text{د})}{\text{جم}(\text{ع} - ۲\,\text{د})} = \text{و}^{\text{یہ س د}}$$

جہاں د رگڑ کا زاویہ ہے اور ع اس سمت میں ناپا گیا ہے جس میں رسی پھسلتی ہے۔

۱۱— ایک یکساں وزندار رسی ایک ایسے کھردرے انتصابی دائرہ کی اوپر کی سطح پر ساکن ہے جس کا نصف قطر ا ہے رسی کے سرے آزادانہ لٹک رہے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر رسی کا ایک سرا دائرہ کے سب سے اوپر کے نقطہ پر ہو تو بڑے سے بڑا طول جو آزادانہ لٹک سکتا ہے $\frac{۲\,\text{مہ ا} + (\text{مہ}^{۲} - ۱)\,\text{ا و}^{\text{مہ}\frac{\pi}{۲}}}{\text{مہ}^{۲} + ۱}$ ہے۔

۱۲— ایک وزنی زنجیر کا طول ل ہے۔ اس کا کچھ حصہ ایک کھردرے میز پر پڑا ہے اور باقی حصہ اس کے چکنے کنارہ پر گذر کر جو نصف قطر ا کے ایک اسطوانہ کی شکل کا ہے آزادانہ نیچے لٹک رہا ہے اگر میز اور رسی کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہو تو ثابت کرو کہ میز پر چھوٹے سے چھوٹا طول ہے

$$\frac{۱}{\text{مہ} + ۱}\left[\text{ل} - \frac{\pi\,\text{ا}}{۲} + \text{ا}\right]$$

۱۳— ایک وزنی یکساں زنجیر ایک کھردرے خط تدویر پر پڑی ہے جس کا محور انتصابی اور رأس اوپر کی طرف ہے۔ زنجیر کا ایک سرا راس پر اور دوسرا قرن پر ہے اگر تعادل انتہائی ہو تو ثابت کرو کہ $(۱ + \text{مہ}^{۲})\,\text{و}^{\text{مہ}\frac{\pi}{۲}} = ۳$

۱۴- ایک وزنی یکساں رسی ایک کھردرے زنجیرہ پر پڑی ہے جس کا محور انتصابی ہے اور راس اوپر کی طرف ہے۔ رگڑ کی قدر و$^{-\pi}$ = ۴ سے معلوم ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر رسی کا ایک سرا زنجیرہ کے راس پر ہو اور رسی انتہائی تعادل کی حالت میں ہو تو اس کا طول زنجیرہ کے مبدل کے مساوی ہوگا۔

۱۵- ایک رسی ایک کھردرے نصف دائرہ پر ساکن ہے اور اس پر ایک مستقل کشش کی قوت اس کے ایک سرے کی طرف عمل کرتی ہے اور رگڑ حرکت کو روکنے کے لئے عین کافی ہے۔ ثابت کرو کہ رگڑ کی قدر و$^{-\pi}$ = $\frac{۳ مہ}{۱-۲مہ^{۲}}$ سے حاصل ہوتی ہے۔

۱۶- ایک انکھنچ رسی جس کا طول ۲ل ہے دو مساوی چکنی مستدیر چرخیوں پر سے گزرتی ہے جن کے مرکز ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ ۲ ب ہے۔ اگر چرخیوں کا نصف قطر ا ہو اور ایک چرخی سے رسی کا جو حصہ مس کرتا ہے اس کے محاذی مرکز پر زاویہ فہ بنے تو ثابت کرو کہ ب + ا جم فہ

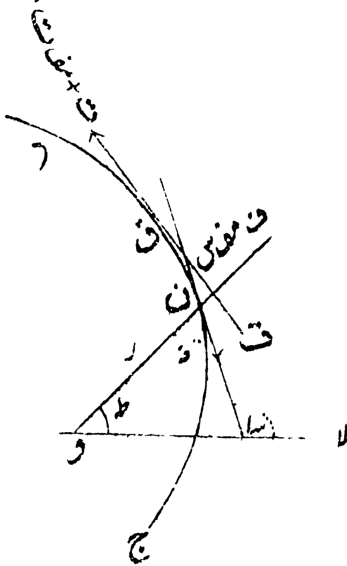
= مم $\frac{فہ}{۲}$ ( ا جب فہ + ل - ا فہ ) لوک مس $\frac{فہ}{۲}$

۱۷- ایک رسی جس کا طول ل ہے دو چھوٹی کھردری میخوں پر جو ایک دوسرے سے ۲ ا فاصلہ پر ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں لٹک رہی ہے۔ اگر رسی کا ایک آزاد سرا دوسرے سرے سے اتنا نیچے ہو جتنا ممکن ہے تو میخ پر مماس کی سمت کا میلان طہ سمت انتصابی کے ساتھ مساوات $\frac{ل}{۲ا}$ جب طہ لوک مم $\frac{طہ}{۲}$ = جم طہ + جمز { مہ (π - طہ) } سے حاصل ہوتا ہے۔

نیز ثابت کرو کہ انتصابی حصوں کے طولوں کی نسبت و$^{مہ\pi}$ : و$^{۲مہطہ}$ ہے اور میخوں کے درمیان رسی کا حصہ ۲ ا مم طہ + لوک مم $\frac{طہ}{۲}$ ہے۔

۲۷۰- **مرکزی قوتیں**۔ ایک انکھنچ رسی ایک سطح مستوی میں ایسی قوتوں کے

زیرِ عمل تعادل میں ہے جو رسی کے ہر جزو پر ایک معلومہ نقطہ و سے اس جزو کے فاصلہ کے کسی تفاعل کے متناسب ہیں اور و کی طرف یا و سے باہر کی طرف عمل کرتی ہیں۔ تعادل کا منحنی معلوم کرو۔




فرض کرو کہ ن ق رسی کا کوئی جزو مف س ہے جہاں قوس ج ن کے طول س کو منحنی پر کے کسی نقطہ ج سے ناپا گیا ہے۔ نیز فرض کرو کہ ن اور ق پر کے تناؤ بالترتیب ت اور ت + مف ت ہیں اور ن اور ق پر کے مماس ایک ثابت خط و لا کے ساتھ جو زاویے بناتے ہیں وہ بالترتیب سا اور سا + مف سا ہیں۔

فرض کرو کہ ن پر جو قوت عمل کرتی ہے وہ فی اکائی طول ف کے مساوی ہے یعنی ف = ایک کوئی تفاعل = فا (ر)۔ پس و سے قوس ن ق کے مختلف نقطوں پر عمل کرنے والی قوتوں کو ف × مف س کے مساوی سمجھا جا سکتا ہے جو و ن کی سمت میں عمل کرتی ہے کیونکہ انتہا میں ہم مف س کو بہت چھوٹا فرض کریں گے۔ جزو ن ق پر عمل کرنے والی قوتوں کو مماس اور عماد کی سمتوں میں تحلیل کرنے سے

(ت + مف ت) جم مف سا - ت + ف × م مف س جم فہ = ۰ . . . . (۱)

(ت + مف ت) جب مف سا - ف م مف س جب فہ = ۰ . . . (۲)

جہاں م کمیت ہے رسی کی فی اکائی طول

جم مف سا = ۱ اور جب مف سا = مف سا رکھنے سے اور مف سا کو لا انتہا چھوٹا لینے سے ان مساواتوں سے انتہا میں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} = - \text{ف م جم فہ} = - \text{ف م} \frac{\text{فرر}}{\text{فرس}} \quad \text{" " " "} \quad (۳)$$

اور $\text{ت} = \text{ف م} \times \text{ا} \times \text{جب فہ} = \text{ف م} \times \text{ر} \frac{\text{فرر}}{\text{فرع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ر}} = \text{ف} \times \text{م} \times \text{ع} \frac{\text{فرر}}{\text{فرع}} \quad (۴)$

جہاں ع عمود ہے و سے ن پر کے مماس پر اور ا نصف قطر انحنا ہے

(۳) سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{ت} = - \text{م ف فرر} + \text{ھ} \quad \text{" " " " " " "} \quad (۵)$$

اور (۳) اور (۴) کو حل کرنے سے

$$\frac{\text{فرت}}{\text{ت}} = - \frac{\text{فرع}}{\text{ع}}$$

اور اس لئے $\text{ت} \times \text{ع} = \text{مستقل} = \text{ب}$ " " " " " (۶)

رسی کے کسی محدود حصہ کے تعادل پر غور کرنے سے مساوات (۶) بآسانی حاصل ہوسکتی تھی نقطہ و کے گرد ج ن پر عمل کرنے والی سب قوتوں کا معیار اثر و کے گرد لینے سے ظاہر ہے کہ مرکزی قوتیں سب کی سب نقطہ و میں سے گزرتی ہیں اور اس لئے ان کا کوئی معیار اثر و کے گرد نہیں ہے۔ اس لئے و کے گرد ن اور ج پر کے تناؤں کے معیار اثر مساوی ہیں۔ اس لئے

$$\text{ت} \times \text{ع} = \text{ت}_{\text{ب}} \times \text{ع}_{\text{ج}} = \text{مستقل} \quad \text{" " " "} \quad (۷)$$

جہاں $\text{ت}_{\text{ب}}$ تناؤ ہے ج پر اور $\text{ع}_{\text{ج}}$ عمود ہے و سے ج پر کے مماس پر۔ مساوات (۶) اور (۷) سے تعادل کی سب شرائط حاصل ہوتی ہیں، اولاً فرض کرو کہ قوت ف معلوم ہے، تب (۵) سے ت حاصل ہوتا ہے اور (۶) میں درج کرنے سے ہمیں ع اور ر کا رشتہ یعنی منحنی کی مساوات ملتی ہے

نیز چونکہ $\frac{1}{\text{ع}^2} = \frac{1}{\text{ر}^2} + \frac{1}{\text{ر}^4} \left( \frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}} \right)^2$

ع کو ان دو رشتوں میں سے ساقط کرنے سے ہمیں منحنی کی مساوات (ر، طہ) میں حاصل ہوتی ہے۔

اس جواب میں تین اختیاری مستقل ہونگے۔ ان میں سے دو رسّی کے سروں کے محدد معلوم ہونے سے اور باقی ایک ان سروں کے درمیان رسی کا طول معلوم ہونے کی بنا پر معلوم ہو سکتے ہیں۔

اب فرض کرو کہ رسی کی شکل دی ہوئی ہے گویا ہمیں منحنی کے ع اور ر کا رشتہ معلوم ہے تب مساوات (۶) سے ہمیں ت کی قیمت ر کی رقوم میں ملتی ہے اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے $\text{ف} = -\frac{1}{\text{م}} \frac{\text{دت}}{\text{در}}$ جس سے ف کی قیمت ر کی رقوم میں ملتی ہے۔

**۲۷۱۔ مشق ۱** ۔ ایک رسی کے ہر جزو پر قوت مبدا سے $\frac{1}{\text{ر}^{\frac{5}{2}}}$ کے متناسب عمل کرتی ہے اور ر فاصلہ ہے مبدا سے کسی جزو کا۔ ثابت کرو کہ بحالت سکون رسی قلب کی شکل میں ہوگی۔

قلب کی مساوات ہے $\text{ر} = \text{ا}\,(1 + \text{جم طہ})$

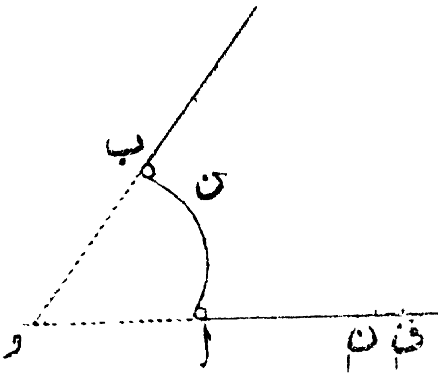
اس لئے $\frac{1}{\text{ع}^2} = \frac{1}{\text{ر}^2} + \frac{1}{\text{ر}^4}\left(\frac{\text{در}}{\text{دطہ}}\right)^2 = \frac{1}{\text{ر}^2} + \frac{1}{\text{ر}^4}\,\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{طہ}$

$$= \frac{1}{\text{ر}^4}\left[\text{ر}^2 + \text{ا}^2 - (\text{ر} - \text{ا})^2\right] = \frac{2\text{ا}}{\text{ر}^3}$$

اس لئے مساوات (۶) سے حاصل ہوتا ہے $\text{ت} = \text{ب} \times \sqrt{\frac{2\text{ا}}{\text{ر}^3}} = \text{مہ}\,\text{ر}^{-\frac{3}{2}}$

تب مساوات (۳) سے $\text{ف} = -\frac{1}{\text{م}} \times \frac{\text{دت}}{\text{در}} = \frac{3\text{مہ}}{2\text{م}} \times \text{ر}^{-\frac{5}{2}}$

**مشق ۲**۔ ایک لا متناہی رسّی دو چھوٹے چکنے حلقوں ا اور ب میں سے گذرتی ہے اور اس کے ہر جزو پر جو قوت عمل کرتی ہے وہ ایک ثابت نقطہ و سے باہر کی طرف عمل کرتی ہے اور و سے اس جزو کے فاصلہ کے مکعب کے بالعکس بدلتی ہے۔ ثابت کرو کہ حلقوں کے درمیان رسی کا جو حصہ ہے وہ دائرہ کی قوس کی شکل کا ہے۔




فرض کرو کہ رسی کے سیدھے حصہ کے کسی نقطہ ن۱ پر تناؤ جس کا فاصلہ مرکز و سے لا ہے ت۱ ہے۔

تب $(\text{لت}_{1} + \text{مف}\,\text{ت}_{1})$

$$+ \frac{\text{مم}}{\text{لا}^{3}}\,\text{مف}\,\text{لا} - \text{ت}_{1} = ۰$$

جس سے حاصل ہوتا ہے $\dfrac{\text{فرت}_{1}}{\text{فرلا}} = \dfrac{-\text{مم}}{\text{لا}^{3}}$

اور $\therefore\ \text{ت}_{1} = \dfrac{\text{مم}}{۲\,\text{لا}^{2}} + \text{ک}$ . . . . . . . (۱)

چونکہ صریحاً لاتناہی پر رسی کا تناؤ صفر ہونا چاہیئے $\therefore\ \text{ک} = ۰$

اس لئے اگر و ا = ا۱ تو ا پر تناؤ $\dfrac{\text{مم}}{۲\,\text{ا}_{1}^{2}}$ ہوگا۔ اب چونکہ رسی ا پر ایک چکنے حلقہ میں سے گذرتی ہے اس لئے ا پر اس کے تناؤ میں تبدیلی نہیں ہوتی اس لئے ا پر کے منحنی حصہ پر بھی اس کا تناؤ $\dfrac{\text{مم}}{۲\,\text{ا}_{1}^{2}}$ ہے۔

منحنی حصہ کے لئے دفعہ گزشتہ کی مساوات (۵) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت} = -\int \frac{\text{مم}}{\text{ر}^{3}}\,\text{فر} = \frac{\text{مم}}{۲\,\text{ر}^{2}} + \text{م}$$

نیز جب ر = ا۱ تو $\text{ت} = \dfrac{\text{مم}}{۲\,\text{ا}_{1}^{2}}$ جس سے م = ۰

تب مساوات (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{ع}} = \frac{\text{مم}}{۲\,\text{ر}^{2} \times \text{ب}} = \frac{\text{ل}}{\text{ر}^{2}}$$ جہاں ل کوئی مستقل ہے

$$\therefore\ \frac{1}{\text{ر}^{2}} + \frac{1}{\text{ر}^{4}}\left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرط}}\right)^{2} = \frac{1}{\text{ع}^{2}} = \frac{\text{ل}^{2}}{\text{ر}^{4}}$$

$$\therefore \quad ط = \int \frac{ل\,ف ر}{ر\sqrt{ل^2 - ر^2}} = جب^{-1}\frac{ر}{ل} + ج$$

$\therefore$ $ر = ل\,جب\,(ط - ج)$ جو دائرہ کی مساوات ہے۔

اگر ابتدائی خط وا ہو اور وب = ب، اور $\angle$ اوب = ع تو

دو نقطے (ا، ۰) اور (ب، ع) منحنی پر ہیں اس لئے مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$ر = ا\,جم\,ط + \frac{ب - ا\,جم\,ع}{جب\,ع}\,جب\,ط$$

# مثالیں

اگر سیال قطب سے مرکزی قوت ف کے زیر عمل ذیل کے منحنیوں کی شکلیں اختیار کریں تو قوت کا قانون معلوم کرو۔

۱ - مکافی جس کا ماسکہ قطب ہے [$ف \propto ر^{-2}$]

۲ - مساوی الزوایا لولبی $ر = ا\,و^{ط\,جم\,ع}$ [$ف \propto ر^{-3}$]

۳ - قائم زائد جس کا مرکز قطب [ف مستقل اور جاذبی]

۴ - اٹیرن $ر^2 = ا^2\,جم\,۲ط$ [$ف \propto ر^{-7}$]

۵ - $ر^ن\,جم\,ن\,ط = ا^ن$ [$ف \propto ر^{ن-2}$ اور جاذبی اگر ن $>$ ۱ ہو]

۶ - اگر چند مرکزی قوتوں کے زیر عمل رسی تعادل میں ہو تو رسی کے کسی جزو ن ف پر حاصل تعامل وط کی سمت میں ہوگا جہاں و قوت کا مرکز ہے اور ط نقطہ تقاطع ہے ن اور ق پر کے مماسوں کا۔

۷ - ایک متجانس رسی ایک ایسی مرکزی اندفاعی قوت کے زیر عمل ساکن ہے جو فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے۔ ثابت کرو کہ رسی کی شکل ان دو منحنیوں میں سے ایک ہے

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + \text{قطاعہ جم (طجب عہ)} \qquad \text{یا} \qquad \frac{ل}{ر} = ۱ + \text{قطاعہ جمز (طجبز عہ)}$$

۸ — ایک رسی کا طول لامتناہی ہے۔ اس کا ایک سرا ایک ثابت نقطہ و کے ساتھ بندھا ہے رسی ایک چھوٹے چکنے ثابت حلقہ میں سے گزر کر لامتناہی تک جاتی ہے اس پر مرکز و سے ایک اندفاعی قوت جو بالعکس متناسب ہے فاصلہ کی ن ویں قوت کے عمل کرتی ہے ثابت کرو کہ رسی کے منحنی حصہ کی مساوات ہے

$$ر^{ن-۲} = ا^{ن-۲} \text{ جم } (ن - ۲) ط$$

اگر ن = ۲ تو ثابت کرو کہ منحنی حصہ مساوی الزوایا لولبی ہے۔

۹ — ایک رسی ایک مرکزی اندفاعی قوت کے زیر عمل ایک مستوی منحنی کی شکل میں ساکن ہے اگر کسی نقطہ پر قوت انحنا کے متناسب ہو تو ثابت کرو کہ منحنی مکافی ہے۔

۲۷۳ — قابل کھنچاؤ رسیاں۔ قابل کھنچاؤ رسی کے تعادل کی مساواتیں باب ہذا کے گذشتہ حصہ کی طرح بنائی جاتی ہیں رسی کے کسی جزو کا اس جزو کے کھنچے ہوئے اور نہ کھنچے ہوئے طولوں کے درمیان رشتہ ہک کے کلیہ کے ذریعہ مرلوط ہوتا ہے۔ یہ بات قابل غور ہے کہ وزنی لچکدار رسی کی کثافت کھنچاؤ کے بعد یکساں نہیں رہتی خواہ وہ کھنچاؤ سے پہلے یکساں ہو۔

مثال ۳ — ایک یکساں قابل کھنچاؤ رسی کا وزن و اور طبعی طول ل ہے رسی کو ایک ثابت نقطہ سے لٹکایا گیا ہے اور اس کے دوسرے سرے سے وزن وَ لٹکایا گیا ہے۔ اگر لچک کی قدر لہ ہو تو ثابت کرو کہ رسی کا کل کھنچاؤ $\frac{ل}{لہ}\left[\frac{و}{۲} + وَ\right]$ ہوگا۔

فرض کرو کہ گہرائی لا اور لا + مف لا پر تناؤ ت اور ت + مف ت۔
نیز فرض کرو کہ اس حصہ کا غیر کھنچا ہوا طول لا اور کھنچا ہوا طول لا ہے۔
اس لئے اس حصہ کا وزن جس کا کھنچا ہوا طول مف لا ہے $\frac{و}{ل} \times$ مف لا ہوگا۔
اس جزو کے تعادل کے لئے

ت = ت + مف ت + و/ل × فرلا

یعنی فرت/فرلا. = − و/ل . . . . (۱)

نیز ہک کے کلیہ کی رو سے

ت = لہ (مف لا − مف لا.)/مف لا.

اس لئے فرلا/فرلا. = ۱ + ت/لہ . . (۲)

(۱) اور (۲) سے فر²لا/فرلا.² = − و/لہ ل

∴ فرلا/فرلا. = − و/لہ ل لا. + ا . . . . . (۳)

اب جب لا. = ل تو ت = وَ اور اس لئے (۲) سے

فرلا/فرلا. = ۱ + وَ/لہ

اس لئے (۳) سے ۱ + وَ/لہ = − و/لہ + ا

∴ فرلا/فرلا. = − و/لہ ل لا. + ۱ + (و + وَ)/لہ

∴ لا = − و/لہ ل × لا.²/۲ + (۱ + (و + وَ)/لہ) لا. . . (۴)

م م لا. ن. ق. مف لا. مف لا ن ق وَ

چونکہ لا اور لا. ایک ساتھ صفر ہوتے ہیں اس لئے تکمل کا مستقل صفر ہے۔
(۴) سے کسی بغیر کھنچے طول کے جواب میں کھنچا ہوا طول حاصل ہوتا ہے۔ اسلئے اگر لا. = ل

تو کل کھنچاؤ $= \frac{\text{و}}{\text{لہ ل}} \cdot \frac{\text{ل}^{۲}}{۲} + \frac{\text{وَ ل}}{\text{لہ}} = \frac{\text{ل}}{\text{لہ}}\left[\frac{\text{و}}{۲} + \text{وَ}\right]$

۲۷۴ – ایک وزنی یکساں لچکدار رسی جاذبۂ ارض کے زیر عمل معمولی زنجیرہ کی شکل میں لٹک رہی ہے اگر بن کھنچی رسی کا طول ج ہو اور اس کا وزن سب سے نچلے نقطہ پر سے تناؤ کے مساوی ہو اور اس تناؤ کو لچک کے مقیاس کے ساتھ نسبت ک ہو تو رسی کی شکل کی مساواتیں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ رسی پر ایک نقطہ (لا، ما) ایسا ہے جس کا قوسی فاصلہ سب سے نچلے نقطہ سے س ہے، فرض کرو کہ اس نقطہ پر تناؤ ت ہے۔ اگر قوس س کا طول بغیر کھنچاؤ کے س. ہو تو

$$\frac{\text{ت}}{\text{لہ}} = \frac{\text{فرس} - \text{فرس.}}{\text{فرس.}}$$

یعنی
$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرس.}} = ۱ + \frac{\text{ک}}{\text{و}_{۱}\,\text{ج}} \times \text{ت} \quad \ldots\ldots (۱)$$

جہاں $\text{و}_{۱}$ رسی کے بن کھنچے اکائی طول کا وزن ہے۔

تب دفعہ ۲۵۷ کی مساواتیں حسب ذیل ہو جاتی ہیں

$$-\text{ت}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \left\{\text{ت}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{ت}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\right)\text{مفس} + \ldots\right\} = ۰$$

$$-\text{ت}\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} + \left\{\text{ت}\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{ت}\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\right)\text{مفس} + \ldots\right\} = \text{و}_{۱}\,\text{مفس.}$$

یعنی
$$\frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{ت}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\right) = ۰ \quad \ldots\ldots (۲)$$

اور
$$\frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{ت}\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\right) = \text{و}_{۱}\frac{\text{فرس.}}{\text{فرس}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

ان سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \text{مستقل} = \text{و}_۱\,\text{ج}_۱$$

اور $\text{ت}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} = \text{و}_۱\,\text{س}_۰$ کیونکہ س اور $\text{س}_۰$ ایک ساتھ صفر ہوتے ہیں

ان کو مربع کر کے جمع کرنے سے $\text{ت} = \text{و}_۱\sqrt{\text{ج}_۱^۲ + \text{س}^۲}$

اس لئے (۱) سے $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}_۰} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\cdot\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}_۰} = \text{و}_۱\text{ج}_۱\left[\frac{۱}{\text{ت}} + \frac{\text{ک}}{\text{و}_۱\text{ج}_۱}\right] = \text{ک} + \frac{\text{ج}_۱}{\sqrt{\text{ج}_۱^۲ + \text{س}^۲}}$ ... (۴)

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}_۰} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\times\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}_۰} = \text{و}_۱\text{س}_۰\left[\frac{۱}{\text{ت}} + \frac{\text{ک}}{\text{و}_۱\text{ج}_۱}\right] = \frac{\text{ک}\,\text{س}}{\text{ج}_۱} + \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{ج}_۱^۲ + \text{س}^۲}}$ ... (۵)

اور مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}_۰} = ۱ + \frac{\text{ک}}{\text{ج}_۱}\times\sqrt{\text{ج}_۱^۲ + \text{س}^۲}$$

ان مساواتوں کو تکمیل کرنے سے

$$\text{لا} = \text{ک}\,\text{س} + \text{ج}_۱\,\text{لوک}\left[\frac{\text{س} + \sqrt{\text{س}^۲ + \text{ج}_۱^۲}}{\text{ج}_۱}\right] \quad ...... (۶)$$

$$\text{ما} = \text{ک}\,\frac{\text{س}^۲}{۲\,\text{ج}_۱} + \sqrt{\text{س}^۲ + \text{ج}_۱^۲} - \text{ج}_۱ \quad ...... (۷)$$

$$\text{اور}\ \text{س}_۰ = \text{س} + \frac{\text{ک}}{۲\,\text{ج}_۱}\left[\text{س}\sqrt{\text{ج}_۱^۲ + \text{س}^۲} + \text{ج}_۱^۲\,\text{لوک}\,\frac{\text{س} + \sqrt{\text{س}^۲ + \text{ج}_۱^۲}}{\text{ج}_۱}\right] \quad ... (۸)$$

اس مفروضہ پر کہ لا اور ما، س کے ساتھ صفر ہوتے ہیں۔

(۷) سے $\text{س}_۰$، ما کی رقوم میں اور پھر (۶) اور (۸) سے لا اور س، ما کے تفاعلات کے طور پر معلوم ہوتے ہیں۔

مساواتوں (۴) اور (۵) سے

$$\text{مس سا} = \frac{\text{فرنا}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{س}_1}{\text{ج}_1}$$

اور اس لئے (۸) سے

$$\text{س} = \text{ج}_1\,\text{مس سا} + \frac{\text{ک ج}_1}{2}\left[\text{قطسا} \times \text{مس سا} + \text{لوک}\,(\text{قطسا} + \text{مس سا})\right]$$

اگر ہم س = ج۱ جبز ء رکھیں تو مساواتیں (۶) و (۷) اور (۸) حسب ذیل ہو جاتی ہیں

$$\frac{\text{لا}}{\text{ج}_1} = \text{ء} + \text{ک جبز ء}$$

$$\frac{\text{ا}}{\text{ج}_1} + 1 + \frac{\text{ک}}{4} = \text{جبز ء} + \frac{\text{ک}}{4}\,\text{جبز}^2\,\text{ء}$$

اور
$$\frac{\text{س}}{\text{ج}_1} = \text{جبز ء} + \frac{\text{ک ء}}{2} + \frac{\text{ک}}{4}\,\text{جبز ۲ ء}$$

**۲۷۵ - مشق** - امتداد پذیر رسی کو بہت آہستہ آہستہ ایک پہیہ کے گرد لپیٹا جا رہا ہے پہیہ پھسلنے کے عمل کو روکنے کے لئے کافی کھردرا ہے۔ رسی کے دوسرے سرے کے ساتھ ایک وزن و بندھا ہے جو زمین پر پہیہ کے مرکز سے گہرائی ل پر ہے اس حالت میں رسی کا لٹکنے والا حصہ انتصابی ہے اور بغیر کھنچاؤ کے ہے۔ ثابت کرو کہ وزن کو زمین پر سے عین اٹھانے کے لئے پہیہ کو گھمانے میں جس قدر کام کرنا پڑتا ہے وہ

$$\text{ل و} - \text{ل لہ لوک}\left[1 + \frac{\text{و}}{\text{لہ}}\right]$$

ہے جہاں رسی کے وزن کو نظر انداز کیا گیا ہے۔

حرکت کے کسی آن میں فرض کرو کہ رسی کے انتصابی حصہ کا طول بغیر کھنچاؤ کے لا ہے اور اس کا تناؤ ت ہے۔ تب ہک کے کلیہ سے

$$\text{ت} = \text{لہ}\,\frac{\text{ل} - \text{لا}}{\text{لا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

اگر ل، ل + ا معنطہ ہو جائے جہاں ا پہیہ کا نصف قطر ہے اور معنطہ وہ زاویہ ہے

جس میں سے پہیہ کو گھمایا جائے تو

$$\text{ت} + \text{معف ت} = \text{ل} \frac{\text{ل} - \frac{\text{ل}}{\text{ل} + \text{ا معف ط}}\,\text{لا}}{\frac{\text{ل}}{\text{ل} + \text{ا معف ط}}\,\text{لا}} = \text{ل} \frac{\text{ل} + \text{ا معف ط} - \text{لا}}{\text{لا}}$$

جس سے معف ت = ل $\dfrac{\text{ا} \times \text{معف ط}}{\text{لا}}$

اس لیئے اس لا انتہا چھوٹے کھنچاؤ میں جو کام ہوتا ہے وہ

$$= \text{ت} \times \text{ا معف ط} = \frac{\text{ت} \times \text{لا} \times \text{معف ت}}{\text{ل}} = \frac{\text{ل ت} \times \text{معف ت}}{\text{ت} + \text{ل}}$$

اس لیئے وزن کے اوٹھ آنے تک کل کام جو انجام پذیر ہوتا ہے یعنی جبکہ ت مساوی ہو جاتا ہے و کے وہ

$$= \int_{\text{ب}}^{\text{و}} \frac{\text{ل ت} \times \text{فرت}}{\text{ت} + \text{ل}} = \text{ل} \left[\text{ت} - \text{ل لوک} (\text{ت} + \text{ل})\right]_{\text{ب}}^{\text{و}} = \text{ل و} - \text{ل ل لوک} \frac{\text{و} + \text{ل}}{\text{ل}}$$

# مثالیں

۱۔جب ایک یکساں لچکدار رسی ا ب جاذبۂ ارض کے زیر عمل لٹک رہی ہو تو ثابت کرو کہ رسی کا بالائی حصہ نچلے نصف کی نسبت دو چند کھنچ جاتا ہے۔

اگر اس پر کوئی نقطہ ن ایسا ہو کہ ا ن : ن ب = ۲√ - ۱ : ۱ تو ثابت کرو کہ اس سے اوپر والے اور نچلے حصوں کے کل کھنچاؤ مساوی ہوںگے۔

۲۔ ایک وزنی لچکدار رسی کا طبعی طول ۲ ل ہے۔ اگر اس کو ایک سرے سے آزادانہ لٹکایا جائے تو اس کا طول ۴ ل ہو جاتا ہے۔ یہ رسی ایک چکنے میز پر جس کی چوڑائی ۲ ا ہے اس طرح پڑی ہے کہ اس کے سرے نیچے لٹک رہے ہیں۔ رسی کا کل کھنچاؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ رسی کا جو حصہ میز سے مس کرتا ہے اس کا تناؤ رسی کے وزن کا

$\frac{۱}{۲}$ ر $\sqrt{\frac{ل - لہ}{ل}}$ گنا ہے۔

۳ — ایک لچکدار رسی جس کی کثافت بغیر کھنچاؤ کے یکساں اور جس کا طول ل ہے ابتداً ایک افقی سطح مستوی پر پڑی ہے۔ تب رسی کو اس کے ایک سرے سے اس کے ممدودہ طول کی سمت میں آہستہ آہستہ بڑھنے والی قوت کے ساتھ اس طرح کھینچا گیا ہے کہ اسراع ہمیشہ لا انتہا چھوٹا رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب قوت ف ہو تو رسی کا تناؤ $\frac{۱}{۲}$ ف$^{۲}$ $\frac{ل}{م و لہ}$ ہوگا جہاں و رسی کا وزن ہے، لہ لچک کی قدر ہے، م رگڑ کی قدر ہے اور ف > م و۔

۴ — ایک وزنی لچکدار رسی کا وزن و اور بغیر کھنچاؤ کے طول ج ہے۔ یہ ایک چکنی دوہری سطح مائل پر پڑی ہے جس کے رخوں کے میلان افق کے ساتھ بالترتیب عہ اور عہَ ہیں۔ ثابت کرو کہ رسی کا کل کھنچاؤ $\frac{و ج}{۲ لہ} \times \frac{جب عہ جب عہَ}{جب عہ + جب عہَ}$ ہے۔

۵ — ایک لچکدار رسی ایک کھردری سطح مائل پر پڑی ہے اور اس کا اوپر کا کنارہ سطح پر ثابت کر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا کھنچاؤ حدود $\frac{و ل}{۲ لہ} \times \frac{جب (عہ \pm ئہ)}{جم ئہ}$ کے اندر واقع ہوگا جہاں عہ سطح مائل کا میلان ہے ئہ رگڑ کا زاویہ ہے، و رسی کا وزن ہے اور لہ اس کی لچک کا مقیاس ہے۔

۶ — ا ب ایک لچکدار رسی ہے جس کا طبعی طول ۱۰ فٹ ہے۔ اس کی کمیت ۵ پونڈ ہے اور اس کی لچک کا مقیاس ۸۰ پونڈ وزن ہے۔ اس رسی کو اس کے ایک سرے ا سے لٹکایا گیا ہے اور اس کے دوسرے سرے ب سے ۱۰ پونڈ کمیت کا وزن باندھا گیا ہے۔ اگر اسے آہستہ آہستہ کھینچنے دیا جائے تو بتاؤ کہ اس کے آخری محل میں اس کا طول کیا ہوگا نیز ثابت کرو کہ وسطی نقطہ پر کثافت کھنچاؤ کے بعد ۳۲ : ۲۷ کی نسبت سے کم ہو جاتی ہے۔

۷ — اگر ایک یکساں لچکدار رسی کو ایک سرے سے ثابت کر دیا جائے اور اس کے ہر ایک

نقطہ ن پر ایک قوت ف اس کے طول کی سمت میں ایسی عمل کرے کہ ن پر کا تناؤ اس کے آزاد سرے سے اس کے فاصلہ کے متناسب ہو تو ثابت کرو کہ لک $\frac{ف_۱}{ف}$ (جہاں $ف_۱$ ثابت سرے پر ف کی قیمت ہے) بغیر کھنچاؤ کی صورت میں ثابت سرے سے ن کے فاصلہ کے متناسب ہوگا۔

۸ — ایک یکساں رسی جس کا وزن و اور لچک کا مقیاس لہ ہے تنی ہوئی حالت میں ایک کھردرے افقی میز پر جس کی رگڑ کی قدر مہ ہے پڑی ہے۔ اگر ہر نقطہ پر یہ سرکنے کے عین قریب ہو تو بتاؤ کہ اس کا کھنچا ہوا طول اس کے بن کھنچے طول کا $\left(۱ + \frac{مہ\ و}{۴\ لہ}\right)$ گنا ہے۔

۹ — ایک یکساں وزنی لچکدار رسی کو جس کا طبعی طول ۲ ا ہے اس قدر کھینچا گیا ہے جتنا کہ ممکن ہے اور یہ انتہائی تعادل کی حالت میں ایک کھردری سطح مائل پر پڑی ہے۔ ثابت کرو کہ رگڑ کی سمت رسی کے اس نقطہ پر بدل جاتی ہے جس کا طبعی فاصلہ اوپر کے سرے سے ا [۱ + مس ع مم د] ہے جہاں د رگڑ کا زاویہ ہے اور ع سطح کا میلان ہے افق کے ساتھ۔

۱۰ — ایک یکساں شہتیر جس کا طول ل ہے ایک سطح مائل کے خط میلان اعظم پر پڑا ہے۔ سطح مائل کا میلان افق کے ساتھ ع ہے۔ شہتیر تپش کے اضافہ کے زیر اثر پھیلتا اور پھر ٹھنڈا ہو کر سکڑتا ہے۔ بتاؤ کہ شہتیر کے کون سے نقطے ان دونوں عملوں کے اثناء میں ثابت رہتے ہیں نیز ثابت کرو کہ فی الجملہ کل شہتیر سطح مائل پر لہ ل مس ع مم د فاصلہ نیچے اتر آتا ہے جہاں تپش کے انتہائی تغیر کے لئے طول میں فی اکائی طول لہ کا اضافہ ہے اور د رگڑ کا زاویہ ہے۔

۱۱ — ایک لچک دار رسی کا طبعی طول ا اور وزن م ج ا ہے۔ اس رسی کا ایک سرا ایک چکنے افقی میز کے ایک نقطہ کے ساتھ بندھا ہے اور یہ میز پر یکساں زاوئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہی ہے۔ ثابت کرو کہ کھنچا ہوا طول

$\frac{۱}{سہ}\left(\frac{لہ}{م}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ مس $\left\{سہ\ ا \left(\frac{م}{لہ}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right\}$ ہے جہاں لہ لچک کا مقیاس ہے۔

۱۲۔ ایک ہلکا لچکدار بند ہے جس کا طول بغیر کھنچاؤ کے ۲ ﺍ ہے۔ اس کو چار کھوری چار میخوں
ا، ب، ج، د کے گرد جو ایک ایسے مربع کے کونوں پر لگی ہیں جس کا ہر ضلع ﺍ ہے
لپیٹا گیا ہے۔ اگر اس کو ا اور ب کے درمیان کسی نقطہ ن پر پکڑ لیا جائے اور
ا ب کی سمت میں کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ بند ا اور ب کے گرد وقت واحد
میں پھسلنے لگے گا اگر $\frac{\text{ان}}{\text{ن ب}} = \text{و}^{\frac{\text{مـ}\pi}{2}}$

۱۳۔ ایک وزن ن ایک دوسرے وزن ق کو ایک ہلکی لچکدار رسی کے ذریعہ تھامے
ہوئے ہے جو کہ ایک کھردرے مستدیر اسطوانے پر سے گزرتی ہے جس کا محور افقی ہے۔
ثابت کرو کہ رسی کے اُس حصہ کا کھنچاؤ جو اسطوانہ سے مس کرتا ہے
$\frac{\text{ا}}{\text{مـ}}$ لوگ $\frac{\text{ق}+\text{لہ}}{\text{ن}+\text{لہ}}$ ہے جہاں ا اسطوانہ کا نصف قطر ہے، مـ رگڑ کی قدر ہے اور لہ
لچک کا مقیاس ہے۔

۱۴۔ ایک لکڑی ایک ہلکے لچکدار تار کے ذریعہ چھت سے لٹک رہی ہے تار کا مقیاس
لکڑی کے وزن کے نصف کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ چھت تک چڑھنے میں لکڑی
جو کام کرتی ہے وہ اس کام سے ایک تہائی کم ہے جو تار کے بے لچک ہونے کی صورت
میں لکڑی کو کرنا پڑتا۔

۱۵۔ ایک وزنی لچکدار رسی کا طبعی طول ل اور کمیت مـ ل ہے۔ رسی کو ڈھیلے طور
پر لپیٹ کر ایک افقی میز پر رکھا گیا ہے۔ اگر رسی کے ایک سرے کو آہستہ سے انتہاءً اتنا
اوپر اٹھایا جائے کہ کل رسی ٹھیک کر میز سے عین اوپر اٹھ آئے تو ثابت کرو کہ ایسا کرنے
میں $\frac{1}{2}$ مـ ج ل$^{2}$ $\left[1 + \frac{2}{3} \; \text{مـ ج} \; \frac{\text{ل}}{\text{لہ}}\right]$
کام کرنا پڑے گا جہاں لہ رسی کی لچک کا مقیاس ہے۔

[ جب رسی کا ایک سرا فاصلہ لا اوپر اٹھ آئے اور اگر رسی کا لا طول بن کھنچی
حالت میں لا طول کے مساوی ہو تو دفعہ ۳، ۲ کی رو سے لا = لا + $\frac{\text{مـ ج}}{2\,\text{لہ}}$ لا$^{2}$ نیز اوپر
کے سرے پر کا تناؤ ت = مـ ج لا؛ پس طول کے لا سے لا + سف لا ہو جانے

میں جو کام ہوتا ہے وہ = $\int$ مف لا = مہ ج لا $\left[1 + \frac{\text{مہ ج}}{\text{لہ}} \text{لا}\right]$ مف لا - اس کو حدود

صفر اور ل کے اندر تکمل کرنے سے ہمیں نتیجہ بالا حاصل ہوتا ہے]

۱۶ — ایک یکساں لچکدار رسی ایک افقی سطح مستوی پر اپنی طبعی حالت میں ساکن ہے اور اس کا ایک سرا کنارہ کے ساتھ بندھا ہے - اگر رسی کو اس نقطہ سے آزادانہ لٹکنے دیا جائے تو ثابت کرو کہ تجاذبی توانائی بالقوہ میں

$\frac{1}{2}$ و ا + $\frac{1}{2} \frac{\text{و}^2 \text{ا}}{\text{لہ}}$ کی کمی واقع ہوگی جہاں و رسی کا وزن ہے، ا اس کا طبعی طول ہے اور لہ ہک کا مقیاس ہے -

# رسیوں اور زنجیروں پر متفرق مثالیں

(۱) ایک رسی کا طول ل اور وزن و ل ہے - اس کے وسطی نقطہ ج کے ساتھ ایک حلقہ بندھا ہے جس کا وزن و ب ہے - رسی دو چکنی میخوں پر جو ایک ہی خط افقی میں واقع ہیں اس طرح متشاکلاً لٹک رہی ہے کہ رسی کے سرے انتصاباً لٹک رہے ہیں ثابت کرو کہ زنجیرہ کا معدل ج ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ب} + \text{ل} - \text{و}^{\frac{\text{ب}}{\text{ج}}} \left[\text{ب} + \sqrt{\text{ج}^2 + \text{ب}^2}\right]$$

جہاں ۲ ا میخوں کا درمیانی فاصلہ ہے اور ل کی کم سے کم قیمت جس کے لئے تعادل ممکن ہے اس وقت ہوتی ہے جبکہ $\frac{1}{(\text{ج} - \text{ا})^2} - \frac{1}{\text{ج}^2} = \frac{2}{\text{ب}^2}$

نیز ثابت کرو کہ ج پر کا مماس سمت انتصابی سے ساتھ جو زاویہ طہ بناتا ہے وہ مساوات

$$\text{ب مس طہ لوک} \left(\frac{\text{ل} + \text{ب}}{\text{ب}} \times \frac{\text{جم طہ}}{1 + \text{جم طہ}}\right) = 2 \text{ ا}$$

سے حاصل ہوتا ہے اور اس لئے اس کی بڑی سے بڑی قیمت جم$^{-1}$ $\frac{\text{ب}}{\text{ل}}$ ہے کیوں کہ

ا منفی نہیں ہو سکتا۔

۲ — ایک مڑ سکنے والی رسی کا طول ۲ ل اور خطی کثافت ثہ ہے، اس کے وسطی نقطہ کے ساتھ کمیت ۲ ثہ × کَ کا ایک وزنی منکا بندھا ہے۔ رسی کے سرے دو ثابت نقطوں کے ساتھ بندھے ہیں جن کا درمیانی فاصلہ ۲ ک ہے جو ۲ ل سے ذرا سا کم ہے ثابت کرو کہ رسی کے کسی نصف کے زنجیرہ کا مبدل تقریباً $\text{ک}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\text{(۳ ک کَ + کَ}^{۲}\text{ + ۳ کَ}^{۲}\text{)}}{\text{۶ (ل - ک)}} \right\}^{\frac{1}{2}}$ ہے۔

۳ — دو چکنے مستدیر اسطوانے ہیں جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر ا ہے ان کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ ان کے محور ایک دوسرے کے متوازی ایک ہی افقی سطح میں واقع ہیں اور ایک دوسرے سے فاصلہ ۲ ب ( > ۲ ا ) پر ہیں۔ ایک رسی اسطوانوں پر متشاکلاً رکھی گئی ہے اور رسی کے سرے انتصاباً لٹک رہے ہیں۔ ثابت کرو کہ رسی کا چھوٹے سے چھوٹا ممکن طول $\text{۲ ب د + ۲ ا (۲ مس}^{-1}\text{ د - د)}$ ہے جہاں د رگڑ کی قدر ہے۔ (دفعہ ۲۶۹ کی سولہویں مشق کے نتیجے کو استعمال کرو)

۴ — ایک سلاخ کو جس کا طول ۲ ب ہے دو وزنی رسیوں کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے جو ایک طرف اس کے سروں کے ساتھ اور دوسری طرف دو ثابت نقطوں کے ساتھ بندھی ہیں ثابت نقطوں کا درمیانی فاصلہ ۲ (ا + ب) ہے۔ سلاخ کا محل متوازی الافق ہے اور دونوں ثابت نقطے سلاخ کے اوپر بلندی ا پر واقع ہیں۔ اگر ہر ایک رسی کا طول ل ہو تو ثابت کرو کہ سلاخ کا تناؤ رسی کے ایک ایسے ٹکڑے کے وزن کے مساوی ہوگا جس کا طول ج مساوات $\text{ل}^{۲} = \text{ا}^{۲} + \text{۴ ج}^{۲} \text{ جبز}^{۲} \frac{\text{ا}}{\text{۲ ج}}$ سے حاصل ہوتا ہے۔

۵ — ایک سلاخ کا طول ۲ ا ہے اس کے سرے ایک وزنی رسی کے سروں کے ساتھ بندھے ہیں جسکا طول ۲ ل ہے۔ اس رسی کے ذریعہ سلاخ ایک میخ پر متشاکلاً لٹک رہی ہے۔ سلاخ کا وزن رسی کے وزن کا ن گنا ہے اور افقی تناؤ $\frac{\text{م}}{\text{۲}}$ گنا ہے

ثابت کرو کہ $\text{م}^{۲} + \text{ن}^{۲} = \left\{ \text{(ن + ۱) قمز}\, \frac{\text{م ا}}{\text{ل}} - \text{ن ممز}\, \frac{\text{م ا}}{\text{ل}} \right\}^{۲}$

۶ — ایک یکساں زنجیر جس کا طول س ہے دو ثابت نقطوں ا اور ب سے لٹک

رہی ہے جو ایک ہی افقی خط میں ایک دوسرے سے ۲ ل فاصلہ پر واقع ہیں۔ ثابت کرو اگر س ≥ ل تو زنجیرہ کے مرتب کی کم سے کم گہرائی $\frac{ل}{\sqrt{ی^۲ - ۱}}$ ہوگی جہاں ی مساوات ی مسز ی = ۱ سے حاصل ہوتا ہے اور س کی متناظر قیمت $\frac{ل^۲}{ی \sqrt{ی^۲ - ۱}}$ ہوگی۔

نیز ثابت کرو کہ مرتب کی کسی گہرائی کے جواب میں جو کم سے کم گہرائی سے زیادہ ہو س کی دو قیمتیں ہونگی اور اگر س کو ان دو قیمتوں میں سے بڑی قیمت سے ذرا سا بڑھا دیا جائے تو مرتب نیچے اتر جاتا ہے اور اگر س کو ان دو قیمتوں میں سے چھوٹی قیمت سے ذرا سا بڑھا دیا جائے تو مرتب اوپر چڑھ آتا ہے۔

۷ — ایک یکساں زنجیر کے سرے دو میخوں کے ساتھ بندھے ہیں جن میں سے ایک میخ دوسری میخ سے افقی فاصلہ ۲ ا پر اور انتصابی فاصلہ ۲ ب پر نیچے واقع ہے۔ ثابت کرو کہ جیسے جیسے زنجیر کا طول بدلتا ہے تو سب سے اونچے مرتب والے زنجیرہ کا مبدل مساوات

$$\frac{ا}{ج_۱} - \text{مم}\frac{ا}{ج_۱} = \frac{ب^۲ ا}{ج_۲^۲} \text{ قمز}^۴ \frac{ا}{ج_۱}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

۸ — ایک یکساں زنجیر جس کا طول ۲ ل ہے دو نقطوں ا اور ب سے جو ایک ہی ہمواری میں واقع ہیں لٹک رہی ہے اور زنجیر کے سب سے نچلے نقطہ کی گہرائی ا ب کے نیچے ک ہے۔ اگر فاصلہ ا ب (= ا) میں بقدر مف ا کے خفیف سا اضافہ کیا جائے تو ثابت کرو کہ زنجیرہ کا راس بلندی مف $ا_۱ \times \frac{\text{ک جم سا}}{ا_۱ - \text{ل جم سا}}$ میں سے اوپر اٹھ آئیگا جہاں سا وہ زاویہ ہے جو ا یا ب پر کے مماس افق کے ساتھ بناتے ہیں۔

۹ — ایک معلومہ طول ل کی ایک یکساں وزنی زنجیر ہے جس کے ایک سرے کو ایک ثابت نقطہ کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے۔ زنجیر ایک اور چکنی میخ پر سے جو اول الذکر ثابت نقطہ کی ہمواری پر اس سے ۲ ا فاصلہ پر واقع ہے گذرتی ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل کے دو محل ہونگے یا کوئی بھی محل نہیں ہوگا بموجب اس کے کہ

$$\frac{ل}{ا} \gtrless \sqrt{\frac{۳}{۱ + ا^۲}}$$

جہاں لا مساوات $۳\, \text{و}^{۲\text{لا}} = \frac{۱ + \text{لا}}{۱ - \text{لا}}$ کی مثبت اصل ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اگر تعادل کے دو محل ہوں تو وہ محل جس میں زنجیرہ کا مبدل بڑا ہو قائم تعادل کا محل ہوگا۔

۱۰۔ ایک یکساں زنجیر کا طول معلوم ہے۔ اس کے دو سروں کو دو نقطوں کے ساتھ جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں باندھ دیا گیا ہے۔ زنجیر ایک اور چکنی میخ پر سے گزرتی ہے جو ان دونوں نقطوں کے درمیان واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اگر تعادل کا محل صرف تشاکل کا محل ہو تو یہ انتصابی سطح مستوی میں ہٹاوں کے لئے قائم تعادل کا محل ہوگا لیکن اگر عدم تشاکل کی صورت میں تعادل کا محل ہو تو پہلا محل غیر قائم تعادل کا محل ہوگا۔

۱۱۔ طول ل کی ایک زنجیر کو اس کے سروں پر سے تھام لیا گیا ہے اور اس کو ان نقطوں کو ملانے والے خط کے گرد گھمایا گیا ہے۔ پھر اس کے سروں کو کھینچ کر اس طرح تانا گیا ہے کہ زنجیر تقریباً سیدھی ہو جاتی ہے اور اس کا تناؤ اس کے طول ھ کے وزن کے مساوی ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ فی ثانیہ گردشوں کی تعداد $\sqrt{\frac{\text{ج ھ}}{۲\,۹\,۴}}$ ہے۔

۱۲۔ ایک وزنی یکساں رسی کو ایک سرے سے لٹکایا گیا ہے اور رسی ہوا کے زیر عمل جو افقی سمت میں یکساں رفتار کے ساتھ چل رہی ہے متعادل ہے۔ اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ ہوا رسی کے کسی جزو پر جو عادی قوت لگاتی ہے وہ $\text{جب}^{۲}\,\text{سا}$ کے تناسب ہے جہاں سا وہ زاویہ ہے جو جزو مذکور کا مماس افقی سمت کے ساتھ بناتا ہے تو ثابت کرو کہ رسی کی شکل

$$\text{ر}\ (\text{جم سا} - \text{مس عہ})^{۲\,\text{جم}^{۲}\text{عہ}} \times (\text{جم سا} + \text{مم عہ})^{۲\,\text{جب}^{۲}\text{عہ}} = \text{مستقل}$$

ہے

جہاں عہ ایسا مستقل ہے کہ رسی کے آزاد سرے پر سا کی قیمت $\text{جم}^{-۱}(\text{مس عہ})$ ہے۔

۱۳۔ وہ رفتار معلوم کرو جس پر ایک پہیئے کے ذریعہ بڑی سے بڑی طاقت منتقل ہو سکے۔ جب ایسا ہو تو ثابت کرو کہ پہیئے کی تنی ہوئی طرف اور ڈھیلی طرف کے تناؤں کی نسبت $(۲\,\text{و}^{\text{مہ عہ}} + ۱) : ۳$ ہوگی جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے اور عہ چرخی اور پہیئے کے درمیان تماس کا زاویہ ہے۔

[ اگر چرخی کا نصف قطر ا ہو اور فی اکائی طول کمیت م ہو اور سہ پہیے کی زاوی رفتار ہو تو ابتدائی علم حرکت کی رو سے

م معٔ س × سہ^۲ ا = (ت + معٔ ت) جب معٔ طہ - سا معٔ س

اور ۰ = (ت + معٔ ت) جم معٔ طہ - ت - مد سا معٔ س

اس لئے $\frac{\text{ذت}}{\text{ذ طہ}}$ - سہ ت = - سہ م سہ^۲ ا^۲

لہٰذا ت = ا و^{سہ طہ} + م سہ^۲ ا^۲

اس لئے اگر ت, اور ت ب سروں پر کے تناؤ ہوں تو ہمیں آسانی سے حاصل ہوتا ہے

ت = و^{سہ طہ} (ت ب - م سہ^۲ ا^۲) + م سہ^۲ ا^۲

اس لئے طاقت جو منتقل ہوتی ہے

= (ت, - ت ب) ا سہ = (و^{سہ ع} - ۱) (ت ب - م سہ^۲ ا^۲) ا سہ

اور اس لئے یہ سہ کی مختلف قیمتوں کے لئے بڑی سے بڑی ہوگی جب ۳ م سہ^۲ ا^۲ = ت ب

اور تب $\frac{\text{ت,}}{\text{ت ب}}$ = $\frac{\text{۲ و}^{\text{سہ ع}} + \text{۱}}{\text{۳}}$ ]

۱۴ ــــ ایک بے سرے والی رسی کا حلقہ ایک چکنے قائم اسطوانہ کے گرد جس کا نصف قطر او ہے متشاکلاً لٹک رہا ہے ۔ اگر رسی اسطوانہ کے محیط کے تین چوتھائی حصہ کو مس کرے تو اس کا کل طول اور سب سے نچلے نقطہ کا مقام معلوم کرو ۔

۱۵ ــــ ایک وزنی یکساں رسی ایک انتصابی دائرہ کے گرد لپٹی ہوئی ہے اور اس قدر تنی ہوئی ہے کہ یہ سب سے نچلے نقطہ پر دائرہ کو چھوڑنے کے عین قریب ہے ۔ ثابت کرو کہ سب سے اونچے نقطہ پر تناؤ سب سے نچلے نقطہ پر کے تناؤ کا تین گنا ہے ۔

۱۶ ــــ ایک چکنا قرص قطع ناقص کی شکل کا ہے جس کے نیم محور ا اور ب ہیں ۔ اس کو ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح ثابت کر دیا گیا ہے کہ اس کے دونوں محور خط انتصابی کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں ۔ ایک وزنی رسی قرص کے گرد مس کرتی ہے اور لٹکے

آہستہ آہستہ ڈھیلا کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جس نقطہ پر رسی قرص سے الگ ہوتی ہے اس نقطہ کا خارج المرکز زاویہ ف اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$۲ا^۲ب\ مس^۳ف - ا(۳ا^۲ - ب^۲)\ مس^۲ف + ب(۳ب^۲ - ا^۲)\ مس\ ف - ۲اب^۲ = ۰$$

[یہ نقطہ اس بنا پر معلوم ہوتا ہے کہ اس نقطہ پر سختی کا دباؤ صفر اور کم سے کم ہے]

**۱۷**— ایک یکساں رسی جس کے سرے ایک نقطہ ا پر بندھے ہیں ایک قوت کے مرکز و کو گھیرے ہوئے ہے اس کی مرکزی قوت اندفاعی قوت ہے اور فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہے ثابت کرو کہ اگر رسی کا طول ۴ × و ا ہو تو ا پر رسی کے دو حصوں کے درمیان جو زاویہ اندرونی طور پر بنتا ہے وہ ۱۲۰° کے مساوی ہے۔

**۱۸**— ثابت کرو کہ ایک یکساں رسی ایک دائرہ کی قوس کی شکل میں ساکن ہو گی اگر اس کے ہر جزو پر مرکزی قوت ایسی عمل کرے جو قوت کے مرکز سے اس جزو کے فاصلہ کے مکعب کے بالعکس متناسب ہو جبکہ قوت کا مرکز محیط پر کا کوئی نقطہ ہو۔

**۱۹**— ا ب ج د ایک مربع ہے جس کا ہر ضلع ا ہے۔ ایک یکساں رسی جس کی خطی کثافت ک ہے اور جسے ب اور د پر ثابت کر دیا گیا ہے ا سے ایک اندفاعی قوت $م ر^{-۳}$ کے زیر عمل متعادل ہے اگر ب اور د پر رسی کے مماس ب د پر عمود وار ہوں اور اگر ان نقطوں میں سے ہر ایک پر تناؤ $\frac{م ک}{۲ا^۲}$ ہو تو ثابت کرو کہ رسی منحنی ر = ا(جب ط + جم ط) کی شکل میں ساکن ہو گی۔

**۲۰**— ثابت کرو کہ یکساں طاقت کے زنجیرہ کے لئے لولبی کی قوس ممکن شکل ہو سکتی ہے جبکہ رسی کے ہر جزو پر اندفاعی قوت قطب سے فاصلہ کے بالعکس متناسب ہو اور رسی کے دونوں سرے ثابت کر دیئے گئے ہوں۔

**۲۱**— ایک انکھیچ رسی کا معلوم طول حلقہ کی شکل میں ہے اس کے ہر جزو پر دو مرکزی قوتیں جن میں سے ہر ایک فاصلہ کے مکعب کے بالعکس متناسب ہے عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ رسی کی شکل ایک دائرہ ہو سکتی ہے۔ اس دائرہ کا مرکز معلوم کرو۔

**۲۲**— ثابت کرو کہ ایک رسی ایک قطع ناقص کی شکل میں متعادل رہ سکتی ہے جبکہ اس پر

اس کے ماسکوں سے دو اندفاعی قوتیں (مہ $\text{رَ}^{-\frac{3}{2}}$ $\text{رَ}^{-\frac{1}{2}}$) اور (مہ $\text{رَ}^{\frac{1}{2}}$ $\text{رَ}^{-\frac{3}{2}}$) عمل کریں جہاں ر اور رَ کسی جزو کے فاصلے ہیں ماسکوں سے۔ نیز ثابت کرو کہ کسی جزو پر تناؤ مرکز سے اس جزو پر کے مماس پر عمود کے طول کے متناسب ہوتا ہے۔

۴۳۔ ایک چکنے مستدیر اسطوانہ کو جس کا نصف قطر ا ہے اس طرح ثابت کرلیا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور ایک چکنی افقی میخ اس میں لگا دی گئی ہے اب ایک رسی (جس کا طول ۲ ل ہے) کا حلقہ اس اسطوانہ کے اوپر اس طرح ڈال دیا گیا ہے کہ حلقہ میخ سے اٹک جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل کے محل میں میخ پر رسی کے دو حصوں کے درمیان زاویہ ۲ تم $\frac{\text{ل}}{\text{ج}}$ ا

بنتا ہے جہاں ج جیبز $\frac{\text{ا}\,\pi}{\text{ج}}$ = ل۔ [ اگر رسی کے سب سے نچلے نقطہ و کو مبدا مانا جائے اور ی کا محور انتصابی ہو اور لا اس مستدیر قوس کا طول ہو جو کسی قوس و ات کا ظل ہو تو ہمیں افقی اور انتصابی سمتوں میں تحلیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{ت}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}\right)=\text{و}_1 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{ت}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\right)=0$$

$$\text{لہذا}\quad \text{ت}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}=\text{مستقل}=\text{و}\,\text{ج}_1 \qquad \text{اس لئے}\quad \frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}\right)=\frac{1}{\text{ج}_1}$$

یعنی $\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرلا}^2}=\frac{1}{\text{ج}_1}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}$ ، یہ دفعہ ۲۵۱ کی تفرقی مساوات ہے اور اس لئے اس کا حل بھی وہی ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ رسی میں کوئی اختلال واقع نہ ہوگا اگر اسطوانہ کو پھیلا کر ایک انتصابی سطح مستوی میں تحویل کردیا جائے ]

۴۴۔ ایک یکساں وزنی رسی جس کا طول ۲ ل ہے نصف قطر ر کے ایک چکنے انتصابی اسطوانہ کے ساتھ مس کرتی ہوئی لٹک رہی ہے۔ اسے دو نقطوں کے ساتھ ثابت کردیا گیا ہے جو ایک ہی افقی سطح مستوی میں ہیں اور نیز اسطوانہ کے محور میں سے گزرنے والی انتصابی سطح مستوی میں محور سے ا فاصلہ پر (جہاں ا > ر) واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ رسی کے سب سے نچلے نقطہ کی گہرائی ماہر ایک سہارے کے نقطے کے نیچے مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہے

رجب $\frac{1}{2}$ ب + ما ۱ج - ر۲ = $\frac{ل^2 - ما^2}{2ما}$ لوک $\frac{ل + ما}{ل - ما}$

۲۵ — ایک رسی ایک چکنے کرہ پر اس طرح پڑی ہے کہ یہ ایک ثابت قطر میں سے گزرنے والی سب تراشوں کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ یہ اسی حالت میں ساکن رہے گی اگر اس کے ہر جزو پر ایک قوت عمل کرے جو معلومہ قطر پر عمود وار ہو اور اس جزو کے فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہو۔ نیز بتاؤ کہ تناؤ فاصلہ کے بالعکس متناسب ہوتا ہے۔

قطبی محددوں ( ا، طہ، فہ ) کو استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ رسی کا منحنی مذکورہ بالا تراشوں کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرے گا اگر $\frac{ا\ فرطہ}{فرس}$ = جم بہ اور ا جب طہ $\frac{فرفہ}{فرس}$ = جب بہ

اس لئے آسانی سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{فرلا}{فرس} = \text{جم طہ جم فہ جم بہ} - \text{جب فہ جب بہ}$$

$$\frac{فرما}{فرس} = \text{جم طہ جب فہ جم بہ} + \text{جم فہ جب بہ}$$

اور $$\frac{فری}{فرس} = -\text{جب طہ جم بہ}$$

ثابت قطر کے گرد معیار اثر لینے سے

تت جب بہ × ا جب طہ = مستقل ∴ تت = $\frac{م}{\text{جب طہ}}$

دفعہ ۲۶۱ کی تیسری مساوات سے حاصل ہوتا ہے

سما جم طہ = $\frac{فر}{فرس}$ (تت $\frac{فری}{فرس}$ ) = $\frac{فر}{فرس}$ ( - تت جب طہ جم بہ ) = ۰

پس سما = ۰

اس لئے اگر ثابت قطر پر عمود وار باہر کی طرف عمل کرنے والی قوت ف ہو تو دفعہ ۲۶۱ کی مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف جم ف} = \frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{ت}\ \frac{\text{فر}^{2}}{\text{فرس}}\right) = \text{م}\ \frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{جم ۲م ط جم ف}\ \frac{\text{جب}^{2}\ \text{ف جب}^{2}\ \text{ہ}}{\text{جب ط}}\right)$$

$$= \frac{\text{م جم ف}}{\text{و جب}^{2}\ \text{ط}} \quad \text{جس سے}\quad \text{ف} = \frac{\text{م}}{\text{و جب}^{2}\ \text{ط}}\Big]$$

۲۶ — ایک رسی کا طول ر (و − ۱) $\sqrt{\text{۱} + \text{ف}^{2}\ \text{جب}^{2}\ \text{عہ}}$ ہے اور اس کے سروں کو ایک قائم مخروط کی سطح پر کے دو نقطوں کے ساتھ جن کے فاصلے مخروط کے راس سے ر اور و × ر ہیں ثابت کر دیا گیا ہے جہاں ۲ عہ مخروط کا راسی زاویہ ہے اور ف وہ زاویہ ہے جو مخروط کے محور اور دو معلومہ نقطوں میں سے گزرنے والی سطوح مستوی کے درمیاں بنتا ہے۔ اگر رسی سطح پر بحالت تعادل راس سے ایک ایسی اندفاعی قوت کے زیر عمل جو فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہو ساکن رہے تو ثابت کرو کہ رسی کا توازن کا منحنی مخروط کے ہر مکون کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرے گا۔

[یہاں مولو کارمتوں کے نیپری نظام کی اساس ہے]

۲۷ — ایک ایسی چکنی گردشی سطح کی شکل دریافت کرو کہ جب اس کا محور انتصابی ہو اور جب یکساں رسی اس پر ساکن ہو تو یہ سب نصف النہاروں کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرے۔

(مکون منحنی قائم زائد ہے)

۲۸ — دو پلڑے ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن لہ ن ہے۔ ان کو ایک بے وزن لچکدار رسی کے ذریعہ جس کا مقیاس لچک لہ ہے ملایا گیا ہے۔ رسی ایک ثابت کھردرے افقی اسطوانہ پر جس کا نصف قطر ک ہے متناظراً لٹک رہی ہے۔ ابتداءً رسی اپنے پورے طول میں یکساں طور پر کھینچی ہوئی ہے۔ اگر ایک پلڑے کو بتدریج وزنی کیا جائے تو ثابت کرو کہ دوسرے پلڑے کے حرکت کرنے سے پہلے پلڑے کو سہارنے والی رسی کے زائد انتصابی حصہ کا طبعی طول

$$\frac{\text{لہ}}{\text{مہ}}\ \text{لوک}\ \frac{\text{۱} + \text{ن و}^{\text{مہ}\pi}}{\text{۱} + \text{ن}} - \frac{\pi\ \text{لہ ن}}{\text{۱} + \text{ن}} \quad \text{ہوگا}$$

۲۹ — ایک وزنی لچکدار رسی کا طول ۲ ل اور لچک کی قدر اس کے وزن کے مساوی ہے یہ رسی ایک چکنے مکافی پر پڑی ہے جس کا وتر خاص ۴ ا ہے اور مکافی کا محور انتصابی ہے اور رسی کا آزاد سرا اس پر ہے جو سب سے نچلا نقطہ ہے۔ مکافی پر کا وہ نقطہ معلوم کرو جس کے ساتھ اوپر کا سرا وابستہ ہے اور ثابت کرو کہ اُس نقطہ پر رسی کا تناؤ و ( $\sqrt{2}$ - ۱ ) ہے جہاں و رسی کا وزن ہے۔

۳۰ — ایک رسی جو ابتداءً متجانس اور جس کا طول ل ہے دو معلومہ نقطوں کے ساتھ بندھی ہے اور تعادل کی حالت میں ایک دائرہ کی قوس کی شکل میں ایک ایسی اندفاعی قوت کے زیر عمل جو محیط پر کے ایک معلومہ نقطہ سے باہر کی طرف عمل کرتی ہے ساکن ہے قوت کا قانون معلوم کرو۔

۳۱ — ایک وزنی لچکدار رسی بغیر کھنچاؤ کی حالت میں یکساں ہے۔ اس کو ایک چکنے مستدیر اسطوانہ کے گرد جس کا محور افقی ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ یہ اسطوانہ کے سب سے نچلے نقطہ کے ساتھ عین تماس نہیں رکھتی۔ اگر اس نقطہ پر جس کو مرکز سے ملانے والا خط سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے تناؤ ت ہو تو ثابت کرو کہ (ت + لہ)$^2$ = ا جم طہ + ب جہاں لہ لچک کا مقیاس ہے اور ا اور ب مستقل ہیں جن کی قیمتیں لچک کے مقیاس رسی کے وزن اور اسطوانہ کے نصف قطر پر موقوف ہیں۔

اگر رسی کے اس انچ طول کا وزن جو اسطوانہ کے نصف قطر کے مساوی ہے و$_1$ ہو اور لچک کا مقیاس بھی و$_1$ ہو تو ثابت کرو کہ سب سے اونچے نقطہ پر تناؤ ت$_1$ مساوات ت$_1$ + $\frac{ت_1^2}{2 و_1}$ = $\frac{9 + \sqrt{5}}{4}$ و$_1$ سے حاصل ہوگا۔

۳۲ — ایک وزنی لچکدار رسی جو انکھچی حالت میں یکساں ہے ایک چکنے انتصابی دائرہ کی محدب جانب پڑی ہے اور اس کا ایک سرا دائرہ کے سب سے اونچے نقطہ کے ساتھ بندھا ہے۔ اگر تعادل کی حالت میں کل طول دائرہ کے ربع کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ رسی کا طبعی طول ا $\sqrt{2}$ لوک$_e$ ( $\sqrt{2}$ + ۱ ) کے مساوی ہوگا جہاں ا دائرہ کا نصف قطر ہے، ۲ و ا لچک کی قدر ہے اور و طبعی طول کی ایک اکائی کا وزن ہے۔

۴۴۳ - ایک لچکدار رسی جو انچھی حالت میں یکساں ہے ایک چکنی مستدیر نلی کے اندر ایک جاذبی قوت کے زیر عمل ساکن ہے جو نلی کے محیط پر کے ایک ایسے نقطہ کی طرف عمل کرتی ہے جو رسی کے وسطی نقطہ کے عین مقابل ہے۔ اگر رسی تعادل کی حالت میں عین نصف دائرہ کو گھیرے ہوئے ہو تو ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا تناؤ

$$=\sqrt{ل\ (ل + ۲\ مہ\ ک\ ا^{۲})} - ل$$

جہاں ل لچک کی قدر ہے، ا نلی کا نصف قطر ہے، ک انکھچی رسی کے اکائی طول کی کمیت ہے اور قوت فاصلہ کا مہ گنا ہے۔

۴۴۴ - ایک وزنی لچکدار رسی جسکا طبعی طول ل ہے ایک ثابت نقطہ سے حالت تعادل میں لٹک رہی ہے اور اس کا کل کھنچاؤ مہ ل ہے۔ رسی کو مرغولہ شکل کی ایک چکنی ثابت نلی میں بند کیا گیا ہے جس کے کسی نقطہ پر کا مماس افق کے ساتھ ایک مستقل زاویہ عہ بناتا ہے۔ رسی کے بالاترین نقطے کو نلی کے ساتھ ثابت کر دیا گیا ہے اور رسی تعادل کا محل اختیار کر لیتی ہے۔ ثابت کرو کہ اب کل پھیلاؤ مہ ل جب عہ ہے۔

۴۴۵ - ایک رسی ایک سطح مستوی میں ایک مرکزی قوت کے زیر عمل تعادل میں ہے۔ ثابت کرو کہ مرکزی قوت ایسے بدلتی ہے جیسے $\frac{فر}{فر ر}\left(\frac{۱}{ع}\right)$ -

علم حرکت میں اس کے مماثل کیا ہے۔

اگر رسی لچکدار ہو تو ثابت کرو کہ رسی کے معلومہ شکل اختیار کر لینے کے لئے مرکزی قوت ایسے بدلتی ہے جیسے $\frac{فر}{فر ر}\left(\frac{۱}{ع} + \frac{ا}{ع^{۲}}\right)$ جہاں ا اس رسی کے ہر نقطہ کے لئے مستقل ہے۔

۴۴۶ - ایک ثابت کرہ پر جس کا نصف قطر ا ہے ایک وزنی لچکدار حلقہ جس کا طبعی نصف قطر ج ہے متوازی الافق حالت میں پڑا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے محل تعادل میں زاویہ ۲ عہ جو حلقہ کے کسی قطر کے محاذی کرہ کے مرکز پر بنتا ہے مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے مس عہ = ۲ π ک $\frac{جب\ عہ - جب\ بہ}{جب\ بہ}$ جہاں ج = ا جب بہ اور حلقہ

کے وزن کا ک گنا لچک کے نقیاس کے مساوی ہے۔
اگر کرہ ذرا سا کھردرا ہو اور رگڑ کی قدر مہ ہو تو ثابت کرو کہ تعادل کے ٹوٹنے سے پہلے
حلقہ کو اس قدر نیچے اتارا جا سکتا ہے کہ زاویہ ۲ عہ بقدر ۲ مہ $\dfrac{\text{جب عہ} - \text{جب بہ}}{\text{جب بہ} - \text{جب ۳ عہ}}$ کے
تقریباً بڑھ جائے۔

۴۷ ـــ ایک کھردری گردشی سطح کو اس طرح ثابت کیا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے۔ ایک لچکدار رسی کا حلقہ اس پر متوازی الافق محل میں اس طرح ساکن ہے کہ یہ مساوی طور پر کھنچا ہوا ہے۔ اگر رسی خواہ اسے کہیں رکھا جائے اوپر پھسلنے کے عین قریب ہو تو سطح کے تکوینی منحنی کی مساوات معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر لچک کا مقیاس لہ ہو رگڑ کی قدر مہ، رسی کا وزن ۲ ۳ لہ مہ اور اس کا طبعی طول ۲ ۳ ا ہو اور گردش کے محور کو ما کا محور مانا جائے تو یہ مساوات
$\text{لا} - \text{مہ ما} = \text{ا} (\text{۱} + \text{مہ}^{۲})\ \text{لوک}\ \dfrac{\text{لا}}{\text{ج}}$ ہو جاتی ہے۔

۴۸ ـ تھوڑا سا کھنچ سکنے والا بے سرا پٹا دو مساوی چرخیوں پر تنا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ پٹا ہر ایک چرخی پر جو جفت لگا سکتا ہے وہ $\dfrac{\text{۲ ا} (\text{ج} + \text{۳ ا})}{\text{ج ممز} \frac{\text{مہ ۳}}{۲} + \frac{\text{۲ ا}}{\text{مہ}}}\ \text{ت}$ کے مساوی ہے
جہاں ا ہر ایک چرخی کا نصف قطر ہے، ج ان کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ ہے، مہ رگڑ کی قدر ہے اور ت تناؤ ہے پٹے کا جبکہ یہ چرخیوں پر لگایا گیا ہے۔

۴۹ ـ اگر ایک سائیکل کے ٹائر کو ایک پتلا لچکدار بند تصور کیا جائے جو رِم میں جس کا بیرونی نصف قطر ا ہے گہرائی د کی ایک چکنی نالی میں تنا ہوا ہو تو ثابت کرو کہ ٹائر کو رِم پر سے نکالنے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ

$$\frac{\text{۸ لہ ا}^{۲}}{\text{ل}} \left(\text{جب فہ} - \text{فہ جم فہ}\right) \left\{ (\text{۳} - \text{فہ}^{۲})\ \text{جم فہ} + \text{جب فہ} - \frac{\text{ل}}{\text{۲ ا}} \right\}$$

ہے جہاں ل بند کا انکھچی حالت میں طول ہے اور $\text{جم فہ} = \dfrac{\text{ا} - \text{د}}{\text{ا}}$
اور پہیئے کی چوڑائی کو نظر انداز کیا گیا ہے۔

---

# چودھواں باب
## کشش اور قوۃ

۲۷۶۔ مادہ کے ذرات کے درمیان کشش کا کلیہ جس کو نیوٹن کا کلیہ تجاذب بھی کہتے ہیں حسب ذیل ہے:۔ مادہ کا ہر ایک ذرہ مادہ کے ہر دیگر ذرہ کو ایسی قوۃ کے ساتھ کھینچتا ہے جو کمیتوں کے حاصل ضرب کے بالراست اور ان کے درمیانی فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔

اس لئے م اور م۲ گرام کی کمیتوں کے درمیان جو ایک دوسرے سے لا سنتی میٹر کے فاصلہ پر ہوں کشش جہ $\frac{م_1 م_2}{لا^2}$ ڈائن کے مساوی ہوتی ہے جہاں جہ ایک ایسا مستقل ہے جس کی قیمت دفعہ مابعد میں معلوم کی جائیگی۔ اس مقدار جہ کو کشش کا مستقل کہتے ہیں۔

اس منزل پر طالب علم کو چاہیئے کہ اوپر کے کلیہ کو بطور مفروضہ تسلیم کرے۔ اس کا کوئی باقاعدہ ثبوت فی الحال نہیں دیا جاسکتا ہے تاہم طالب علم فرض کرسکتا ہے کہ یہ کلیہ تمام عالم کائنات کے لئے صحیح ہے اور سیارات وا جرام فلکی کی حرکت کی توجیہ اس اصول کی بنا پر کافی طور پر ہوسکتی ہے۔ نیز اس حقیقت کی تصدیق علم حرکت کے اصولوں سے ہوتی ہے۔

ہم چند مثالیں ایسی بھی دینگے جن میں مربع بالعکس کے کلیہ کے علاوہ دیگر قوانین کشش فرض کر لئے جائیں گے۔ لیکن یہ مثالیں اس کائنات میں کسی حقیقی کشش کی بنا پر مبنی نہیں ہونگی۔

۲۷۷- ایک پتلی یکساں سلاخ ا ب کی کشش کسی بیرونی نقطہ ن پر معلوم کرو۔

ن سے سلاخ پر عمود ن ل (=ع) نکالو اور فرض کرو کہ سلاخ پر کوئی نقطہ ق ایسا ہے کہ ل ق = لا اور ∠ ل ن ق = طہ، اب ق ط ایک چھوٹا سا جز مف لا لو۔

اگر سلاخ کی عمودی تراش ک اور کثافت مر ہو تو جزو ق ط کی کشش ن پر کی اکائی کمیت پر

$$= \frac{\text{جہ ک مر} \times \text{مف لا}}{\text{ن ق}^2} = \frac{\text{جہ ک مر مف لا}}{\text{ع}^2 \text{ قط}^2 \text{طہ}} = \frac{\text{جہ ک مر} \times \text{مف طہ}}{\text{ع}}$$

کیونکہ لا = ع مس طہ اور اس لئے مف لا = ع قط² طہ × مف طہ

بالآخر اگر ق ط بہت چھوٹا ہو تو کشش کی سمت ن ق کی سمت ہوگی۔

اس لئے اس کے اجزائے ترکیبی بالترتیب ن ل کی سمت میں اور اس پر عمودوار

$$\frac{\text{جہ ک مر جم طہ} \times \text{مف طہ}}{\text{ع}} \text{ اور } \frac{\text{جہ ک مر جب طہ} \times \text{مف طہ}}{\text{ع}}$$ ہونگے۔

اس لئے اگر کل سلاخ کی کشش کے اجزائے ترکیبی ن ل کی سمت میں اور اس پر عمودوار سمت میں لا اور ما ہوں اور اگر زاویئے ل ن ا اور ل ن ب بالترتیب عہ اور بہ ہوں تو

$$\text{لا} = \int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}} \frac{\text{جہ ک مر} \times \text{جم طہ فرطہ}}{\text{ع}} = \frac{\text{جہ ک مر}}{\text{ع}} \left[\text{جب طہ}\right]_{\text{عہ}}^{\text{بہ}}$$

$$= \frac{\text{جہ ک م}}{\text{ع}} \left[\text{جب بہ} - \text{جب عہ}\right] \quad \ldots \ldots \ldots (۱)$$

اور $$\text{ما} = \int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}} \frac{\text{جہ ک م جب طہ ڈطہ}}{\text{ع}} = \frac{\text{جہ ک م}}{\text{ع}} \left[-\text{جم طہ}\right]_{\text{عہ}}^{\text{بہ}}$$

$$= \frac{\text{جہ ک م}}{\text{ع}} \left[\text{جم عہ} - \text{جم بہ}\right] \quad \ldots \ldots \ldots (۲)$$

اور حاصل کشش سا ہو جو ن ل کے ساتھ زاویہ فہ بنائے تو

$$\text{سا} = \sqrt{\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲}} = \frac{\text{جہ ک م}}{\text{ع}} \sqrt{(\text{جب بہ} - \text{جب عہ})^{۲} + (\text{جم عہ} - \text{جم بہ})^{۲}}$$

$$= \frac{\text{جہ ک م}}{\text{ع}} \sqrt{۲ - ۲\,\text{جم}\,(\text{بہ} - \text{عہ})} = \frac{۲\,\text{جہ ک م}}{\text{ع}} \,\text{جب}\, \frac{\text{بہ} - \text{عہ}}{۲}$$

$$= \frac{۲\,\text{جہ ک م}}{\text{ع}} \,\text{جب}\, \left(\frac{\text{ان ب}}{۲}\right) \quad \ldots \ldots \ldots (۳)$$

اور $$\text{مس فہ} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{جم عہ} - \text{جم بہ}}{\text{جب بہ} - \text{جب عہ}} = \text{مس}\,\frac{\text{عہ} + \text{بہ}}{۲}$$

اور اس لئے $$\text{فہ} = \frac{\text{عہ} + \text{بہ}}{۲} \quad \ldots \ldots \ldots (۴)$$

اس لئے حاصل کشش کی سمت زاویہ ان ب کی تنصیف کرتی ہے۔

**نتیجہ صریح:** اگر سلاخ اب کا طول لامتناہی ہو تو عہ = −۹۰° اور بہ = +۹۰°

$$\therefore \quad \text{سا} = \frac{۲\,\text{جہ ک م}}{\text{ع}}$$

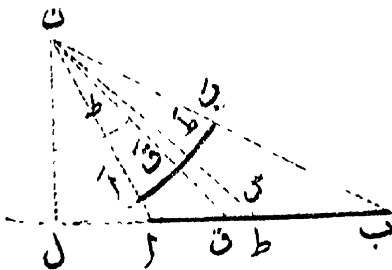
پس ایک لامتناہی سلاخ کی کشش کسی بیرونی نقطہ کے فاصلہ کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔

۲۷۸۔ اگر ہم دفعۂ ماقبل کے نتیجہ (۳) میں ع = ۰ رکھیں جس کے یہ معنی ہیں کہ ہم نقطہ ن کو سلاخ کی سطح پر لیں تو ہمیں جواب لامتناہی حاصل ہوتا ہے

یہ صریحاً ناممکن ہے۔ ہماری تحلیل کی ظاہری ناکامی کی وجہ یہ ہے کہ ہم نے دوران عمل میں ق پر تراش کے ہر جزو کو ن سے متساوی الفصل فرض کیا تھا۔ اب اگر نقطہ ن سلاخ پر ہو تو ن میں سے گزرنے والی عمودی تراشش کے نقطوں کے فاصلے جو ن سے ہیں وہ صفر سے لیکر سلاخ کے قطر تک مسلسل بدلتے ہیں اس لئے اُن کو باہم مساوی فرض نہیں کیا جا سکتا۔

اس صورت میں دفعہ ۲۸۵ کی مشق (۲) میں مکرر بحث کی گئی ہے۔

۲۷۹۔ ایک سلاخ اب ہے اور اس کے باہر ایک نقطہ ن ہے۔ ن سے سلاخ اب پر عمود ن ل (= ع) نکالا گیا ہے اور ن کو مرکز مان کر نصف قطر ن ل کے ساتھ ایک دائرہ کھینچا گیا ہے۔ اس دائرہ کی قوس جو ن ا اور ن ب کے اندر منقطع ہوتی ہے وہ اَ بَ ہے۔ ثابت کرو کہ سلاخ اب کی جو کشش ن پر ہے وہ مساوی ہے اس کشش کے جو قوس اَ بَ کی وجہ سے نقطہ ن پر ہے جب کہ قوسِ دائرہ کو اسی مادہ کی بنی ہوئی فرض کیا جائے جس سے سلاخ بنی ہوئی ہے۔




ق ط سلاخ کا کوئی جزو لو اور فرض کرو کہ اس کے جواب میں مستدیر قوس کا جزو قَ طَ ہے

تب $\frac{\text{قَ طَ کی کشش ن پر}}{\text{ق ط کی کشش ن پر}}$

$$= \frac{\text{قَ طَ}}{\text{ن قَ}^2} \div \frac{\text{ق ط}}{\text{ن ق}^2}$$

$$= \frac{\text{قَ طَ}}{\text{ق ط}} \times \frac{\text{ن ق}^2}{\text{ن ل}^2} = \frac{\text{قَ طَ}}{\text{ق س}} \times \frac{\text{ق س}}{\text{ق ط}} \times \text{قط}^2\text{طہ}$$

جہاں ق س عمود ہے ن ط پر۔

= ن ق / ن ق جم س ق ط قط² ط = ن ل / ن ق × جم ط × قط² ط = ۱

اس لئے سلاخ اور قوس کے متناظر اجزا کی کششیں مساوی اور ایک ہی سمت میں ہیں پس دونوں صورتوں میں حاصل کششیں بھی وہی ہونگی۔

۲۸۰ — ایک یکساں مستطیلی تختی ا ب ج د ہے جس کے مرکز و سے ایک خط و ن اس تختی پر علی القوائم کھینچا گیا ہے۔ اس عمود کے کسی نقطہ ن پر تختی کی کشش دریافت کرو۔

فرض کرو کہ تختی کی کثافت ہر اور موٹائی ک ہے نیز ا ب = ۲ ا، اور ا د = ۲ ب اور و ن = ھ۔

فرض کرو کہ ا ب کے متوازی تختی کی ایک تراش ۶ ط ہے جس کا فاصلہ و سے لا ہے اس کی چوڑائی مف لا ہے۔ اگر ۶ ط کا وسطی نقطہ س ہو تو دفعہ ۲۷۷ کی رو سے اس کی کشش نقطہ ن پر

= ۲ جہ ک ہر × مف لا / ن س جب ط ن ۶ / ۲

= ۲ جہ ک ہر × مف لا / √(ھ² + لا²) × ا، / √(ھ² + لا² + ا،²)

اور ن س کی سمت میں عمل کرتی ہے۔

اس لئے ن و کی سمت میں عمل کرنے والی مجموعی قوت

ل = ∫ (−ب، تا +ب،) ۲ جہ ک ہر × فرلا / √(ھ² + لا²) × ا، / √(ھ² + لا² + ا،²) × ھ / √(ھ² + لا²)

∴ ل / ۴ جہ ک ہر ا، ھ = ∫ (۰ تا ب،) فرلا / (ھ² + لا²) √(ھ² + لا² + ا،²)

لا = ھ مس طہ رکھو جس سے لا کی حدود صفر سے $مس^{-1}\,\frac{ب_1}{ا_1}$

یعنی $جب^{-1}\,\frac{ب_1}{\sqrt{ب_1^2 + ھ^2}}$ ہو جائیں گی۔

$$\therefore\ \frac{V}{۴\,جھرک\,ا_1\,ھ} = \frac{1}{ھ}\int_0^{جب^{-1}\frac{ب_1}{\sqrt{ب_1^2+ھ^2}}} \frac{جم\,طہ\,فرطہ}{\sqrt{ھ^2 + ا_1^2 - ا_1^2\,جب^2\,طہ}}$$

$$= \frac{1}{ا_1\,ھ}\left[جب^{-1}\frac{ا_1\,جب\,طہ}{\sqrt{ھ^2 + ا_1^2}}\right]_0^{جب^{-1}\frac{ب_1}{\sqrt{ب_1^2+ھ^2}}}$$

$$= \frac{1}{ا_1\,ھ}\,جب^{-1}\frac{ا_1\,ب_1}{\sqrt{(ھ^2 + ا_1^2)(ھ^2 + ب_1^2)}}$$

$$\therefore\ V = \frac{جم}{ا_1\,ب_1}\,جب^{-1}\frac{ا_1\,ب_1}{\sqrt{(ھ^2 + ا_1^2)(ھ^2 + ب_1^2)}}$$ جہاں م تختی کی کمیت ہے۔

# مثالیں

۱۔ تین سلاخوں کو جن کی کمیت فی اکائی طول یکساں ہے جوڑنے سے ایک مثلثی قالب بنایا گیا ہے۔ ان کی کشش قانون قدرت کے مطابق ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ذرہ کو اس مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز پر رکھ دیا جائے تو یہ ذرہ متعادل رہے گا۔

(دفعہ ۲۷۹ کا مسئلہ استعمال کرو)

۲۔ ثابت کرو کہ ایک یکساں سلاخ ا ب کی کشش نقطہ ن پر کی اکائی کمیت پر ا ب کی سمت کے متوازی ایسے بدلتی ہے جیسے $\frac{1}{ن\,ا} - \frac{1}{ن\,ب}$

۳ـــ دو سیدھے تار ہیں جن کے طول ل اور لَ اور جن کی کمیتین م اور مَ ہیں۔ ان کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ یہ ایک ہی خط مستقیم میں ہیں اور ان کے باہم قریب ترین سروں کا درمیانی فاصلہ $\text{ج}_1$ ہے۔ ثابت کرو کہ دونوں تاروں کے درمیان قوت کشش ہے

$$\text{جب}\ \frac{\text{م مَ}}{\text{ل لَ}}\ \text{لوگ}\ \frac{(\text{ل} + \text{ج}_1)(\text{لَ} + \text{ج}_1)}{\text{ج}_1(\text{ل} + \text{لَ} + \text{ج}_1)}$$

۴ـــ ایک یکساں پتلی سیدھی سلاخ ہے جس کی کثافت ک اور طول ل ہے اس کے متوازی ایک دوسری یکساں سیدھی سلاخ کو جس کا طول لَ اور کثافت کَ ہے متناظرا فاصلہ ھ پر رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ پہلی سلاخ کی کشش دوسری سلاخ پر

$$\text{جب}\ \frac{\text{ک کَ}}{\text{ھ}}\left\{\sqrt{(\text{ل} + \text{لَ})^2 + ۴\,\text{ھ}^2} - \sqrt{(\text{ل} - \text{لَ})^2 + ۴\,\text{ھ}^2}\right\}$$ ہے۔

اگر ھ صفر ہو تو اس جملہ کے معنی بیان کرو۔

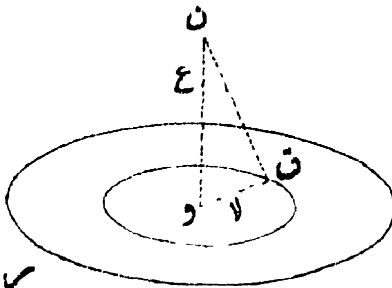
۵ـــ دو پتلی یکساں سلاخیں ا ب اور ج د ہیں جن کے وسطی نقطوں کو ایک ہی مقام پر ٹکایا گیا ہے سلاخیں ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے درمیان کشش ایک جفت میں تحویل ہو جاتی ہے جس کا معیار اثر ۲ جب م مَ × (اج ـ ب ج) قم عہ ہے جہاں م اور مَ ان سلاخوں کی خطی کمیتیں ہیں۔

۶ـــ دو یکساں غیر متقاطع سلاخیں ہیں جن کے طول لا تناہی ہیں، ان کا درمیانی زاویہ عہ اور ان کی کثافتیں ک اور کَ ہیں۔ یہ ایک دوسرے کو نیوٹن کے کلیہ کے مطابق کھینچتی ہیں۔ ثابت کرو کہ سلاخوں کے درمیان حاصل قوت ۲ جب π ک کَ × قم عہ ہے جہاں عہ سلاخوں کا درمیانی زاویہ ہے۔

[فرض کرو کہ سلاخوں کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ و وَ = $\text{ج}_1$۔ تب تشاکل سے ظاہر ہے کہ سلاخوں کے درمیان حاصل قوت و وَ کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ فرض کرو کہ پہلی سلاخ پر کوئی نقطہ ن ایسا ہے کہ و ن = لا اور اگر ن سے دوسری سلاخ پر عمود ع ہو تو $\text{ع}^2 = \text{ج}_1^2 + \text{لا}^2\ \text{جب}^2\ \text{عہ}$، تب دوسری سلاخ کی کشش ن پر حسب دفعہ ۲۷۷ نتیجہ صریح $= \frac{۲\ \text{جب کَ}}{\text{ع}}$ اور اس کا حاصل و وَ کی سمت میں $\frac{۲\ \text{جب کَ} \times \text{ج}_1}{\text{ع}^2}$

اس لئے کل کشش $= \int_{-\infty}^{+\infty}$ $\frac{\text{۲ جہ ک ث ج}}{\text{ج}^2 + \text{لا}^2 \text{ جب}^2 \text{ عہ}}$ × ک فرلا = وغیرہ ]

۲۸۱ــ ایک یکساں مستدیر پتلی تختی ہے جس کا نصف قطر ا، اور موٹائی ک ہے۔ تختی کے محور پر ایک نقطہ ن ہے جس کا فاصلہ مرکز سے ع ہے۔ نقطہ ن پر تختی کی کشش دریافت کرو۔




تختی کے اس حصہ پر غور کرو جو دو ہم مرکز دائروں نصف قطر لا اور لا + مف لا کے درمیان واقع ہو۔ اس حصہ کے کسی نقطہ ق کی کشش ن پر کی اکائی کمیت پر ن ق کی سمت میں ہے اور اس کا جزو تحلیلی ن و کی سمت میں

$= \text{جہ} \frac{\text{ق پر کے جزو کی کمیت}}{\text{ن ق}^2} \times \text{جم و ن ق}$

$= \text{جہ} \times \frac{\text{ق پر کے جزو کی کمیت}}{\text{ن ق}^2} \times \frac{\text{ع}}{\text{ن ق}}$

یہ جزوی رقبہ کے ہر ایک نقطہ کے لئے درست ہے۔
اس لئے اس جزوی رقبہ کی حاصل کشش

$= \text{جہ} \frac{\text{۲ ٣ لا × مف لا × ک م}}{\text{ن ق}^3} \times \text{ع} = \text{۲ ٣ جہ ک م ع} \frac{\text{لا مف لا}}{(\text{لا}^2 + \text{ع}^2)^{\frac{3}{2}}}$

جہاں م تختی کی کثافت ہے فی اکائی رقبہ
اس لئے کل تختی کی کشش

$= \text{۲ ٣ جہ ک م ع} \int_0^{\text{ا}} \frac{\text{لا فرلا}}{(\text{لا}^2 + \text{ع}^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{۲ ٣ جہ ک م ع} \left[ - \frac{1}{(\text{لا}^2 + \text{ع}^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^{\text{ا}}$

$$= ۲\pi جہ ک م \left[ ۱ - \frac{ع}{(\text{ا}^۲ + ع^۲)^{\frac{۱}{۲}}} \right] = ۲\pi جہ ک م ع \left[ \frac{۱}{ع} - \frac{۱}{(\text{ا}^۲ + ع^۲)^{\frac{۱}{۲}}} \right]$$

اگر تختی کے کسی نصف قطر و ا کے محاذی ن پر زاویہ عہ بنے تو

$$جم عہ = \frac{و ن}{ن ا} = \frac{ع}{\sqrt{\text{ا}^۲ + ع^۲}}$$

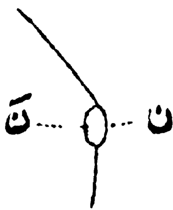
اور تختی کی حاصل کشش جو صریحاً ن و کی سمت میں عمل کرتی ہے

$$= ۲\pi جہ ک م [۱ - جم عہ]$$

**نتیجہ صریح** - فرض کرو کہ تختی کا نصف قطر لا متناہی ہو جاتا ہے اور بنا بریں زاویہ عہ ۹۰° ہو جاتا ہے۔ تب حاصل کشش ۲ π جہ ک م ہے جو تختی سے نقطہ ن کے فاصلہ ع کے غیر تابع ہے۔

پس ایک لا متناہی پتلی تختی کی کشش کسی نقطہ ن پر جو تختی سے محدود فاصلہ پر ہو ن کے فاصلہ پر منحصر نہیں ہوتی اور حاصل ضرب ۲π جہ تختی کی کمیت فی اکائی رقبہ کے مساوی ہوتی ہے۔

۲۸۲- اکائی کمیت کا ایک ذرہ ایک پتلی کشش کرنے والی سطح میں سے ایک جانب سے دوسری جانب عمود وار گزرتا ہے۔ بتاؤ کہ ذرہ پر سطح کی کشش میں کیا تبدیلی واقع ہوتی ہے۔



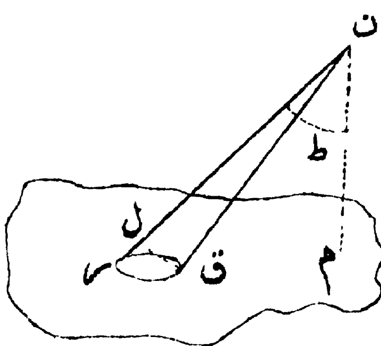

فرض کرو کہ سطح کے مختلف جانبوں پر دو نقطے ن نَ ایسے ہیں جو سطح کے لا انتہا قریب ہیں اور ن نَ سطح مذکور پر عماد ہے۔ سطح پر ایک چھوٹا سا دائرہ ایسا کھینچو جس کا محور ن نَ ہو اور جس کا رقبہ ا ہو سطح کے باقی ماندہ حصہ کو ب سے موسوم کرو۔

تب ن پر کی کشش = ا کی کشش ن پر + ب کی کشش ن پر ...... (۱)

اور نَ پر کی کشش = ا کی کشش نَ پر + ب کی کشش نَ پر ... (۲)
تب چونکہ ن اور نَ دونوں سطح کے لا انتہا قریب ہیں اس لئے انتہا میں سطح کے حصہ ب کی کشش نقطہ ن پر = حصہ ب کی کشش نقطہ نَ پر۔ نیز کشش کی حد تک حصہ ا کو نقطہ ن سے وہی نسبت ہے جو ایک لا متناہی مستوی کو محدود فاصلہ پر کے ایک نقطہ سے ہے۔
اور حسب سابق دفعہ حصہ ا کی کشش ن پر = ۲ π حہ مرک
اور حصہ ا کی کشش نَ پر = -۲ π حہ مرک

اس لئے (۱) اور (۲) سے عمل تفریق سے حاصل ہوتا ہے
ن پر کی کشش - نَ پر کی کشش = ۴ π حہ مرک
اس لئے جب اکائی کمیت کا ذرہ کسی پتلی سطح کے ایک جانب کے لا انتہا قریب نقطہ سے سطح کے دوسری جانب لا انتہا قریب نقطہ تک سطح کے علی القائم گزرتا ہے تو سطح کی جو کشش اس ذرہ پر ہے اس میں بقدر ۴ π حہ مرک کے تبدیلی واقع ہو جاتی ہے اور بناءً علیہ یہ تبدیلی سطح کی موٹائی اور مقام گزر کی کثافت پر منحصر ہوتی ہے۔

۴۲۸ - ثابت کرو کہ ایک مستوی پترے کی بیرونی نقطہ پر کشش کا پترے کی عماد کی سمت میں جزو تحلیلی حہ م سہ ہوگا جہاں پترے کی فی اکائی رقبہ کمیت م ہے اور سہ وہ مجسم زاویہ ہے جو پترے کے محاذی ن پر بنتا ہے۔




فرض کرو کہ ق سا پترے کا کوئی بہت چھوٹا جزو ہے جس کے محاذی ن پر مجسم زاویہ سف سہ بنتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ ن ق یا

ن سا = ر

تب انتہا میں ن پر اس جزو کی کشش = جہ م × رقبہ سا ف / ن ق^۲

ن م پترے پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ ق ل خط ن سا پر عمود ہے

تب ∠ سا ق ل = ۹۰ − ∠ ق سا ل = ∠ سا ن م = طہ

ن پر ق سا کی کشش کا جزو تحلیلی ن م کی سمت میں

= جہ م × رقبہ سا ق × جم طہ / ن ق^۲ = جہ م × رقبہ ق ل / ن ق^۲ = جہ م × مف سہ

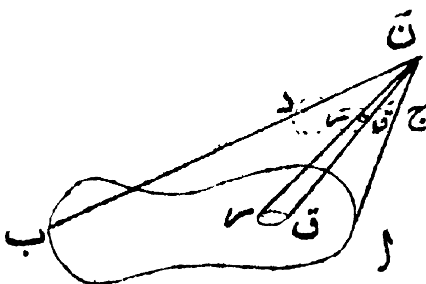
پس پترے پر علی القوائم سمت میں ن پر پترے کی کشش کا جزو تحلیلی

= Σ جہ م × مف سہ = جہ م سہ جہاں سہ وہ مجسم زاویہ ہے

جو کل پترے کے محاذی ن پر بنتا ہے۔

۴۲۸ - ایک یکساں مخروط کے تمام مقطوع جن کی موٹائی مساوی ہے اور جن کے مستوی رخ مخروط کے قاعدہ کے متوازی ہیں مخروط کے راس پر مساوی کشش رکھتے ہیں۔

فرض کرو کہ ا ب اور ج د ایک مخروط کی دو تراشیں ہیں جو مخروط کے قاعدہ کے متوازی ہیں اور جن کی موٹائیاں ایک چھوٹی مقدار د کے مساوی ہیں۔




فرض کرو کہ ایک چھوٹا مخروط جس کا راس ن اور راسی زاویہ بہت چھوٹا ہے، ان تراشوں کو بہت چھوٹے منحنیات ق سا اور ق سا میں قطع کرتا ہے۔

چونکہ ق سا اور قَ سَا متشابہ منحنی ہیں اس لئے اُن کے رقبے اور بناءً علیہ ان کی موٹائیاں مساوی ہونے کی وجہ سے اُن کی کمیتیں، راس ن سے ان منحنیوں کے فاصلوں کے مربعوں کے متناسب ہونگی۔

اس لئے

$$\frac{\text{ن پر ق سا کی کشش}}{\text{ن پر قَ سَا کی کشش}} = \frac{\text{رقبہ ق سا}}{\text{ن ق}^2} \div \frac{\text{رقبہ قَ سَا}}{\text{ن قَ}^2}$$

$$= \frac{\text{رقبہ ق سا}}{\text{رقبہ قَ سَا}} \times \frac{\text{ن قَ}^2}{\text{ن ق}^2} = \frac{\text{ن ق}^2}{\text{ن قَ}^2} \times \frac{\text{ن قَ}^2}{\text{ن ق}^2} = ۱$$

چونکہ متناظر اجزا ق سا اور قَ سَا کی کششیں مساوی ہیں اس لئے کل رقبوں ا ب اور ج د کی کششیں لحاظ مقدار اور سمت کے برابر ہونگی۔

اس لئے عمل جمع سے ایک ہی موٹائی کے دو ناقص مخروطوں کی کشش اُس مخروط کے راس پر جس سے یہ ناقص مخروط حاصل کئے گئے ہوں مساوی ہوتی ہے۔

۲۸۵ — **مشق ۱**۔ ایک یکساں مجسم قائم مستدیر مخروط ہے جس کی بلندی ھ اور راسی زاویہ ۲ عہ ہے۔ اس کی کشش اس مخروط کے مستوی قاعدہ کے مرکز د پر معلوم کرو۔

اگر قاعدہ کے اوپر اونچائی لا پر ایک مستوی تراش لی جائے اور اس کے محاذی مرکز و پر زاویہ ۲ بہ بنے تو

$$\text{جم بہ} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + (\text{ھ} - \text{لا})^2 \text{مس}^2 \text{عہ}}} = \frac{\text{لا جم عہ}}{\sqrt{\text{لا}^2 - ۲\text{ھ لا جب}^2\text{عہ} + \text{ھ}^2 \text{جب}^2\text{عہ}}}$$

اگر اس تراش کی موٹائی سف لا ہو تو اس کی کشش

$$= ۲\pi \text{ جہ ھ سف لا} \left[ ۱ - \frac{\text{لا جم عہ}}{\sqrt{\text{لا}^2 - ۲\text{ھ لا جب}^2\text{عہ} + \text{ھ}^2\text{جب}^2\text{عہ}}} \right]$$

دفعہ ۲۸۱ کی رو سے

اس لئے کل مخروط کی کشش

= ۲ π جہ مر ∫ (ھ / ہ) [ ۱ - لا جم عہ / √((لا - ھ جب^۲ عہ)^۲ + ھ^۲ جب^۲ عہ جم^۲ عہ) ] ڈ لا

ما = لا - ھ جب^۲ عہ رکھنے سے یہ کشش

= ۲ π جہ مر ∫ (- ھ جب^۲ عہ ... ھ جم^۲ عہ) [ ۱ - (ما + ھ جب^۲ عہ) جم عہ / √(ما^۲ + ھ^۲ جب^۲ عہ جم^۲ عہ) ] ڈ ما

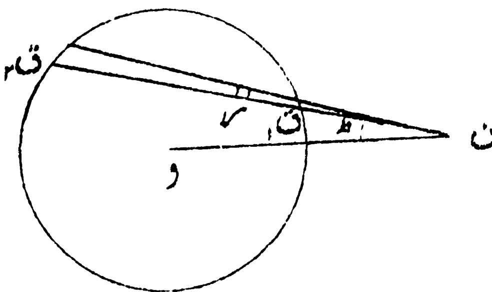
= ۲ π جہ مر [ ما - جم عہ √(ما^۲ + ھ^۲ جب^۲ عہ جم^۲ عہ)

- ھ جب^۲ عہ جم عہ لوک (ما + √(ما^۲ + ھ^۲ جب^۲ عہ جم^۲ عہ)) ] (- ھ جب^۲ عہ ... ھ جم^۲ عہ)

= ۲ π جہ مر ھ جب عہ [ جب عہ + جم عہ - جب عہ جم عہ لوک (جم عہ + جم^۲ عہ) / (جب عہ - جب^۲ عہ) ]

مشق ۳ - اگر کشش کا کلیہ متقارب فاصلہ کا ہو تو ایک یکساں مستدیر قرص کی کشش اسکی سطح مستوی پر کے ایک بیرونی نقطہ پر معلوم کرو۔

اس یا سے ایک یکساں لا انتہا مستدیر اسطوانہ کی کشش محسوب کرو جو قدرت کے کلیہ کے مطابق کشش کرتا ہے۔




فرض کرو کہ قرص کا نصف قطر ا کثافت مر اور موٹائی ک ہے اور دائرہ کے مرکز و سے معلومہ نقطہ ن کا فاصلہ ج ہے۔ نیز فرض کرو کہ ن میں سے گزرنے والا کوئی سمتی نیم قطر و ن کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہے تب قرص کی مجموعی کشش

= ۲ ∫∫ جہ × (ر ڈ ر ڈ ط / ر) × مر ک جم ط جہاں ر کی حدود ن ق۱ سے ن ق۲ تک یعنی

$$\text{ج}_\text{،}\ \text{جم طہ} - \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ج}^2_\text{،}\ \text{جب}^2\ \text{طہ}} \quad \text{اور} \quad \text{ج}_\text{،}\ \text{جم طہ} + \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ج}^2_\text{،}\ \text{جب}^2\ \text{طہ}}$$

اور طہ کی حدود صفر سے $\text{جب}^{-1} \frac{\text{ا}}{\text{ج}_\text{،}}$ ہیں۔

$$\text{پس کشش مطلوبہ} = \text{۴ جہ ک ء} \int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ج}^2_\text{،}\ \text{جب}^2\ \text{طہ}} \times \text{جم طہ ف طہ}$$

$$= \frac{\text{۴ جہ ک ء ا}^2}{\text{ج}_\text{،}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^2\ \text{فہ ف فہ} \qquad \text{اگر ج}_\text{،}\ \text{جب طہ} = \text{ا جب فہ}$$

$$\text{اس لئے کشش} = \frac{\pi\ \text{جہ ک ء ا}^2}{\text{ج}_\text{،}} = \text{جہ} \times \frac{\text{قرص کی کمیت}}{\text{مرکز سے فاصلہ}}$$

پس ن پر کشش اُس کشش کے مساوی ہے جو قرص کی جملہ کمیت کو و پر مکثف کر دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

اب فرض کرو کہ دائرہ مذکور ایک لامتناہی طول کے اسطوانہ کی عمودی تراشش ہے اب س میں سے گزرنے والے لامتناہی طول کے ریشے کی کشش کا وہ جزو تحلیلی جو کاغذ کی سطح کے علی القوائم ہے دفعہ ۲۷۷ کے نتیجہ صریح کی رو سے

$$= \frac{\text{۲ جہ ر ممت طہ ممت ر} \times \text{ء}}{\text{ن س}} \ \text{سمت ن س میں}$$

پس اس لامتناہی اسطوانہ کی کشش قرص کی کشش کے مساوی ہے بشرطیکہ ہم ک کی بجائے ۲ لکھدیں اور اس لئے $= \frac{\text{۲}\pi\ \text{جہ ء ا}^2}{\text{ج}_\text{،}}$.

اگر ن اسطوانہ کی سطح پر واقع ہو اور بناءً علیہ ج، = ا تو یہ کشش ہو جاتی ہے ۲π جہ ء ا۔ اس سے ہمیں ایک پتلی سلاخ کی کشش اس کی سطح پر کے کسی نقطہ پر حاصل ہوتی ہے [دفعہ ۲۷۸ سے مقابلہ کرو]

$$\text{اگر ن اسطوانہ کے اندر ہو تو اس پر کی کشش} = \text{۲} \times \iint \text{۲ جہ ء فر ء فرطہ} \times \text{جم طہ}$$

جہاں ر کی حدود صفر سے $\text{ج}_\text{،}\ \text{جم طہ} + \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ج}^2_\text{،}\ \text{جب}^2\ \text{طہ}}$ تک ہیں اور طہ کی صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک۔

اس سے بآسانی ن پر کشش ۲ π جہ ھر ج، حاصل ہوتی ہے۔

## مثالیں

۱۔ ایک یکساں اسطوانہ ہے جس کی بلندی ھ، نصف قطر ا اور کثافت ھر ہے۔ اس کے محور پر اس کے باہر ایک نقطہ ن ہے جس کا فاصلہ اس کے سرے سے ج، ہے۔

ثابت کرو کہ اسطوانہ کی کشش اس نقطہ پر ۲ π ھر $\left[ \text{ھ} - \sqrt{\text{ا}^2 + (\text{ج}_1 + \text{ھ})^2} + \sqrt{(\text{ا}^2 + \text{ج}_1^2)} \right]$ جہ ہے۔

۲۔ ایک کرہ میں سے جس کا نصف قطر ا اور کثافت ھر ہے ایک قطعہ کاٹا گیا ہے ثابت کرو کہ اس قطعہ کی کشش اس کے راس پر ایک اکائی کمیت کے ذرہ پر

$$2\pi\, \text{جہ ھر ھ} \left[ 1 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\text{ھ}}{\text{ا}}} \right]$$ ہے اور اس قطعہ کے قاعدہ کے مرکز پر

$$\frac{2\pi\, \text{جہ ھر}}{3(\text{ا} - \text{ھ})^2} \left[ 3\text{ا}^2 - 3\text{ا ھ} + \text{ھ}^2 - \text{ھ}^{\frac{1}{2}} (2\text{ا} - \text{ھ})^{\frac{3}{2}} \right]$$ ہے جہاں ھ قطعہ مذکور کی بلندی ہے

۳۔ ایک ٹھوس یکساں نصف کرہ ہے جس کا نصف قطر ا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے محور کے ایک نقطہ پر نصف کرہ کی کشش صفر ہے جہاں اس نقطہ کا مرکز سے فاصلہ ج، مساوات $3\text{ا ج}_1^4 - 8\text{ا}^3\text{ج}_1 + 3\text{ا}^4 = 0$ کی اصل ہے۔

ثابت کرو کہ $\text{ج}_1 = \frac{3\text{ا}}{7}$ تقریباً

۴۔ ایک قائم مستدیر مخروط ہے جس کی کثافت ھر ہے۔ اس کا محور انتصابی اور راس اوپر کی طرف ہے اس کے محور پر راس سے ج، فاصلہ پر ایک نقطہ ن ہے۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ پر مخروط کی کشش ہے

$$2\pi\, \text{جہ ھر ج}_1 \text{ جب عہ جم عہ} \left\{ \frac{\text{جم بہ} - \text{جم عہ}}{\text{جب بہ}} - \text{جب عہ لوگ} \left( \text{مس} \frac{\text{عہ}}{2} \text{ مم} \frac{\text{بہ}}{2} \right) \right\}$$

جہاں ۲ عہ مخروط کا راسی زاویہ ہے اور عہ - بہ وہ زاویہ ہے جو قاعدہ کے نصف قطر کے محاذی ن پر بنتا ہے۔

۵۔ ایک یکساں مجوف پتلے متقطوع مخروط جن کے مستوی سروں کے نصف قطر $\text{ر}_1$ اور ر

ہیں۔ مخروط کے نقطہ راس پر اکائی کمیت کا ایک ذرہ ہے جسے مقطوع مخروط کھینچتا ہے۔ ثابت کرو کہ کشش ۲ π ج م جب ع جم ع لوک $\frac{\text{ر}}{\text{ر}_1}$ ہے جہاں ۲ ع مخروط کا راسی زاویہ ہے اور م مخروط کی سطحی کثافت ہے

۶ ـ ایک متجانس قایم مستدیر اسطوانہ ہے جس کا طول ایک سمت میں لامتناہی ہے اور دوسرے سرے کی تراش مکونوں پر علی القوائم ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ کی کشش اس سرے کے مرکز پر $\frac{\text{۲ ج م}}{\text{ا}}$ ہوگی جہاں م کمیت ہے اسطوانہ کی فی اکائی طول اور ا اسطوانہ کے مستوی سرے کا نصف قطر ہے۔

۷ ـ ایک انتصابی ٹھوس اسطوانہ ہے جس کی بلندی ا ہے اور جس کے سرے کا نصف قطر ر ہے۔ اس کی کثافت م ہے اور اس کے سرے اس کے مکونوں پر علی القوائم ہیں۔ اس کو اس کے محور میں سے گزرنے والی سطح مستوی سے دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ایک حصہ کی کشش اس کے قاعدہ کے مرکز پر ۲ ج ا م لوک $\frac{\text{ر} + \sqrt{\text{ر}^2 + \text{ا}^2}}{\text{ا}}$ ہے۔ نیز معلوم کرو کہ حاصل کشش محور کے ساتھ کیا زاویہ بناتی ہے۔

۸ ـ ایک متجانس منشور کا طول لامتناہی ہے۔ اس کی تراش ایک مساوی الاضلاع مثلث ا ب ج ہے۔ ثابت کرو کہ منشور کی کشش ا پر $\frac{\text{۴ ج } \pi \text{ م}}{\text{۳ ا}}$ ہے جہاں م منشور کی فی اکائی طول کمیت ہے اور ا مثلث کے ایک ضلع کا طول ہے۔

۹ ـ ایک ناقصی قرص کی موٹائی ک اور کثافت م ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی کشش اسکہ پر ۲ π ج ک م $\sqrt{\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا} + \text{ب}}}$ ہے جہاں ۲ ا اور ۲ ب اس کے نیم محور ہیں۔

[مطلوبہ کشش = $\iint \frac{\text{ج ک م ر فر فط}}{\text{ر}^2}$ جم ط، جہاں ر کی حدود صفر سے $\frac{\text{ل}}{\text{۱ ـ ز جم ط}}$ اور ط کی حدود صفر سے ۲ π ہیں۔ اس طرح دوران عمل میں ایک لامتناہی مقدار لوک ر آجاتی ہے جبکہ ر صفر ہے۔ اس سے بچنے کے لئے اسکہ کے گرد ایک دائرہ کھینچو

جس کا نصف قطر < ا (ا - ز) ہو - اس دائرہ کی حاصل کشش صریحاً تشاکل سے صفر ہے - اب تکملہ کی قیمت معلوم کرو جبکہ ر کی حدود ل سے $\frac{\text{ل}}{\text{ا - ز جم ط}}$ ہیں اور ط کی حدود صفر سے ۲π ہیں -]

۱۰ — ایک ناقصی قرص کی کمیت م اور نیم محور ا اور ب ہیں اس مفروضہ پر کہ کلیہ کشش $\frac{\text{م م}}{\text{فاصلہ}}$ ہے ثابت کرو کہ نقطہ (لا، ما) پر اس کی کشش کے اجزائے ترکیبی محوروں کی سمتوں میں $\frac{\text{۲ م م}}{\text{ا + ب}} \times \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ اور $\frac{\text{۲ م م}}{\text{ا + ب}} \times \frac{\text{ما}}{\text{ب}}$ ہیں -

اس سے مستنبط کرو کہ ایک لامتناہی متجانس ناقصی اسطوانہ کی کشش کے (جو کلیہ قدرت کے مطابق ہے) اجزائے ترکیبی نیم محوروں کے متوازی $\frac{\text{۴ جـ } \pi \text{ ھ ا ب}}{\text{ا + ب}} \times \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$

اور $\frac{\text{۴ } \pi \text{ جـ ھ ا ب}}{\text{ا + ب}} \times \frac{\text{ما}}{\text{ب}}$ ہونگے

جہاں ا اور ب تراش کے نیم محور ہیں اور ھ کثافت ہے -

۱۱ — ثابت کرو کہ نصف قطر ا کے ایک مستدیر قرص کی کشش جس کا کلیہ تجاذب $\frac{\text{م م}}{(\text{فاصلہ})^{۳}}$ ہے $\frac{\text{م م}}{\text{ج}_۱ (\text{ج}_۱^۲ - \text{ا}^۲)}$ یا $\frac{\text{م م ج}_۱}{\text{ا}^۲ (\text{ا}^۲ - \text{ج}_۱^۲)}$ ہوگی بجب اس کے کہ $\text{ج}_۱ \gtrless \text{ا}$ -

م قرص کی کمیت ہے اور مجذوب نقطہ قرص کے مستوی میں واقع ہے اور مرکز سے فاصلہ $\text{ج}_۱$ پر ہے -

۱۲ — ایک یکساں مستدیر مستوی حلقہ کی کشش اس کی سطح مستوی میں کسی بیرونی نقطہ پر معلوم کرو جبکہ کشش کا قانون فاصلہ کی ساتویں قوت کا مقلوب ہے -

۲۸۶ — ایک پتلے یکساں کروی خول کی کشش کسی اندرونی یا بیرونی نقطہ ن پر معلوم کرو -

فرض کرو کہ کروی خول کا نصف قطر ا ہے، گ اور ھ بالترتیب اسکی

موٹائی اور کثافت ہیں اور ج١ نقطہ ن کا کرہ کے مرکز و سے فاصلہ ہے اگر ق خول پر کا کوئی نقطہ ہو، ق ل خط و ن پر عمود ہو اور طہ = ∠ ن و ق

تو جس دائرہ کا نصف قطر ل ق ہے اس پر کے سب نقطے ن سے متساوی الفصل ہونگے اور ن پر ہر ایک کی کشش کا جزو تحلیلی ن و کی سمت میں ∝ جم فہ / ن ق٢

اس لئے خول کا جو حصہ قوس ا١ مف طہ سے مرتسم ہوتا ہے اس کی حاصل کشش

= جہ ک مر (ا١ مف طہ × ٢ $\pi$ ا١ جب طہ) / ن ق٢ × جم فہ

اب س١٢ = ا١٢ + ج١٢ − ٢ ا١ ج١ جم طہ

اس لئے س١ مف س١ = ا١ ج١ جب طہ مف طہ

اس لئے اس جزوی حصہ کی کشش

= ٢ $\pi$ جہ ک مر × ا١/ج١ × جم فہ/س١ × مف س١ = $\pi$ جہ ک مر × ا١/ج١٢ ((س١٢ + ج١٢ − ا١٢) / س١٢) مف س١

اولاً فرض کرو کہ ن خول کے باہر ہے یعنی ج١ > ا١۔

اس لئے اگر ہم اوپر کی مقدار کو س١ کی قیمتوں ن ا سے ن ب تک یعنی (ج١ − ا١) سے (ج١ + ا١) تک تکمل کریں تو ہمیں کل خول کی حاصل کشش معلوم ہو جائے گی۔

$$\therefore \text{حاصل کشش} = \int_{\text{ج}_1-\text{ا}_1}^{\text{ج}_1+\text{ا}_1} \pi\,\text{ج ک م}\,\frac{\text{ا}_1}{\text{ج}_1^2} \times \left(\frac{\text{س}^2+\text{ج}_1^2-\text{ا}_1^2}{\text{س}^2}\right) \text{د س}$$

$$= \pi\,\text{ج ک م}\,\frac{\text{ا}_1}{\text{ج}_1^2}\left[\text{س} - \frac{\text{ج}_1^2-\text{ا}_1^2}{\text{س}}\right]_{\text{ج}_1-\text{ا}_1}^{\text{ج}_1+\text{ا}_1}$$

$$= \pi\,\text{ج ک م}\,\frac{\text{ا}_1}{\text{ج}_1^2}\left[(\text{ج}_1+\text{ا}_1)-(\text{ج}_1-\text{ا}_1)-\frac{\text{ج}_1^2-\text{ا}_1^2}{\text{ج}_1+\text{ا}_1}+\frac{\text{ج}_1^2-\text{ا}_1^2}{\text{ج}_1-\text{ا}_1}\right]$$

$$= \frac{4\pi\,\text{ج ک م}\,\text{ا}_1^2}{\text{ج}_1^2} = \text{ج}\,\frac{\text{کروی خول کی کمیت}}{\text{و ن}^2}$$

پس کشش اتنی ہی ہے جتنی کہ خول کی کل کمیت کو و پر مکثف کر دینے کی صورت میں ہوگی۔
ثانیاً فرض کرو کہ نقطہ ن خول کے اندر مقام $\text{ن}_1$ پر ہے اور اس لئے $\text{ج}_1 < \text{ا}_1$ ۔
اب تکمل کی حدود $\text{ن}_1$ ا سے $\text{ن}_1$ ب تک یعنی $\text{ا}_1 - \text{ج}_1$ سے $\text{ا}_1 + \text{ج}_1$ تک ہیں

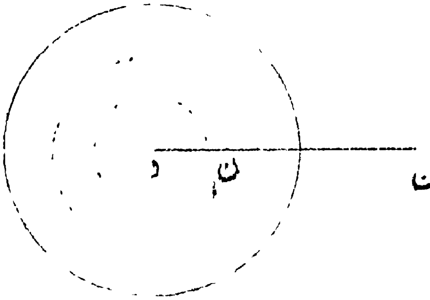
$$\text{پس حاصل کشش} = \frac{\pi\,\text{ج ک م}\,\text{ا}_1}{\text{ج}_1^2}\int_{\text{ا}_1-\text{ج}_1}^{\text{ا}_1+\text{ج}_1} \frac{\text{س}^2+\text{ج}_1^2-\text{ا}_1^2}{\text{س}^2}\,\text{د س}$$

$$= \frac{\pi\,\text{ج ک م}\,\text{ا}_1}{\text{ج}_1^2}\left[\text{س} + \frac{\text{ا}_1^2-\text{ج}_1^2}{\text{س}}\right]_{\text{ا}_1-\text{ج}_1}^{\text{ا}_1+\text{ج}_1}$$

$$= \frac{\pi\,\text{ج ک م}\,\text{ا}_1}{\text{ج}_1^2}\left[(\text{ا}_1+\text{ج}_1)-(\text{ا}_1-\text{ج}_1)+\frac{\text{ا}_1^2-\text{ج}_1^2}{\text{ا}_1+\text{ج}_1}-\frac{\text{ا}_1^2-\text{ج}_1^2}{\text{ا}_1-\text{ج}_1}\right] = 0$$

پس یکساں پتلا کروی خول، بیرونی نقطہ کو اس طرح کھینچتا ہے گویا کہ اس خول کی کل کمیت مرکز پر مکثف ہے لیکن اندرونی نقطہ پر اس کی کشش صفر ہوتی ہے۔

۲۸۷ - ایک یکساں ٹھوس کرہ کی کشش کسی بیرونی یا اندرونی نقطہ پر معلوم کرو۔
یہ تصور کرو کہ کرہ ہم مرکز خولوں کی لاتناہی تعداد سے بنا ہوا ہے جن میں سے ہر ایک کی موٹائی لاانتہا کم ہے۔




اگر نقطہ ن کرہ کے باہر ہو تو یہ ان خولوں میں سے ہر ایک کے باہر ہوگا اور حسب سابق ہر ایک خول کی کشش ن پر اتنی ہی ہوگی جتنی کہ خول کی کل کمیت کو و پر مکثف کر دینے سے ہوتی یعنی

$$= \text{جہ}\ \frac{\text{خول کی کمیت}}{(\text{و ن})^2}$$

اس لئے ن پر کل کشش

$$= \text{جہ}\ \frac{\text{کل خولوں کی کمیتوں کا مجموعہ}}{(\text{و ن})^2} = \text{جہ}\ \frac{\text{کل کرہ کی کمیت}}{(\text{و ن})^2}$$

پس بیرونی نقطہ پر ٹھوس کرہ کی کشش اتنی ہے جتنی کہ کرہ کی کل کمیت کو و پر مکثف کر دینے سے ہوتی۔

اگر نقطہ کرہ کے اندر واقع ہو جیسا کہ $\text{ن}_1$ پر تو ہم دیکھ چکے ہیں کہ ان سب خولوں کی کشش $\text{ن}_1$ پر جن کا نصف قطر $\text{و ن}_1$ سے بڑا ہے صفر ہے۔ اس لئے ہمیں صرف انہی خولوں کی کشش کو محسوب کرنا چاہیئے جن کا نصف قطر ما $\text{و ن}_1$ یعنی $\text{ج}_1$ سے کم ہے۔

موخر الذکر خولوں کے لئے $\text{ن}_1$ ایک بیرونی نقطہ ہے اور ان میں سے کسی ایک خول (نصف قطر ما) کی کشش $\text{ن}_1$ پر

$$= \text{جہ} \times \frac{\text{خول کی کمیت}}{(\text{و ن}_1)^2} = \text{جہ}\ \frac{4\pi\, \text{ما}^2\, \text{ف ما} \times \text{ھ}}{\text{ج}_1^2}$$

ہمیں اس مقدار کو ما کی قیمت صفر سے لیکر $\text{ج}_1$ تک کے لئے تکمل کرنا چاہیئے

اس لئے حاصل کشش $\text{ن}_1$ پر

$$= \frac{4\pi\, \text{جہ}\, \text{ھ}}{\text{ج}_1^2} \int_0^{\text{ج}_1} \text{ما}^2\, \text{ف ما} = \frac{4}{3}\pi\, \text{جہ}\, \text{ھ}\, \text{ج}_1$$

اس لئے کسی اندرونی نقطہ پر خول کی کشش ایسے بدلتی ہے جیسے مرکز سے اس نقطہ کا فاصلہ۔

۲۸۸ — ایک کروی خول کی کشش۔ ہندسی ثبوت۔

فرض کرو کہ ن کوئی بیرونی نقطہ ہے اور ق اس کا مقلوب نقطہ ہے۔

لہذا $\text{وق} \times \text{ون} = \text{وا}^2 = \text{ا}^2$

ایک چھوٹا سا مخروط کھینچو جس کا راس ق پر ہو اور کرہ کو بہت چھوٹے چھوٹے رقبوں ر س اور ر' س' پر قطع کرے۔

چونکہ $\text{ون} \times \text{وق} = \text{ا}^2 = \text{ور}^2$

$$\therefore \frac{\text{وق}}{\text{ور}} = \frac{\text{ور}}{\text{ون}}$$

پس مثلث و ق ر اور و ر ن متشابہ ہیں۔

اسی طرح سے مثلث و ق ر' اور و ر' ن بھی متشابہ ہیں

اس لئے $\frac{\text{قر}}{\text{رن}} = \frac{\text{ور}}{\text{ون}} = \frac{\text{ور'}}{\text{ون}} = \frac{\text{قر'}}{\text{ر'ن}}$ . . . . . . (۱)

اور $\angle \text{ونر} = \angle \text{ورق} = \angle \text{ور'ق} = \angle \text{ونر'}$ . . . (۲)

پس $\frac{\text{ن پر رس کی کشش}}{\text{ن پر ر'س' کی کشش}} = \frac{\text{رقبہ رس}}{\text{رن}^2} \div \frac{\text{رقبہ ر'س'}}{\text{ر'ن}^2}$

$$= \frac{\text{رقبہ رس}}{\text{رقبہ ر'س'}} \times \frac{\text{ر'ن}^2}{\text{رن}^2}$$

اب س ق سَ پر س۱ ل اور سَ۱ لَ عمود نکالو

تب رقبہ س۱ س = عمودی تراش س۱ ل کا رقبہ × قطع (زاویہ ل س۱ س)

= عمودی تراش س۱ ل کا رقبہ × قطع (و س۱ ق)

کیونکہ و س۱ اور س۱ ق بالترتیب س۱ س اور س۱ ل پر عمود ہیں

اسی طرح سے رقبہ سَ۱ سَ = عمودی تراش سَ۱ لَ × قطع (و سَ۱ ق)

$$\therefore \frac{\text{رقبہ س۱س}}{\text{رقبہ سَ۱سَ}} = \frac{\text{عمودی رقبہ س۱ل}}{\text{عمودی رقبہ سَ۱لَ}} = \frac{\text{ق س۱}^2}{\text{ق سَ۱}^2}$$

$$\text{اس لئے}\ \frac{\text{س۱س کی کشش ن پر}}{\text{سَ۱سَ کی کشش ن پر}} = \frac{\text{ق س۱}^2 \times \text{سَ۱ن}^2}{\text{ق سَ۱}^2 \times \text{س۱ن}^2} = 1\ \text{مساوات (۱) کی مدد سے}$$

پس ان جزوی رقبوں کی کششیں ن پر مساوی ہیں اور مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ ان کے عمل کی سمتیں و ن کے ساتھ مساوی زاویے بناتی ہیں اس لئے ان کا حاصل و ن کی سمت میں عمل کرتا ہے۔

نیز اگر اس چھوٹے سے مخروط کا مجسم زاویہ جو ق پر بنتا ہے مف سہ ہو اور فی اکائی رقبہ خول کی کمیت ھ ہو تو

ن و کی سمت میں س۱ س کی کشش کا جزوِ ترکیبی

$$= \text{جہ م}\ \frac{\text{رقبہ س۱س}}{\text{ن س۱}^2} \times \text{جم و ن س۱} = \text{جہ م}\ \frac{\text{رقبہ س۱س} \times \text{جم و س۱ ق}}{\text{ن س۱}^2}$$

$$= \text{جہ م}\ \frac{\text{رقبہ س۱س} \times \text{جم ل س۱ س}}{\text{ن س۱}^2} = \text{جہ م}\ \frac{\text{رقبہ س۱ ل}}{\text{ن س۱}^2} = \text{جہ م}\ \frac{\text{ق س۱}^2\ \text{مف سہ}}{\text{ن س۱}^2}$$

$$= \text{جہ م مف سہ}\ \frac{\text{و۱}^2}{\text{و ن}^2}$$

$$\text{اس لئے خول کی مجموعی کشش} = \Sigma\ \text{جہ م مف سہ}\ \frac{\text{و۱}^2}{\text{و ن}^2} = \frac{\text{جہ م و۱}^2}{\text{و ن}^2}\ \Sigma\ \text{مف سہ}$$

$$= \frac{\text{جہ م ا}^2}{\text{و ن}^2} \times ۴\pi = \text{جہ} \frac{\text{خول کی کمیت}}{\text{و ن}^2}$$

چونکہ سر س اور سَر سَ کی کششیں مساوی ہیں اس لئے ظاہر ہے کہ مقلوب نقطہ ق کے دائیں طرف کا خول کا حصہ اور بائیں طرف کا خول کا حصہ ن کو مساوی قوت سے کھینچتے ہیں۔ نیز ق میں سے گزرنے والی وہ مستوی سطح جو و ن پر علی القوائم ہے ان تمام نقطوں کا طریق ہے جہاں ن سے خول پر کے مماس، خول کو مس کرتے ہیں بالفاظ دیگر یہ مستوی سطح بلحاظ خول کے ن کا قطبی مستوی ہے۔ پس ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ ن کی قطبی سطح مستوی خول کو جن دو حصوں میں تقسیم کرتی ہے ان کی کششیں ن پر مساوی ہوتی ہیں۔

ثانیاً۔ ق پر کی کشش پر غور کرو۔

$$\frac{\text{سر س کی کشش ق پر}}{\text{سَر سَ کی کشش ق پر}} = \frac{\text{رقبہ سر س}}{\text{ق سر}^2} \div \frac{\text{رقبہ سَر سَ}}{\text{ق سَر}^2} = \frac{\text{ق سر}^2}{\text{ق سَر}^2} \times \frac{\text{ق سَر}^2}{\text{ق سر}^2} = ۱$$

اس لئے سر س اور سَر سَ کی حاصل کشش ق پر صفر ہے۔ اسی طرح باقی ہر ایک جزوی مخروط کے لئے۔ پس کل خول کی کشش ق پر صفر ہے۔

نیز ق میں سے گزرنے والی اور و ا پر علی القوائم سطح مستوی کے دائیں اور بائیں طرف خول کے جو حصے ہیں ان کی کششیں ق پر مساوی ہیں۔

۴۸۹ ـ ایک بلند سطح کی چوٹی پر جس کی بلندی سطح سمندر سے لا ہے جاذبہ ارض کی قیمت معلوم کرو۔

اگر زمین کا نصف قطر $ا_۱$ ہو اور اس کی سطح پر جاذبہ ارض کی وجہ سے کشش ج ہو تو سطح سمندر سے بلندی لا پر کشش $\frac{\text{مہ}}{(ا_۱+\text{لا})^2}$ ہوگی جہاں ج $= \frac{\text{مہ}}{ا_۱^2}$

اور اس لئے یہ کشش

$$= \text{ج}\,\frac{\text{ا}_1^{2}}{(\text{ا}_1+\text{لا})^{2}} = \text{ج}\left[1-\frac{2\,\text{لا}}{\text{ا}_1}\right]$$ کیونکہ $\frac{\text{لا}}{\text{ا}_1}$ چھوٹا ہے

اگر سطح مرتفع کے مادہ کی کثافت م ہو (جبکہ سطح مرتفع کو متجانس فرض کر لیا جائے) تو اس کی کشش اس کی سطح کے قریب کے نقطہ پر دفعہ ۲۸۱ کی رو سے $2\pi\,\text{جہ}\,\text{لا}\,\text{م}$ ہوگی۔

اب اگر زمین کی اوسط کثافت ک ہو

$$\text{تو}\quad \text{ج} = \text{جہ}\,\frac{\frac{4}{3}\pi\,\text{ا}_1^{3}\,\text{ک}}{\text{ا}_1^{2}} = \frac{4\pi\,\text{جہ}\,\text{ک}\,\text{ا}_1}{3}$$

اس لئے سطح مرتفع کی کشش $= \frac{3}{2}\,\frac{\text{لا}\,\text{م}}{\text{ا}_1\,\text{ک}}\,\text{ج}$

اس لئے سطح مرتفع کی چوٹی پر کل کشش $\text{جَ}$

$$= \text{ج}\left[1-\frac{2\,\text{لا}}{\text{ا}_1}\right] + \frac{3}{2}\,\frac{\text{لا}\,\text{م}}{\text{ا}_1\,\text{ک}}\,\text{ج} = \text{ج}\left[1-\frac{2\,\text{لا}}{\text{ا}_1}+\frac{3}{2}\,\frac{\text{لا}\,\text{م}}{\text{ا}_1\,\text{ک}}\right]$$

اگر ہم تقریبی طور پر یہ مان لیں کہ سطح زمین کے نزدیک کی چٹانوں کی کثافت م کل زمین کی اوسط کثافت ک کا تقریباً نصف ہے تو اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جَ} = \text{ج}\left[1-\frac{5\,\text{لا}}{4\,\text{ا}_1}\right]$$

## ۲۹۰۔ تجاذب کے مستقل کی قیمت۔

دفعہ ۲۸۷ کے مسئلہ کی رو سے اور سطح زمین پر جاذبہ ارض کی وجہ سے اسراع کی معلومہ قیمت کی مدد سے ہم تجاذب کے مستقل کی تقریبی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

اگر اکائیوں کے کسی نظام کے بموجب زمین کا نصف قطر سا ہو اور اس کی کمیت م ہو تو زمین کی سطح پر کی اکائی کمیت پر اس کی کشش

$$= جـ \frac{م \times ۱}{سا^۲}$$

$$\therefore \; ج = جـ \frac{م}{سا^۲} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۱)$$

## سنتی میتر گرام سکنڈ اکائیاں :-

اس نظام میں $م = \frac{۴}{۳} \times \pi \, سا^۳ \times$ اوسط کثافت

اور $سا = ۶{،}۳۷ \times ۱۰^۸$ سنتی میتر

اب زمین کی اوسط کثافت اضافی مسٹر بواسے کی حال ہی کی تحقیقات کے بموجب ۵{،}۵۲۷ ہے۔

اس لئے (۱) سے

$$۹۸۱ = جـ \frac{۴}{۳} \pi \, سا \times ۵{،}۵۲۷ \times ۱$$

$$= جـ \frac{\pi ۴}{۳} \times ۶{،}۳۷ \times ۱۰^۸ \times ۵{،}۵۲۷$$

پس $جـ = ۶{،}۶۶ \times ۱۰^{-۸}$

یعنی اگر ایک ایک گرام کی کمیتوں کو دو نقطوں پر جن کا درمیانی فاصلہ ایک سنتی میتر ہو مکثف کر دیا جائے تو ان کے درمیان کشش $۶{،}۶۶ \times ۱۰^{-۸}$ ڈائن کے مساوی ہوگی۔

یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ ۳۸۷۷ گرام کی دو مساوی کمیتوں کو دو نقطوں پر جن کا درمیانی فاصلہ ایک سنتی میتر ہو مکثف کرنے سے ان کی باہمی کشش ایک ڈائن کے مساوی ہوگی۔

## فٹ پونڈ سکنڈ اکائیاں :-

اگر زمین کو تقریباً ۴۰۰۰ میل کے نصف قطر کا ایک کرہ فرض کیا جائے تو (۱) کے

بموجب ۲٫۲۳۲ = جہ $\frac{۲۲}{۳}$ × ۴۰۰۰ × ۵٫۲۸۰ × ۵٫۵۲۷ × ۵٫۵۲۷ × $\frac{۱}{۲}$ ۶۲

اس لئے جہ = ۱٫۰۵ × ۱۰$^{-۹}$ تقریباً

دو یکساں کروں کی کمیتیں ایک ایک پونڈ ہیں اور ان کے مرکزوں کے درمیان ایک فٹ کا فاصلہ ہے۔ ان کے درمیان کشش ۱٫۰۵ × ۱۰$^{-۹}$ پونڈل ہوگی۔

**جہ کے ابعاد۔** اگر جہ کے ابعاد کو [جا] سے تعبیر کیا جائے اور حسب معمول کمیت طول اور وقت کی اکائیوں کو [م] [ل] [ت] سے تعبیر کیا جائے تو مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$[ل] \times [ت]^{-۲} = [جا] \frac{[م]}{[ل]^{۲}}$$

$$\therefore [جا] = [م]^{-۱} [ل]^{۳} [ت]^{-۲}$$

## مثالیں

۱۔ چاندی کے ایک کرہ کا نصف قطر ۵٫۵ سنتی میٹر ہے اور سونے کے ایک کرہ کا نصف قطر ۳ سنتی میٹر ہے۔ ان کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ ۱۷ سنتی میٹر ہے چاندی کی کثافت اضافی $\frac{۱}{۲}$ ۱۰ اور سونے کی $\frac{۱}{۲}$ ۱۹ ہے۔

ثابت کرو کہ ان کے درمیان ایک نقطہ پر جس کا فاصلہ چاندی کے کرہ کے مرکز سے ۱۱ سنتی میٹر ہے دونوں کروں کی مجموعی کشش صفر ہے۔

۲ ۔ ترسیم کے ذریعے ایک ذرہ کا وزن ظاہر کرو جبکہ اُسے زمین کے مرکز سے باہر لایا جائے اور اسے بتدریج لاتناہی پر لے جائیں۔

۳ ۔ ثابت کرو کہ جاذبہ ارض کے زیر عمل کسی کمیت کو زمین کے مرکز سے اس کی سطح پر لانے میں جو کام سرانجام دینا پڑتا ہے وہ اتنا ہی ہوتا ہے جتنا کہ اسے سطح سے لاتناہی تک لے جانے میں سرانجام دینا پڑتا ہے۔ زمین کو متجانس کرہ مان لیا جائے۔

۴ــ اگر زمین کو کروی فرض کیا جائے اور اس کی سطح پر یکساں گہرائی ھ کا ایک سمندر فرض کیا جائے تو ثابت کرو کہ جاذبہ ارض کی قیمت سمندر کی تہ پر چوٹی کی بہ نسبت بقدر تقریباً ۴ ٣ جہ ھ ($\frac{۲}{۳}$ ک ـ مر) کے زیادہ ہوگی جہاں مر سمندر کی کثافت ہے اور ک زمین کی اوسط کثافت ہے۔

۵ــ اگر زمین کی نصف کمیت کو ایک نہایت ہی پتلے یکساں بیرونی خول میں مکثف کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ خول میں دائروی خلا کے مرکز پر جاذبہ ارض کی شدت اس کی معمولی قیمت کا ایک چوتھائی کم ہوگی۔

۶ــ ایک کرہ کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی سطح سے۔ ثابت کرو کہ حاصل کشش کرہ کے نصف قطر کی ایک تہائی گہرائی پر بڑی سے بڑی ہوگی اور اس کی قیمت وہاں سطح پر کی قیمت کا $\frac{۴}{۳}$ ہوگی۔

۷ــ اگر ایک کرہ یکساں کثافت کی ہم مرکز تہوں پر مشتمل ہو تو ثابت کرو کہ اس کی کشش اس کے حجم کے ہر نقطہ پر مساوی ہوگی بشرطیکہ ہر نقطہ پر کثافت مرکز سے فاصلہ کے بالعکس بدلتی ہو۔

۸ــ ایک ٹھوس کرہ کا نصف قطر ا ہے اس کے کسی نقطہ پر جس کا فاصلہ مرکز سے ر ہے اس کی کثافت ک $\left(\frac{ر}{ا}\right)^{ن}$ ہے کرہ کے کسی بیرونی یا اندرونی نقطہ پر کشش معلوم کرو۔

۹ــ اگر ایک ٹھوس کرہ کی کسی نقطہ پر کثافت مرکز سے اس نقطہ کے فاصلہ کا تفاعل ہو تو ثابت کرو کہ جیسے جیسے کرہ میں داخل ہوں کرہ کی کشش بڑھتی جاتی ہے بشرطیکہ سطح پر کی کثافت کرہ کی اوسط کثافت کے دو تہائی سے کم ہو۔

۱۰ــ ایک پتلے یکساں نصف کروی خول کا نصف قطر ا اور کمیت م ہے اس کے اس قطر پر جو خول کے کنارے کے مستوی پر عمود وار ہے ایک نقطہ لیا گیا ہے جس کا فاصلہ مرکز سے لا ہے ثابت کرو کہ اس نقطہ پر خول کی کشش ہے

$$\frac{جم}{لا^۲}\left[۱ - \frac{ا}{\sqrt{ا^۲ + لا^۲}}\right]$$

۱۱ــ ایک ٹھوس متجانس نصف کرہ کے مستوی قاعدہ کے کنارے پر کوئی نقطہ و لیا گیا ہے۔

نصف کرہ کی کشش اس نقطہ پر معلوم کرو۔

محددوں کا مبدا و لو۔ قاعدہ کے مرکز ج میں سے ایک خط و لا لو اور و ی اس قاعدہ پر عمود وار کھینچو۔ تب قطبی محدد (ر، طہ، فہ) استعمال کرنے سے و ی کی سمت میں کشش

$$= \iiint ج م \frac{فر \times ر\, فرطہ \times ر\, جب\, طہ\, فرفہ}{ر^2} جم\, طہ$$

ر کی حدود صفر سے ۲ ا جم فہ جب طہ ہیں کیونکہ کرہ کی سطح کی مساوات ہے

$(لا - ا)^2 + ما^2 + ی^2 = ا^2$ یعنی $ر^2 = ۲\, ا\, لا = ۲\, ا\, ر\, جم\, فہ\, جب\, طہ$

طہ کی حدود صفر سے $\frac{\pi}{۲}$ ہیں اور فہ کی $-\frac{\pi}{۲}$ سے $\frac{\pi}{۲}$ ہیں۔

اس لئے ہے $= ج م \iint ۲\, ا\, جم\, فہ\, جب^2\, طہ\, جم\, طہ\, فرطہ\, فرفہ = \frac{۴\, ا\, ج\, م}{۳}$

مرکز کی سمت میں کشش کا جزو ترکیبی لا

$$= \iiint ج م \frac{فر \times ر\, فرطہ \times ر\, جب\, طہ\, فرفہ}{ر^2} جم\, فہ \times جب\, طہ = \frac{۲ \pi\, ج\, م\, ا}{۳}$$

یہ نتیجہ از خود ظاہر ہے کیونکہ صریحاً نصف کرہ کی کشش و ج کی سمت میں مکمل کرہ کی کشش کا نصف ہوگی۔

تشاکل سے ظاہر ہے کہ کشش و ما کی سمت میں صفر ہے۔

پس حاصل کشش $\frac{۲\, ج\, م\, ا}{۳} \times \sqrt{۱۶ + \pi^2}$ ہے جو و ج کے ساتھ زاویہ $مس^{-1} \frac{۲}{\pi}$ بناتی ہے۔

۱۲ — ایک نصف کروی پہاڑی کا نصف قطر ا اور کثافت م ہے ثابت کرو کہ اس کے قاعدہ کے جنوب تر نقطہ پر ظاہری عرض بلد میں بقدر $\frac{۱}{۴} \frac{م\, ا}{ک\, ر}$ کی کمی ہو جاتی ہے جہاں ک اوسط کثافت اور ر نصف قطر ہے زمین کا۔

۱۳ — اگر زمین کے شمالی اور جنوبی نصف کرے بالترتیب یکساں کثافت م اور ک کے ہوتے لیکن اوسط کثافت اتنی ہی رہتی جتنی کہ اب ہے تو ثابت کرو کہ خط استوا پر

جاذبہ ارض کی قیمت موجودہ جاذبہ ارض کی قیمت کا

$$\sqrt{1 + \frac{3}{2\pi}\left(\frac{م - ک}{م + ک}\right)^2}$$ گنا ہوتی

اور خطِ استوا پر شاقول کی سمت کا انحراف نقطۂ راس سے

$$\text{مس}^{-1}\left\{\frac{2}{\pi}\ \frac{م - ک}{م + ک}\right\}$$ ہوتا۔

۱۴ — اگر زمین کو کرہ فرض کیا جائے اور اس کے گرد لفافی مخروط کی شکل کا ایک پہاڑ ہو جس کا نصف راسی زاویہ عہ ہو اور پہاڑ کی کثافت زمین کی یکساں کثافت کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ پہاڑ کی چوٹی پر جاذبہ ارض کی قیمت

$$ج\left\{\frac{1 + \text{جب}^3 عہ - \text{جم}^3 عہ}{2\ \text{جب}\ عہ}\right\}$$

ہوگی جہاں ج جاذبہ ارض کی قیمت زمین کی سطح پر ہے۔

۱۵ — معلوم کرو کہ کیا کشش کا کوئی اور کلیہ علاوہ فاصلہ کے مقلوب مربع کے ہو سکتا ہے جس سے کسی پتلے یکساں نصف کروی خول کے کسی اندرونی نقطہ پر کشش صفر ہو۔

فرض کرو کہ کشش کا قانون $\frac{ف(ر)}{ر^2}$ ہے پس دفعہ ۲۸۶ کی رو سے

$$\int_{ا - ج_1}^{ا + ج_1} \frac{س^2 + ج_1^2 - ا^2}{س^2}\ ف(س)\ فس = 0$$ ج کی ان تمام قیمتوں کے لئے جو ا سے کم ہیں

اس مساوات کو ج کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

$$-\frac{ف(ا + ج_1)}{ا + ج_1} + \frac{ف(ا - ج_1)}{ا - ج_1} = \int_{ا - ج_1}^{ا + ج_1} \frac{ف(س)}{س^2}\ فس$$

پھر (۱) کو ا کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

$$\frac{ج_1}{ا + ج_1}\ ف(ا + ج_1) + \frac{ج_1}{ا - ج_1}\ ف(ا - ج_1) = ا\int_{ا - ج_1}^{ا + ج_1} \frac{ف(س)}{س^2}\ فس$$

ان دو مساواتوں میں تکملہ کو ساقط کر دینے سے

$$ف\,(ا + ج) = ف\,(ا - ج_۱)$$

یہ نتیجہ ا کی تمام قیمتوں کے لئے اور $ج_۱$ کی ان تمام قیمتوں کے لئے جو ا سے کم ہوں درست ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ف (ر) = مستقل ک فرض کرو

پس قوت کا صرف ایک ہی قانون ممکن ہے اور وہ $= \frac{ف\,(ر)}{ر^۲} = \frac{ک}{ر^۲}$

۱۶ — معلوم کرو کہ کیا کشش کا کوئی اور کلیہ ہو سکتا ہے سوا ے فاصلہ کے مقلوب مربع کے جس سے ایک کروی خول کی کشش کسی بیرونی نقطہ پر اتنی ہی ہو جتنی کہ خول کی کل کمیت اس کے مرکز پر کثیف کر دینے سے ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ کشش کا کلیہ $\frac{ف\,(ر)}{ر^۲}$ ہے۔ پس دفعہ ۲۸۶ کے بموجب

$$۲\pi\,ج\,ک\,ھ\,\frac{ا}{ج_۱^۲}\int_{ج_۱-ا}^{ج_۱+ا}\frac{س^۲+ج_۱^۲-ا^۲}{س^۲}\,ف\,(س)\,فس$$

$$= ۴\pi\,ج\,ک\,ھ\,ا^۲\,\frac{ف\,(ج_۱)}{ج_۱^۲}$$

اور اس لئے $\frac{۱}{ا}\int_{ج_۱-ا}^{ج_۱+ا}\frac{س^۲+ج_۱^۲-ا^۲}{س^۲}\,ف\,(س)\,فس = ۴\,ف\,(ج_۱)$ .... (۱)

ا کی سب قیمتوں کے لئے اور $ج_۱$ کی ان سب قیمتوں کے لئے جو ا سے بڑی ہوں یہ نتیجہ درست ہے۔

بلحاظ ا کے تفرق کرنے سے

$$-\frac{۱}{ا^۲}\int_{ج_۱-ا}^{ج_۱+ا}\frac{س^۲+ج_۱^۲-ا^۲}{س^۲}\,ف\,(س)\,فس$$

$$+\frac{۱}{ا}\left[\frac{۲ج_۱^۲}{ج_۱+ا}\,ف\,(ج_۱+ا)+\frac{۲ج_۱^۲}{ج_۱-ا}\,ف\,(ج_۱-ا)-۲ا\int\frac{ف\,(س)}{س^۲}\,فس\right]=۰$$

$$\therefore\ \text{۲ ا ج}_1\left[\frac{\text{ف}(\text{ا}+\text{ج}_1)}{\text{ج}+\text{ا}}+\frac{\text{ف}(\text{ج}_1-\text{ا})}{\text{ج}_1-\text{ا}}\right]=\int_{\text{ج}_1-\text{ا}}^{\text{ج}_1+\text{ا}}\frac{\text{س}^{۲}+\text{ج}_1^{۲}+\text{ا}^{۲}}{\text{س}^{۲}}\,\text{ف}(\text{س})\,\text{فرس}$$

ج، اور ا کے لحاظ سے بالترتیب تفرق کرنے سے

$$\text{۲ ج}_1\left[-\frac{\text{ف}(\text{ج}_1+\text{ا})}{\text{ج}_1+\text{ا}}+\frac{\text{ف}(\text{ج}_1-\text{ا})}{\text{ج}_1-\text{ا}}\right]+\text{۲ ا ج}\left[\frac{\text{فَ}(\text{ج}_1+\text{ا})}{\text{ج}_1+\text{ا}}+\frac{\text{فَ}(\text{ج}_1-\text{ا})}{\text{ج}_1-\text{ا}}\right]$$

$$=\text{۲ ج}_1\int_{\text{ج}_1-\text{ا}}^{\text{ج}_1+\text{ا}}\frac{\text{ف}(\text{س})}{\text{س}^{۲}}\,\text{فرس}$$

$$\text{اور ۲ ا}\left[-\frac{\text{ف}(\text{ج}_1+\text{ا})}{\text{ج}+\text{ا}}+\frac{\text{ف}(\text{ج}_1-\text{ا})}{\text{ج}_1-\text{ا}}\right]+\text{۲ ا ج}_1\left[\frac{\text{فَ}(\text{ج}_1+\text{ا})}{\text{ج}_1-\text{ا}}-\frac{\text{فَ}(\text{ج}_1-\text{ا})}{\text{ج}_1-\text{ا}}\right]$$

$$=\text{۲ ا}\int_{\text{ج}_1-\text{ا}}^{\text{ج}_1+\text{ا}}\frac{\text{ف}(\text{س})}{\text{س}^{۲}}\,\text{فرس}$$

اس لئے تکمل کو ساقط کرنے سے $\frac{\text{فَ}(\text{ج}_1+\text{ا})}{(\text{ج}_1+\text{ا})^{۲}}=\frac{\text{فَ}(\text{ج}_1-\text{ا})}{(\text{ج}_1-\text{ا})^{۲}}$

جو ا کی سب قیمتوں کے لئے اور ج، کی ا سے بڑی سب قیمتوں کے لئے درست ہے۔

اس لئے $\frac{\text{فَ}(\text{ر})}{\text{ر}^{۲}}$ لازمی طور پر مستقل ہونا چاہیئے۔

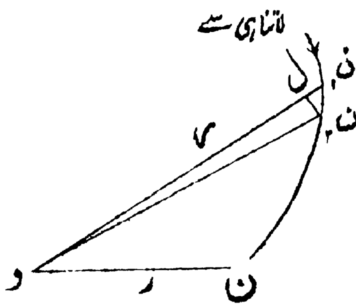
$\therefore$ $\text{ف}(\text{ر})=\text{أ ر}^{۳}+\text{ب}$ جہاں أ اور ب اختیاری مستقل ہیں

پس مطلوبہ کلیہ $\text{أ ر}+\frac{\text{ب}}{\text{ر}^{۲}}$ ہے۔

پس ممکن کلیے صرف تین ہیں راست فاصلہ کا کلیہ یا فاصلہ کے مقلوب مربع کا کلیہ یا ان کا مجموعہ۔

## قوہ

۲۹۱۔ کسی نقطہ ن پر ایک کمیت م کے قوہ سے وہ کام مراد ہوتا ہے جو کمیت م کی کشش اکائی کمیت کو لاتناہی سے نقطہ ن تک کسی سیدھے یا منحنی راستہ سے لانے میں سر انجام دیتی ہے۔




نقطہ و پر کشش کرنے والی کمیت کے ایک چھوٹے سے جزو م پر غور کرو اور فرض کرو اکائی کمیت کے ذرہ کے راستے کا ایک چھوٹا سا جزو $\text{ن}_1\,\text{ن}_2$ ہے۔

نیز $\text{و ن}_1 = \text{س}$ اور $\text{و ن}_2 = \text{س} + \text{مف س}$

$\text{ن}_2\,\text{ل}$ عمود کھینچو $\text{و ن}_1$ پر، تب انتہا میں

$$\text{و ل} = \text{و ن}_2 = \text{س} + \text{مف س}$$

$$\therefore\ \text{ن}_1\text{ل} = \text{و ن}_1 - \text{و ل} = \text{س} - (\text{س} + \text{مف س}) = -\,\text{مف س}$$

اس لئے م کی کشش اکائی کمیت کو $\text{ن}_1$ سے $\text{ن}_2$ تک لانے میں جو کام سر انجام دیتی ہے وہ

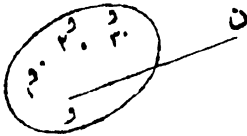
$$= \frac{\text{جہ م}}{\text{و ن}_1^2} \times \text{ن}_1\text{ل} = \frac{\text{جہ م}}{\text{س}^2}(-\,\text{مف س})$$

اس لئے اس کشش کا کل کام جبکہ اکائی کمیت کا ذرہ لاتناہی سے نقطہ ن تک آئے جہاں و ن کا طول ر ہے

$$= \int_{\infty}^{\text{ر}} \left(-\frac{\text{جہ م}}{\text{س}^2}\right) \text{فرس} = \left[\frac{\text{جہ م}}{\text{س}}\right]_{\infty}^{\text{ر}} = \text{جہ م}\left[\frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\infty}\right] = \frac{\text{جہ م}}{\text{ر}}$$

اسی قسم کا نتیجہ کشش کرنے والی کمیت کے دیگر جزوی حصوں $م_1$، $م_2$ .... کے لئے جو $و_1$، $و_2$ .... پر واقع ہیں درست ہے۔

اس لئے کل کشش کرنے والی کمیت کا مجموعی کام



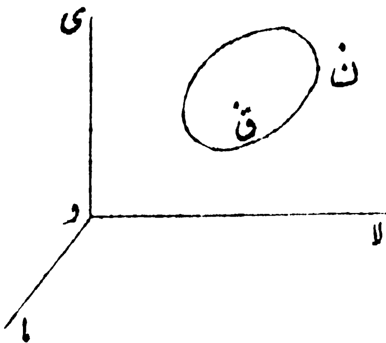

$$= \frac{جم}{ن و} + \frac{جم_1}{ن و_1} + \frac{جم_2}{ن و_2} + \ldots\ldots$$

$$= \int \frac{جہ}{ر} فرم$$

پس کمیت م کا قوہ کسی نقطہ پر حسب ذیل طریقہ سے معلوم ہوتا ہے فرض کرو کمیت م کا ایک چھوٹا سا جزو فرم ہے جس کا فاصلہ ن سے ر ہے تب کل کمیت کا قوہ ن پر $= جہ \int \frac{فرم}{ر}$ ہے جہاں تکملہ کو تمام کشش کرنے والے مادہ میں لینا چاہیئے۔

اس مقدار کو بالعموم قہ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

۲۹۴ ۔ اگر ایک کشش کرنے والے جسم کا قوہ کسی نقطہ ن پر قہ ہو اور ن کے محدد لا، ما، ی ہوں تو ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $\frac{فرقہ}{فرلا}$، ن پر کی کشش کا محور لا کی مثبت سمت کے متوازی جزو ترکیبی ہے اور اسی طرح سے $\frac{فرقہ}{فرما}$ اور $\frac{فرقہ}{فری}$ کے لئے۔




فرض کرو کہ کشش کرنے والی کمیت کا کوئی جز فرم ہے نقطہ ق پر جس کے محدد (لاَ، ماَ، یَ) ہیں۔ تب دفعہ ماقبل کی تعریف کے بموجب

$$قہ = جہ \int \frac{فرم}{ن ق} = جہ \int \frac{فرم}{\sqrt{(لا - لاَ)^2 + (ما - ماَ)^2 + (ی - یَ)^2}}$$

$$\therefore \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرلا}} = -\text{جبر} \frac{\text{فرم}(\text{لا}-\text{لاَ})}{\left\{(\text{لا}-\text{لاَ})^2+(\text{ما}-\text{ماَ})^2+(\text{ی}-\text{یَ})^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\text{جبر}\left[\frac{\text{فرم}}{\text{ن ق}^2} \times \frac{\text{لا}-\text{لاَ}}{\text{ن ق}}\right] = -\text{جبر}\left[\frac{\text{فرم}}{\text{ن ق}^2} \times \text{جم طہ}\right] \quad \ldots \ldots (1)$$

جہاں ق ن کا میلان محور لا کے ساتھ طہ ہے۔

اب جزو فرم کی کشش ن پر جبر $\frac{\text{فرم}}{\text{ن ق}^2}$ ہے جو ن ق کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ اور اس لئے اس کشش کا تحلیلی حصہ محور لا کی منفی سمت میں

$$= \text{جبر} \times \frac{\text{فرم}}{\text{ن ق}^2}\,\text{جم طہ}$$

اس لئے کل کمیت کی کشش کا جزو تحلیلی محور لا کی مثبت سمت میں $= -\text{جبر} \int \frac{\text{فرم}}{\text{ن ق}^2}\,\text{جم طہ}$

لہذا (۱) سے ظاہر ہے کہ

$\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرلا}}$ = کل کمیت کی حاصل کشش محور لا کی مثبت سمت میں اسی طرح $\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرما}}$ اور $\frac{\text{فرقہ}}{\text{فری}}$ بالترتیب ما اور ی کے محوروں کی سمتوں میں حاصل کششیں ہیں۔

۴۹۳۔ دفعات ماقبل سے ہم دیکھتے ہیں کہ کسی نقطہ پر قوہ تکملہ جبر $\int \frac{\text{فرم}}{\text{ر}}$ کی قیمت کو محسوب کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے جبکہ تکمل کے عمل کو پوری کمیت پر عاید کیا جائے یا اگر یوں کرنا زیادہ سہل ہو تو ہم اسے اس خصوصیت کی بناء پر بھی معلوم کر سکتے ہیں کہ اس کے تفرقی سر بلحاظ لا، ما، ی کے بالترتیب ان محوروں کی سمتوں میں حاصل قوت کے جزو ترکیبی ہیں۔

نیز اگر قہ بہ آسانی پہلے معلوم ہو جائے تو ہم تحلیلی قوتوں کو محض تفرق کرنے سے معلوم کر سکتے ہیں۔

۴۹۴۔ اگر مفت س نقطہ ن میں سے کسی سمت میں کھینچے ہوئے خطِ مستقیم کا چھوٹا

ساجزو ہو اور لا، ما، ی محوروں پر اس کے ظل مف لا، مف ما، مف ی ہوں اور بناءً علیہ اس کے سمتی جیوب التمام

$\frac{فرلا}{فرس}$، $\frac{فرما}{فرس}$، $\frac{فری}{فرس}$ ہوں تو مف س کی سمت میں حاصل کشش

$$\frac{فرقہ}{فرس} = \frac{فری}{فرس} \times \frac{جف قہ}{جف ی} + \frac{فرما}{فرس} \times \frac{جف قہ}{جف ما} + \frac{فرلا}{فرس} \times \frac{جف قہ}{جف لا} =$$

اگر یہ جزو مف س، ن نَ ہو تو یہ مساوات اس واقعہ کو تعبیر کرتی ہے کہ ن نَ کی سمت میں قوت

$$= نہــا \frac{نَ پر قوہ - ن پر قوہ}{ن نَ}$$

۴۹۵ — دفعۂ ماقبل سے ظاہر ہے کہ اگر ن کا مقام معمولی قطبی محددوں ر، طہ، فہ میں معلوم ہو تو حاصل کششیں یہ ہیں:-

$\frac{فرقہ}{فرر}$، ر کی سمت میں،

$\frac{1}{ر} \frac{فرقہ}{فرطہ}$، ر پر عمود وار طہ کی سطح مستوی میں،

$\frac{1}{ر جب طہ} \times \frac{فرقہ}{فرفہ}$، طہ کی سطح مستوی پر عمود وار سمت میں۔

۴۹۶ — جب مجذوب نقطہ ن، کشش کرنے والی کمیت کے اندر ہو جس صورت میں ر کی کچھ قیمتیں صفر ہونگی تو بظاہر یہ معلوم ہوتا ہے کہ قوہ = ∫ جہ $\frac{ع حم}{ر}$ کی قیمت لاتناہی ہوگی۔

لیکن یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ در اصل ایسا نہیں ہے۔ کیونکہ اگر نقطہ ن کو قطبی محددوں ر، طہ، فہ کا مبدا مانا جائے اور م کثافت ہو تو

$$مف م = مف ر \times ر مف طہ \times ر جب طہ مف فہ \times م$$

اس لئے کل جسم کا قوہ قہ = ∭ مہ ر جب طہ فرر فرطہ فرفہ

یہ تکمل لا متناہی نہیں ہوتا خواہ ر کی بعض قیمتیں صفر کیوں نہ ہوں۔

اسی طرح دفعہ ۲۹۲ کی مساوات (۱) کی رو سے

$$\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرلا}} = -\text{جہ} \int \frac{\text{فرم}}{\text{ن ق}^{2}}\ \text{جم}(\text{ق ن لا})$$

$$= -\text{جہ} \iiint \text{مہ} \frac{\text{ر}^{2}\,\text{جب طہ فرر فرطہ فرفہ}}{\text{ر}^{2}}\ \text{جم فہ جب طہ}$$

$$= -\text{جہ} \iiint \text{مہ جب}^{2}\,\text{طہ جم فہ فرر فرطہ فرفہ}$$

اور اس کا کوئی جزو لا متناہی نہیں ہوتا خواہ ر صفر ہی کیوں نہ ہو۔

پس قوہ اور کشش کے اجزائے ترکیبی دونوں مسلسل تفاعل ہوتے ہیں بشرطیکہ کشش کرنے والی کمیت کا ہر ایک جزو محدود حجمی کثافت رکھتا ہو۔

یہ بات قوہ کے دوسرے تفرقی سر کے لئے درست نہیں ہے کیونکہ دفعہ ۲۹۲ کے جملے کو بلحاظ لا کے تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{قہ}}{\text{فرلا}^{2}} = -\text{جہ} \int \text{فرم} \left[\frac{1}{\text{ن ق}^{3}} - \frac{3\,(\text{لا} - \text{اَا})^{2}}{\text{ن ق}^{5}}\right]$$

مجذوب نقطہ (لا، ما، ی) کو حسب سابق مبدا ماننے سے اور قطبی محددوں میں مندرج کرنے سے

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{قہ}}{\text{فرلا}^{2}} = \text{جہ} \iiint \text{مہ} \frac{3\,\text{جم}^{2}\,\text{فہ جب}^{2}\,\text{طہ} - 1}{\text{ر}}\ \text{جب طہ فرر فرطہ فرفہ}$$

یہاں تکمل کی علامت کے اندر کی مقدار لا متناہی ہو جاتی ہے جبکہ ر صفر ہو جائے یعنی جب مجذوب نقطہ کشش کرنے والی کمیت کے اندر ہو تو ر کی بعض قیمتوں کے لئے یہ مقدار لا متناہی ہوتی ہے۔

لہذا دوسرا تفرقی مسلسل نہیں رہتا جب ہم کشش کرنے والی کمیت کے

باہر سے اندر جاتے ہیں ۔

اوپر کے نتائج صریحاً قدرت کے کلیہ کشش کے علاوہ دوسرے کلیوں کے لئے درست نہیں رہتے ۔ مثلاً اگر کشش کا کلیہ فاصلہ کے مقلوب مکعب کا کلیہ ہو تو $\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرلا}}$ کے لئے متذکرہ بالا تکملہ میں ر نسب نما میں آئے گا اور اس لئے اس کے بعض اجزاء لا متناہی ہو جائیں گے جبکہ مجذوب نقطہ کشش کرنے والی کمیت کے اندر واقع ہو ۔

۲۹۷ ۔ فاصلہ کے مقلوب مربع کے سوائے کشش کے دوسرے کلیوں کے لئے قوہ :۔

اگر کشش کا کلیہ $\frac{\text{جہ م}_1 \text{م}_2}{(\text{فاصلہ})^{\text{ن}}}$ ہو تو کمیّت م کا قوہ فاصلہ ر پر حسب دفعہ ۲۹

$$= \int_{\infty}^{\text{ر}} \left( -\frac{\text{جہ م}}{\text{ر}^{\text{ن}}} \right) \text{فر} = \frac{\text{جہ م}}{\text{ن}-1} \left[ \frac{1}{\text{ر}^{\text{ن}-1}} \right]_{\infty}^{\text{ر}} = \frac{\text{جہ م}}{\text{ن}-1} \times \frac{1}{\text{ر}^{\text{ن}-1}}$$

$$\text{اس لئے کل کمیّت م کا قوہ} = \frac{\text{جہ}}{\text{ن}-1} \int \frac{\text{فرم}}{\text{ر}^{\text{ن}-1}}$$

یہ نتیجہ درست رہتا ہے بشرطیکہ ن مثبت ہو اور ایک سے بڑا ہو

اگر کلیہ مقلوب فاصلہ کا کلیہ ہو یعنی اگر ن = ۱ تو

$$\text{قوہ} = \int_{\infty}^{\text{ر}} \left( -\frac{\text{جہ م}}{\text{ر}} \right) \text{فر} = -\text{جہ م} \left[ \text{لوک ر} \right]_{\infty}^{\text{ر}} = \text{ج} - \text{جہ م لوک ر}$$

جہاں ج لا متناہی مستقل ہے ۔

نیز کل کشش کرنے والی کمیت کا قوہ

$= \text{ج} - \text{جہ} \int \text{لوک ر فرم}$ جہاں ج بھی لا متناہی مستقل ہے ۔

۲۹۸ ۔ ایک پتلی یکساں سلاخ کے بیرونی نقطہ پر قوہ :۔

دفعہ ۲۷۷ کی شکل اور ترقیم کے مطابق سلاخ ا ب کا ن پر قوہ

$$= \int \text{جہ ک م} \frac{\text{فر لا}}{\text{ن ق}} = \int_{\text{ء}}^{\text{آ}} \frac{\text{جہ ک م ع قط}^2 \text{طہ فرطہ}}{\text{ع قط طہ}}$$

$$= \text{جہ ک م} \int_{\text{ء}}^{\text{آ}} \text{قط طہ فرطہ} = \text{جہ ک م} \left[ \text{لوک مس}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{طہ}}{2}\right)\right]_{\text{ء}}^{\text{آ}}$$

$$= \text{جہ ک م لوک} \frac{\text{مس}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{آ}}{2}\right)}{\text{مس}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{ء}}{2}\right)}$$

اب $\angle \text{ن ا ب} = \frac{\pi}{2} + \text{ء}$ اس لئے $\text{مس}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{ء}}{2}\right) = \text{مس} \frac{\text{ن ا ب}}{2}$

نیز $\angle \text{ن ب ا} = \frac{\pi}{2} - \text{آ}$

لہٰذا $\text{مس}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{آ}}{2}\right) = \text{مم}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\text{آ}}{2}\right) = \text{مم} \frac{\text{ن ب ا}}{2}$

اس لئے ن پر قوہ

$$= \text{جہ ک م لوک} \left[\text{مم} \frac{\text{ن ا ب}}{2} \times \text{مم} \frac{\text{ن ب ا}}{2}\right]$$

اگر $\text{ا ب} = \text{ل}_1$ ، $\text{ا ن} = \text{ل}_2$ اور $\text{ب ن} = \text{ل}_3$

تو علم مثلث کے معمولی ضابطوں کی رو سے

$$\text{مم} \frac{\text{ن ا ب}}{2} \times \text{مم} \frac{\text{ن ب ا}}{2} = \sqrt{\frac{\text{س}(\text{س} - \text{ل}_2)}{(\text{س} - \text{ل}_3)(\text{س} - \text{ل}_1)}} \times \sqrt{\frac{\text{س}(\text{س} - \text{ل}_3)}{(\text{س} - \text{ل}_2)(\text{س} - \text{ل}_1)}}$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{س} - \text{ل}_1} = \frac{\text{ل}_2 + \text{ل}_3 + \text{ل}_1}{\text{ل}_2 + \text{ل}_3 - \text{ل}_1}$$

اس لئے ن پر کا قوہ $= \text{جہ ک م لوک} \frac{\text{ل}_2 + \text{ل}_3 + \text{ل}_1}{\text{ل}_2 + \text{ل}_3 - \text{ل}_1}$

**نتیجہ صریح (۱)** اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ قوہ ان سب نقطوں کے لئے مستقل

رہتا ہے جن کے لئے ر + ر٫ مستقل ہے۔ یعنی قوہ ان سب نقطوں کے لئے جو ایسے ناقص پر واقع ہیں جس کے ماسکے ا اور ب ہیں مستقل ہے۔

اس لئے ایک پتلی سلاخ ا ب کی صورت میں مساوی القوہ منحنی ناقص ہوتے ہیں جن کے ماسکے ا اور ب ہوتے ہیں۔

**نتیجہ صریح (۲)** اگر سلاخ دونوں سمتوں میں لاتناہی ہو تو اس کا قوہ

$$\text{قہ} = ۲\int_{\text{ب}}^{\infty} \frac{\text{جہ ک م فر لا}}{\text{ن ق}} = ۲\,\text{جہ ک م}\int_{\text{ب}}^{\infty} \frac{\text{فر لا}}{\sqrt{\text{ع}^۲ + \text{لا}^۲}}$$

$$= ۲\,\text{جہ ک م}\left[\text{لوک}\left\{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲ + \text{ع}^۲}\right\}\right]_{\text{ب}}^{\infty}$$

$$= \text{ج} - ۲\,\text{جہ ک م لوک ع}$$

جہاں ج لاتناہی مستقل ہے۔

یہ نتیجہ دفعہ ۲۷۷ کے نتیجہ صریح سے بھی حاصل ہوسکتا ہے کیونکہ

$$\frac{\text{فر قہ}}{\text{فر ع}} = -\text{کشش کی قوت} = -\frac{۲\,\text{جہ ک م}}{\text{ع}}$$

$$\therefore\ \text{قہ} = \text{ج} - ۲\,\text{جہ ک م لوک ع}$$

**نتیجہ صریح (۳)** اگر سلاخ سمت ا ب محدودہ میں لاانتہا لمبی ہو لیکن اس کا ایک سرا ا ہو تو ن پر قوہ

$$= \text{جہ ک م}\left[\text{لوک مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{ط}}{۲}\right)\right]_{\text{عہ}}^{\frac{\pi}{۲}} = \text{جہ ک م}\left[\text{ج} - \text{لوک مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{عہ}}{۲}\right)\right]$$

جہاں ج لاتناہی مستقل ہے

$$= \text{جہ ک م}\left[\text{ج} - \text{لوک}\,\frac{۱ + \text{جب عہ}}{\text{جم عہ}}\right]$$

۲۹۹- ایک یکساں مستدیر تختی کا اس کے محور پر کے کسی نقطہ پر قوہ:-
دفعہ ۲۸۱ کی شکل اور ترقیم کے مطابق ن پر کا قوہ

$$= \int_{0}^{\text{ا}} \frac{\text{جہ}\ 2\pi\ \text{لا} \times \text{فرلا} \times \text{ک م}}{\text{ن ق}} = 2\pi\ \text{جہ ک م} \int_{0}^{\text{ا}} \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ع}^2}}\ \text{فرلا}$$

$$= 2\pi\ \text{جہ ک م} \left[\sqrt{\text{ع}^2 + \text{لا}^2}\right]_{0}^{\text{ا}}$$

$$= 2\pi\ \text{جہ ک م} \left[\sqrt{\text{ع}^2 + \text{ا}^2} - \text{ع}\right]$$

یا قوہ قہ دفعہ ۲۸۱ کے نتیجہ کی مدد سے بھی معلوم ہو سکتا ہے، کیونکہ

$$\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرع}} = \text{کشش دن کی سمت میں}$$

$$= -2\pi\ \text{جہ ک م} \left[1 - \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ع}^2}}\right]$$

$$\therefore \quad \text{قہ} = 2\pi\ \text{جہ ک م} \left[\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ع}^2} - \text{ع}\right] + \text{ج}$$

مستقل صفر ہے کیونکہ جب ع صفر ہو تو
قہ = تختی کے مرکز پر قوہ

$$= \int_{0}^{\text{ا}} \frac{\text{جہ}\ 2\pi\ \text{لا فرلا} \times \text{ک م}}{\text{لا}} = 2\pi\ \text{جہ ک م ا}$$

## مثالیں

۱- ایک یکساں تپلی سلاخ کا طول لا انتہا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی کشش کے خلاف اکائی کمیت کے ذرہ کو اس سے عمودی فاصلہ $\text{ما}_1$ سے عمودی فاصلہ $\text{ما}_2$ تک لیجانے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ $2\ \text{جہ ک م لوک} \frac{\text{ما}_2}{\text{ما}_1}$ ہے۔

۲ــــ دو مساوی یکساں سلاخوں کی کمیتیں $م_۱$ اور $م_۲$ ہیں اور طول ل ہے ان کو اسطرح متشاکلاً رکھا گیا ہے کہ یہ ایک دوسرے کے متوازی اور ایک دوسرے سے فاصلہ $ا_۱$ پر ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کی باہمی کشش کے خلاف ایک سلاخ کو دوسری سے عمودی فاصلہ $ا_۲$ پر متشاکلاً لیجانے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ

$$۲\,جـ\,م_۱\,م_۲\left[ا-\sqrt{ا^۲+ل^۲}-ل\,لوک\,\frac{\sqrt{ا^۲+ل^۲}-ل}{ا}\right]_{ا_۱}^{ا_۲}\div ل^۲$$

(مثال ۴ صفحہ (۴۶۷) کے نتیجہ کو استعمال کرو)

۳ــــ مادہ کی ایک تقسیم کا قوہ $ت = مہ\,لوک\,\frac{لا-و+\sqrt{ا^۲+ی^۲-(و-لا)^۲}}{ا+لا+\sqrt{ا^۲+ی^۲+(و+لا)^۲}}$

وہ سب سے زیادہ مکثف تقسیم معلوم کرو جو یہ قوہ پیدا کر سکے۔

۴ــــ ن مساوی لا انتہا لمبی متجانس مستقیم سلاخیں ایک اسطوانہ کے محیط پر متشاکلاً ترتیب میں پڑی ہوئی ہیں اور ایک دوسرے سے مساوی فاصلہ پر ہیں۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر ان کے قوہ کو اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے $ج - ۲\,مہ\,لوک\,(ر^{۲ن} - ۲\,ا^ن\,ر^ن\,جم\,ن\,ط + ا^{۲ن})$
جہاں (ر، ط) نقطوں کے قطبی محدد ہیں بلحاظ اس مبدا کے جس مقام پر اسطوانے کے محور کو ن میں سے گزرنے والا اعلیٰ لعقوائم مستوی کاٹتا ہے اور ا اسطوانہ کا نصف قطر ہے۔

۵ــــ ثابت کرو کہ ایک مکعب کی سطحوں کا قوہ مکعب کے مرکز پر

$$=\frac{جـ\,م^۲}{ا}\left[۶\,لوک\,(۲+\sqrt{۳})-\pi\right]$$

جہاں ۲ ا ہر ضلع کا طول ہے اور م ایک رخ کی کمیت ہے (رخ کو لا انتہا پتلا فرض کر لیا گیا ہے)
نیز ثابت کرو کہ مکعب کے مرکز پر قوہ

$$=\frac{جـ\,مَ^۲}{۴\,ا}\left[۶\,لوک\,(۲+\sqrt{۳})-\pi\right]$$

جہاں مَ کل مکعب کی کمیت ہے۔

نیز حاصل کرو کہ مکعب کے ایک کونہ پر قوہ مرکز پر کے قوہ کی قیمت کا نصف ہے۔

[دفعہ ۲۸۰ کے نتیجہ سے شروع کرو]

۶ — ایک پتلے متجانس حلقہ کی کمیت م اور نصف قطر $\text{ا}_1$ ہے۔ قانون کشش کو فاصلہ کے معکوس کے متناسب فرض کر کے ثابت کرو کہ حلقہ کے مستوی میں مرکز سے فاصلہ $\text{ج}_1$ پر قوہ

$$= \text{ج} - \text{جہ م لوک}\ \text{ج}_1 \quad \text{یا} \quad \text{ج} - \text{جہ م لوک}\ \text{ا}_1$$

بموجب اس کے کہ $\text{ج}_1 \gtrless \text{ا}_1$

۷ — ایک لاتناہی یکساں پتلا اسطوانی خول ہے۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ ن پر اس کا قوہ $\text{ج} - ۴\pi\ \text{جہ}\ \text{ا}_1\ \text{ھ لوک}\ \text{ا}_1$ یا $\text{ج} - ۴\pi\ \text{جہ}\ \text{ا}_1\ \text{ھ لوک}\ \text{ر}$ ہوگا بموجب اس کے کہ ن اسطوانہ کے اندر یا باہر ہو جہاں ھ اسطوانہ کے خول کی کمیت فی اکائی رقبہ ہے، $\text{ا}_1$ اسطوانہ کا نصف قطر ہے اور ر نقطہ ن کا محور سے فاصلہ ہے۔

۸ — ایک یکساں پتلے مستدیر حلقے کا نصف قطر $\text{ا}_1$ سنتی میٹر اور کمیت م گرام ہے۔ حلقہ کے مستوی میں ایک نقطہ ن لیا گیا ہے جس کا فاصلہ حلقہ کے مرکز سے $\text{ج}_1$ ($\text{ج}_1 > \text{ا}_1$) ہے۔ ثابت کرو کہ تجاذب کی وجہ سے ن پر قوہ ہے

$$\text{جہ}\ \frac{\text{م}}{\text{ج}_1+\text{ا}_1}\left\{ ۱ + \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ \text{ک}^۲ + \left(\frac{۱\times۳}{۲\times۴}\right)^۲ \text{ک}^۴ + \frac{۱\times۳\times۵}{۲\times۴\times۶}\ \text{ک}^۶ + \ldots\ldots\ldots \right\}$$

$$\text{جہاں ک} = \frac{۲\sqrt{\text{ا}_1\text{ج}_1}}{\text{ا}_1+\text{ج}_1}$$

۹ — ایک یکساں مستدیر قرص کی کمیت م اور نصف قطر $\text{ا}_1$ ہے ثابت کرو کہ اس کا قوہ اس نقطہ پر جو اس کی سطح مستوی میں مرکز سے فاصلہ $\text{ج}_1$ پر واقع ہے

$$\frac{۴\ \text{جہ م}}{\pi\ \text{ا}_1^۲}\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{\text{ا}_1^۲ - \text{ج}_1^۲\ \text{جب}^۲\text{ط}}\ \text{فرط} \quad \text{یا} \quad \frac{۴\ \text{جہ م}}{\pi\ \text{ا}_1^۲}\int_{0}^{\text{جب}^{-1}\frac{\text{ا}_1}{\text{ج}_1}} \sqrt{\text{ا}_1^۲ - \text{ج}_1^۲\ \text{جب}^۲\text{ط}}\ \text{فرط}$$

ہوگا بموجب اس کے کہ $\text{ج}_1 <$ یا $> \text{ا}_1$۔

۱۰۔۔ ایک یکساں پترا دو ہم مرکز دائروں سے جن کے نصف قطر بالترتیب لہ اور ب ہیں گھرا ہوا ہے۔ اس کی کشش مشترک مرکز سے فاصلہ ر پر معلوم کرو جبکہ کشش کا کلیہ $\frac{\text{مہ}}{\text{فاصلہ}^{۳}}$ ہو

۱۱۔۔ قطع ناقص کی شکل کے ایک پترے کی کثافت کسی نقطہ پر ایسے بدلتی ہے جیسے اس نقطہ کا محور اعظم سے فاصلہ اکائی فاصلہ پر اکائی رقبہ کی کمیت مہ ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے پترے کا قوہ ۲ جہ مہ $\text{ب}^{۲}$ ہوگا۔

۱۲۔۔ ایک متجانس نصف کرہ کا مرکز و ہے، و سے نصف قطر و استوی قاعدہ پر عمود وار کھینچا گیا ہے۔ اگر نصف قطر ا سنتی میٹر ہو اور کثافت فی مکعب سنتی میٹر مہ گرام ہو اور جہ تجاذب کا مستقل ہو تو ثابت کرو کہ مجسم کی کشش کے خلاف ایک گرام کو و سے ا تک لیجانے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ

$$۲\pi \text{ جہ مہ } \text{ا}^{۲} \left[ ۱ - \frac{۲}{۳} \sqrt{۲} \right] \text{ ارگ ہے۔}$$

۱۳۔۔ ثابت کرو کہ ٹھوس متجانس مخروط کے قاعدہ کے وسطی نقطہ سے اس کی کشش کے خلاف کمیت کی ایک مکثف اکائی کو راس تک لیجانے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ

$$\pi \text{ جہ مہ } \text{ھ}^{۲} \text{ جب}^{۲} \text{عہ جم عہ} \left[ \text{لوک} \frac{\text{جم عہ}(۱ + \text{جم عہ})}{\text{جب عہ}(۱ - \text{جب عہ})} + \frac{\text{جم}^{۳}\text{عہ} + \text{جب}^{۳}\text{عہ} - ۱}{\text{جب}^{۲}\text{عہ جم}^{۲}\text{عہ}} \right]$$

ہے جہاں مخروط کی بلندی ھ، کثافت مہ اور راسی زاویہ ۲ عہ ہے

۳۰۰۔۔ ایک پتلے یکساں کروی خول کا قوہ بیرونی یا اندرونی نقطہ پر۔

دفعہ ۲۸۶ کی شکل اور ترقیم کے مطابق کسی بیرونی نقطہ ن پر قوہ

$$= \int \text{جہ ک مہ} \frac{۲\pi \text{ ا فر طہ ا جب طہ}}{\text{ن ق}}$$ جہاں مہ کثافت ہے

نیز س × مف سا = اج جب طہ مف طہ حسب دفعہ مذکور

$$\text{پس قوہ} = ۲\pi \text{ جہ ک مہ} \frac{\text{ا}}{\text{ج}} \int_{\text{ج}-\text{ا}}^{\text{ج}+\text{ا}} \frac{\text{سا} \times \text{فر سا}}{\text{سا}} = ۲\pi \text{ جہ ک مہ} \frac{\text{ا}}{\text{ج}} \Big[ \text{سا} \Big]_{\text{ج}-\text{ا}}^{\text{ج}+\text{ا}}$$

$$= \frac{4\pi \text{ جہ ک مر و}_1^2}{\text{ج}_1} = \text{جہ}\ \frac{\text{خول کی کمیّت}}{\text{و ن}}$$

پس کسی بیرونی نقطے کے لئے کروی خول کا قوہ اتنا ہی ہوگا جتنا کہ خول کی کل کمیّت کو اس کے مرکز پر مکثف کر دینے سے حاصل ہوتا۔

کسی اندرونی نقطہ ن کے لئے تکمل کی انتہائیں $س = \text{ن}_1\text{ا}$ سے $\text{ن}_1\text{ب}$ تک ہونی چاہئیں یعنی $\text{ا}_1 - \text{ج}_1$ سے $\text{ا}_1 + \text{ج}_1$ تک۔ اس لئے قوہ $\text{ن}_1$ پر

$$= 2\pi \text{ جہ ک مر } \frac{\text{ا}_1}{\text{ج}_1} \left[ س \right]_{\text{ا}_1 - \text{ج}_1}^{\text{ا}_1 + \text{ج}_1} = 4\pi \text{ جہ ک مر ا}_1 = \text{جہ}\ \frac{\text{خول کی کمیّت}}{\text{اس کا نصف قطر}}$$

لہٰذا کسی اندرونی نقطہ پر قوہ مستقل ہوتا ہے اور اس کی قیمت کسی نقطہ پر اتنی ہی ہوتی ہے جتنی کہ اس کے مرکز پر۔

**۱۰۳۔ ایک یکساں ٹھوس کرہ کا قوہ کسی بیرونی یا اندرونی نقطہ پر۔**

یہاں دفعہ ۲۸۷ کی شکل اور ترقیم اختیار کی گئی ہے فرض کرو کہ ٹھوس کرہ، تعداد میں لا انتہا مگر بہت ہی پتلے ہم مرکز کروی خولوں سے بنا ہوا ہے۔

اگر ن، ٹھوس کرہ کے باہر ہو تو اس کے یہ معنی ہونگے کہ یہ ان سب کروی خولوں کے باہر ہے اور ان میں سے ہر ایک خول کا قوہ کمیّت ن پر

$$= \text{جہ}\ \frac{\text{خول کی کمیّت}}{\text{و ن}}$$ دفعہ ماقبل کے مطابق۔

اس لئے کل قوہ کسی بیرونی نقطہ ن پر

$$= \text{جہ}\ \frac{\text{خولوں کی کمیّتوں کا مجموعہ}}{\text{و ن}}$$

$$= \text{جہ}\ \frac{\text{کرہ کی کمیّت}}{\text{و ن}}$$

اور اسلئے قوہ اتنا ہی ہے جتنا کہ کل کرہ کی کمیّت کو مرکز پر مکثف کر دینے سے حاصل ہوتا۔

اگر نقطہ کرہ کے اندر ہو تو اُن سب خولوں کے لئے جن کا نصف قطر ما، ون سے کم ہے ن بیرونی نقطہ ہے اور اس لئے دفعہ ۳۰۰ کے مطابق اس قسم کے خول کا قوہ = جہ $\frac{\text{۴ π ھ ما}^2 \text{ مف ما}}{\text{و ن}}$ اور اس کو حدود صفر اور ج کے اندر تکمل کرنا چاہیئے نیز اُن سب خولوں کے لئے جن کا نصف قطر ما، و ن سے بڑا ہے ن کوئی اندرونی نقطہ ہے دفعہ ۳۰۰ کی رُو سے اس قسم کے کسی خول کا قوہ = جہ $\frac{\text{۴ π ھ ما}^2 \text{ مف ما}}{\text{ما}}$

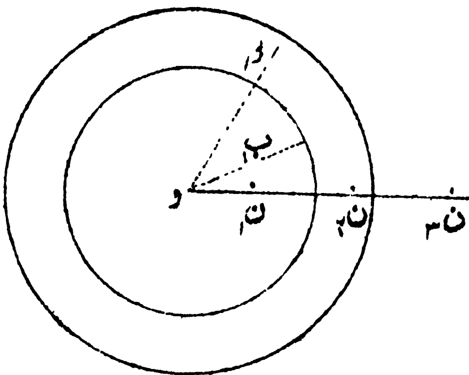
اور اس جملہ کو تکمل کرنا چاہیئے حدود ج سے ا کے اندر۔
اس لئے کسی اندرونی نقطہ ن پر مجموعی قوہ

$$= \int_{\text{ب}}^{\text{ج}} \text{جہ} \frac{\text{۴ π ھ ما}^2 \text{ فر ما}}{\text{ج}} + \int_{\text{ج}}^{\text{ا}} \text{جہ} \frac{\text{۴ π ھ ما}^2 \text{ فر ما}}{\text{ما}}$$

$$= \frac{\text{۴ π ھ جہ}}{\text{۳ ج}} \times \text{ج}^3 + \text{۲ π ھ جہ} (\text{ا}^2 - \text{ج}^2) = \text{۲ π جہ ھ} \left(\text{ا}^2 - \frac{\text{ج}^2}{\text{۳}}\right)$$

**۳۰۲** — ایک محدود موٹائی والے کروی خول کا قوہ اور کشش معلوم کرو خول کی اندر باہر کی کروی سطحوں کے نصف قطر بالترتیب ا اور ب ہیں۔

فرض کرو کہ و مرکز ہے اور ھ کروی خول کی کثافت ہے۔




اس محدود موٹائی کے خول کو لا انتہا ہم مرکز پتلے کروی خولوں میں تحلیل کرو۔

اب دفعہ ۳۰۰ کے نتیجے استعمال کرو

اولاً۔ کسی نقطہ ن (و ن = لا) کے لئے جو خول کی اندرونی سطح کے اندر واقع ہو اوپر کی صورت دوم لگ سکتی ہے / اور

اس لئے نقطہ ن۱ پر قوہ

$$= \int_{ب}^{ا} ج \frac{۴ \pi مر ما^{۲} فرما}{ما} = ۲ \pi ج مر (ا^{۲} - ب^{۲})$$

**ثانیاً** ۔ کسی نقطہ ن۲ (و ن۲ = لا) پر جو دو حائط سطحوں کے اندر واقع ہو قوہ معلوم کرنا ہے۔ جن خولوں کا نصف قطر لا سے کم ہے ن۲ ان کے لئے بیرونی نقطہ ہے اور دفعہ ۳۰۰ کی پہلی صورت قائم رہتی ہے نیز اس سے بڑے لنصف قطر کے خولوں کے لئے ن۲ اندرونی نقطہ متصور ہو سکتا ہے اور دوسری صورت لگے گی ۔ پس اس صورت میں ن۲ پر قوہ

$$= \int_{ب}^{لا} ج \frac{۴ \pi مر ما^{۲} فرما}{لا} + \int_{لا}^{ا} ج \frac{۴ \pi مر ما فرما}{ما}$$

$$= \frac{۴}{۳} \pi مر ج \left(\frac{لا^{۳} - ب^{۳}}{لا}\right) + ۲ \pi مر ج (ا^{۲} - لا^{۲})$$

$$= ۲ \pi مر ج \left[ ا^{۲} - \frac{لا^{۲}}{۳} - \frac{۲}{۳} \frac{ب^{۳}}{لا} \right]$$

**ثالثاً** ۔ نقطہ ن۳ (و ن۳ = لا) کے لئے جو کل معلومہ خول سے باہر واقع ہو ۔ یعنی تمام جزوی خولوں کے باہر ہو قوہ

$$قہ = \int_{ب}^{ا} ج \frac{۴ \pi مر ما^{۲} فرما}{لا} = \frac{۴ \pi مر ج}{۳} \left(\frac{ا^{۳} - ب^{۳}}{لا}\right)$$

پس ہمیں قوہ قہ اور اس کے تفرقی سروں کے لئے ذیل کے نتائج حاصل ہوتے ہیں ۔

| | $\text{لا} < \text{ب}_1$ | $\text{ب}_1 < \text{لا} < \text{ا}_1$ | $\text{لا} > \text{ا}_1$ |
|---|---|---|---|
| قہ | $2\pi\,\text{جہ مر}(\text{ا}_1^2 - \text{ب}_1^2)$ | $2\pi\,\text{جہ مر}\left[\text{ا}_1^2 - \frac{\text{لا}^2}{3} - \frac{2}{3}\frac{\text{ب}_1^3}{\text{لا}}\right]$ | $\frac{4\pi\,\text{مر جہ}}{3} \times \frac{\text{ا}_1^3 - \text{ب}_1^3}{\text{لا}}$ |
| $\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرلا}}$ | ۰ | $-\frac{4\pi\,\text{جہ مر}}{3}\left[\text{لا} - \frac{\text{ب}_1^3}{\text{لا}^2}\right]$ | $-\frac{4\pi\,\text{مر جہ}}{3}\,\frac{\text{ا}_1^3 - \text{ب}_1^3}{\text{لا}^2}$ |
| $\frac{\text{فر}^2\text{قہ}}{\text{فرلا}^2}$ | ۰ | $-\frac{4\pi\,\text{جہ مر}}{3}\left[1 + \frac{2\,\text{ب}_1^3}{\text{لا}^3}\right]$ | $\frac{8\pi\,\text{مر جہ}}{3}\left[\frac{\text{ا}_1^3 - \text{ب}_1^3}{\text{لا}^3}\right]$ |

غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ اگر نقطہ ن مرکز و سے بتدریج حرکت کرکے باہر کی طرف آتا جائے اور بالتسلسل $\text{ن}_1$، $\text{ن}_2$، $\text{ن}_3$ محلوں میں سے گزرے تو قہ اور $\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرلا}}$ کی قیمتوں میں تسلسل قایم رہتا ہے اور بالخصوص یہ تفاعل $\text{لا} = \text{ا}_1$ اور $\text{لا} = \text{ب}_1$ پر یعنی جب ن کشش کرنے والے مادہ سے نکل کر باہر یا اندر آتا ہے مسلسل رہتے ہیں لیکن $\frac{\text{فر}^2\text{قہ}}{\text{فرلا}^2}$ کی قیمتیں ان نقطوں پر غیر مسلسل ہو جاتی ہیں۔

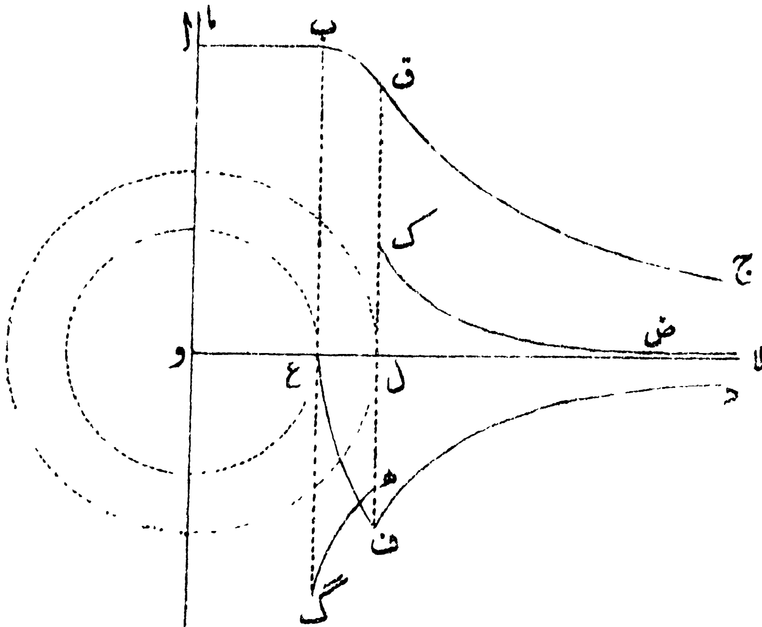
$\text{لا} = \text{ب}_1$ پر $\frac{\text{فر}^2\text{قہ}}{\text{فرلا}^2}$ دفعتہً صفر سے $-4\pi$ جہ مر ہوتا ہے۔

اور $\text{لا} = \text{ا}_1$ پر یہ فوراً $-\frac{4\pi\,\text{جہ مر}}{3}\left(1 + \frac{2\,\text{ب}_1^3}{\text{ا}_1^3}\right)$ سے بدل کر

$\frac{8\pi\,\text{مر جہ}}{3}\;\frac{\text{ا}_1^3 - \text{ب}_1^3}{\text{ا}_1^3}$ ہو جاتا ہے۔

ساتھ کی شکل میں جو طامسن اور ٹیٹ کی کتاب نیچرل فلاسفی سے نقل کی گئی ہے قہ، $\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرلا}}$ اور $\frac{\text{فر}^2\text{قہ}}{\text{فرلا}^2}$ کی قیمتوں کی تبدیلیاں واضح طور پر دکھائی گئی ہیں۔

وع اور ول خول کو احاطہ کرنے والی سطحوں کے نصف قطر $\text{ب}_1$ اور $\text{ا}_1$ ہیں




قہ کی قیمتیں مسلسل منحنی ا ب ق ج سے معلوم ہوتی ہیں جس میں کہیں بھی سمت کی تبدیلی دفعتہً واقع نہیں ہوتی۔ $\frac{فرقہ}{فرلا}$ کو منحنی و ع ف د سے تعبیر کرتا ہے جس کی سمت دفعتہً ع اور ف پر بدل جاتی ہے، $\frac{فر^۲قہ}{فرلا^۲}$ کو غیر مسلسل منحنی سے جو تین علیحدہ علیحدہ شاخوں و ع، گ ھ اور ک ض پر مشتمل ہے تعبیر کیا گیا ہے۔

# مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ ایک پتلے متجانس کروی خول کے منطقہ کا قوہ منطقہ کے محور پر کے کسی نقطہ پر $\frac{۲ م ک}{ر_۱ + ر_۲}$ ہوتا ہے جہاں م کمیت ہے منطقہ کی اور ر۱ اور ر۲ نقطہ ن کے فاصلے ہیں منطقہ کے احاطہ کرنے والے کناروں سے۔

۲۔ ایک یکساں کروی خول کے باہر ایک نقطہ و ہے۔ ثابت کرو کہ نقطہ و پر اس خول کے قوہ کا نصف، خول کے اس حصہ کی وجہ سے ہے جو بہ نسبت مرکز کے و سے زیادہ قریب ہے۔

۳ — ایک کرہ کا نصف قطر ا، اور کثافت ھر ہے اور کسی اندرونی نقطہ ن کا فاصلہ مرکز سے ب، ہے۔ ن میں سے گزرنے والی ایک سطح مستوی کرہ کو دو حصوں میں منقسم کرتی ہے ثابت کرو کہ ان حصوں کا جو قوہ ن پر ہوتا ہے اُن کا فرق ہے

$$\frac{4\pi\,\text{ھر}\,\text{جہ}}{3\,\text{ب}_1^{2}}\left[\text{ا}_1^{3}-\left(\text{ا}_1^{2}-\text{ب}_1^{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

۴ — ایک ٹھوس متجانس کشش کرنے والے کرہ کا نصف قطر ا، کثافت $\frac{3\,\text{م}}{4\pi}$ ہے اور اس کی سطح پر ایک اندفاعی مادہ کی یکساں تقسیم ہے جس کی سطحی کثافت $\frac{\text{م}\,\text{ا}_1}{4\pi}$ ہے۔ اس کرہ کے کسی اندرونی یا بیرونی نقطہ پر قوہ معلوم کرو۔

جواب (اندر $\text{م}\,\text{جہ}\,(\text{ا}_1^{2}-\text{لا}^{2})$ اور باہر صفر ہے)

۵ — ایک ٹھوس نصف کرہ کا نصف قطر ا، اور کثافت ھر ہے۔ ثابت کرو کہ ایک بیرونی نقطہ ن پر جس کا فاصلہ مرکز سے سا ہے اس کا قوہ

$$\frac{2\pi\,\text{جہ}\,\text{ھر}}{3\,\text{سا}}\left[\text{ا}_1^{3}\pm\left\{\left(\text{ا}_1^{2}+\text{سا}^{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\text{سا}^{3}-\frac{3}{2}\,\text{ا}_1^{2}\,\text{سا}\right\}\right]$$

ہے جہاں جمع کی علامت لی جائے گی اگر نقطہ ن مجسم کی محدب سطح کی جانب واقع ہو اور منفی اگر یہ مستوی سطح کی جانب واقع ہو۔

۶ — ایک کرہ کی کثافت مرکز سے فاصلہ لا پر $\frac{\text{ک}}{\text{لا}}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}}{\text{ج}}$ ہے جہاں ک اور ج مقدار مستقل ہیں۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ پر جو مرکز سے فاصلہ لا پر ہے کشش

$$4\pi\,\text{جہ}\,\text{ک}\,\text{ج}\left(\frac{\text{ج}}{\text{لا}^{2}}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}}{\text{ج}}-\frac{1}{\text{لا}}\,\text{جم}\,\frac{\text{لا}}{\text{ج}}\right)$$

ہوگی۔ نیز قوہ معلوم کرو۔

۷ — ایک کروی خول کی موٹائی ک، (جہاں ک چھوٹا ہے) کثافت ھر اور نصف قطر ا ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز سے فاصلہ ج پر کے بیرونی نقطہ پر قوہ ہے

$$\frac{-2\pi\,\text{جہ}\,\text{ھر}\,\text{ک}\,\text{ا}}{(\text{ن}+1)(\text{ن}+3)\,\text{ج}}\left[(\text{ج}+\text{ا})^{\text{ن}+3}-(\text{ج}-\text{ا})^{\text{ن}+3}\right]$$

جہاں قوت کا کلیہ فاصلہ کی ن ویں قوت ہے۔

۸۔ کشش کرنے والے مادہ کے باہر اگر ایک کروی سطح لی جائے تو ثابت کرو کہ سطح کے تمام نقطوں پر قوہ کی قیمتوں کی اوسط قیمت کرہ کے مرکز پر قوہ کی قیمت کے مساوی ہے۔

نیز اگر کشش کرنے والا مادہ کروی سطح کے اندر واقع ہو تو ثابت کرو کہ کرہ کی محولہ بالا اوسط

$$\text{قیمت} = \text{جہ} \frac{\text{مادہ کی کمیت}}{\text{کرہ کا نصف قطر}}$$

۹۔ کشش کرنیوالے مادہ کے باہر اگر ایک لامتناہی طول کا مستدیر اسطوانہ لیا جائے تو ثابت کرو کہ اسطوانہ کی سطح پر اس کی قوہ کی مختلف قیمتوں کی اوسط قیمت اسطوانہ کے محور پر کسی نقطہ پر قوہ کے مساوی ہوگی۔

# کششوں اور قوہ پر متفرق مثالیں

۱۔ ش ج ایک مقناطیس ہے اور ن کوئی مقناطیسی ذرہ ہے جو بناءً علیہ ش کی جانب اور ج کے مخالف سمت میں کھنچ رہا ہے اور عاملہ قوتیں معکوس مربع کے متناسب ہیں، ش ج کا وسطی نقطہ و ہے اور $\angle$ ش و ن = طہ

اب اگر و ن بمقابلہ مقناطیس کے ابعاد کے بہت بڑا ہو تو ثابت کرو کہ ن پر عمل کرنے والی قوتوں کا حاصل ن و کے ساتھ زاویہ مس$^{-1}$ ($\frac{1}{2}$ مس طہ) بناتا ہے۔

فرض کرو کہ و ن = ر، و ش = و ج = ا اور $\angle$ ش و ن = طہ۔ ن پر مقناطیس کی کشش اس کشش کے معادل ہے جو قطبوں ش اور ج پر مقناطیسیت کی مساوی مثبت اور منفی مقداروں سے پیدا ہوتی ہے۔

$$\text{اس لئے ن پر قوہ قہ} = \text{مہ}\left[\frac{1}{\text{ش ن}} - \frac{1}{\text{ج ن}}\right]$$

اب $\text{ش ن}^2 = \text{ر}^2 + \text{ا}^2 - 2\,\text{ا ر جم طہ}$

اس لئے ا کے مربعوں کو نظر انداز کرنے سے

$$\frac{1}{\text{ش ن}} = \frac{1}{\text{ر}}\left[1 - \frac{2\text{ا}}{\text{ر}}\text{جم طہ}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\text{ر}}\left[1 + \frac{\text{ا}}{\text{ر}}\text{ جم طہ}\right]$$

پس $\frac{1}{ج(ن)} = \frac{1}{ر} \left[ 1 - \frac{ا}{ر} جم ط \right]$

∴ $ق = \frac{2 م ا}{ر^2} جم ط$

اس لئے اگر ن د کے متوازی اور اس پر عمود وار ط کے کم ہونے کی سمت میں قوتیں بالترتیب لا اور ما ہوں تو

$لا = - \frac{فرق}{فرر} = \frac{4 م ا}{ر^3} جم ط$

اور $ما = - \frac{1}{ر} \frac{فرق}{فرط} = \frac{2 م ا}{ر^3} جب ط$

پس مطلوبہ زاویہ = $مس^{-1} \frac{ما}{لا} = مس^{-1} \left[ \frac{1}{2} مس ط \right]$

۲ــــ ایک کاغذ پر کچھ لوہا چون بکھیرا گیا ہے اور اس پر ایک مقناطیس رکھی گئی ہے جس کے قطب ش اور ج ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ منحنی جن میں لوہا چون کے ذرات اپنے کو ترتیب دے لیتے ہیں مساوات جم ط - جم ط = مستقل سے حاصل ہوتے ہیں جہاں ط اور ط زاویے ن ج لا اور ن ش لا ہیں اور لا کوئی نقطہ ہے ج ش ممدودہ پر۔

نیز ثابت کرو کہ وہ سب ذرات جن کے رخ ش ج پر کے ایک معلوم نقطہ د کی طرف ہیں ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں (لوہا چون کا ہر ذرہ ایک چھوٹا سا مقناطیس ہے اس لئے اس کو ہر دو قطب میں سے کسی ایک پر حاصل قوت کی سمت میں قائم کرلینا چاہیئے ورنہ اس پر جفت عمل کرے گا)۔

۳ــــ ایک بہت پتلا یکساں مستدیر حلقہ کشش کرنے والے مادہ کا بنا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ ایک ذرہ جس کی حرکت حلقہ کے مستوی میں مقید ہے حلقہ کے مرکز پر غیر قائم تعادل میں ہوگا۔

فرض کرو کہ حلقہ کا مرکز و ہے اور ن مجذوب نقطہ ہے جس کا فاصلہ اس کے مرکز و سے ج ہے۔ تب اگر و ن کو خطِ ابتدائی مانا جائے تو حلقہ کی کشش و ن کی سمت میں

$= 2 \int_{0}^{\pi} \frac{جدک م ا فرط}{ا^2 + ج^2 - 2 ا ج جم ط} \times \frac{ا جم ط - ج}{\sqrt{ا^2 + ج^2 - 2 ا ج جم ط}}$

$$= \frac{\text{۲ جہ ک م}}{\text{د}_1^2} \int_0^{\pi} \left[ 1 + \frac{\text{۳ ج}_1}{\text{د}_1} \text{جم ط} \right] \left[ \text{د}_1 \text{ جم ط} - \text{ج}_1 \right] \text{فر ط}$$

$$= \frac{\text{۲ جہ ک م}}{\text{د}_1^2} \int_0^{\pi} \left( \text{د}_1 \text{ جم ط} - \text{ج}_1 + \text{۳ ج}_1 \text{ جم}^2 \text{ ط} \right) \text{فر ط}$$

جبکہ $\text{ج}_1$ کے مربعوں کو نظرانداز کیا جائے

$$= \frac{\text{۲ جہ ک م}}{\text{د}_1^2} \left[ \text{د}_1 \text{ جب ط} + \frac{\text{ج}_1}{2} \text{ط} + \frac{\text{۳ ج}_1}{4} \text{جب ۲ط} \right]_0^{\pi} = \frac{\text{جہ } \pi \text{ ک م ج}_1}{\text{د}_1^2}$$

لہٰذا کشش $\text{ج}_1$ میں اضافہ پیدا کرنے کا میلان رکھتی ہے یعنی ذرہ کا مرکز سے فاصلہ بڑھانے کی کوشش کرتی ہے پس تعادل غیر قائم ہے۔

۴۔ ن مساوی قوتوں کے مرکزوں کو ایک دائرہ کے محیط پر متشاکلاً ترتیب دیا گیا ہے۔ ہر ایک قوت اندفاعی ہے اور اس کا قانون فاصلہ کی مقلوب ھم ویں قوت ہے۔ ثابت کرو کہ ایک ذرہ جسے دائرہ کے مرکز پر رکھا جائے تعادل قائم میں ہوگا سوائے اُس صورت کے جبکہ ھم ن کے مساوی ہو۔

۵۔ آٹھ مرکزی قوتوں کے مرکز ایک مکعب کے راسوں پر ہیں اور مکعب کے مرکز کے قریب ایک ذرہ کو ایک ہی کلیہ کے مطابق کھینچتے ہیں اور اُن کی مطلق حدتیں بھی ایک ہی ہیں۔ ثابت کرو کہ اُن کا حاصل عمل مکعب کے مرکز میں سے گزرتا ہے بشرطیکہ قوت کا کلیہ مقلوب مربع کا کلیہ نہ ہو۔

۶۔ ایک خط پر ایک دوسرے سے $\frac{2\pi}{\text{م}}$ فاصلہ پر مساوی کمیتوں کی لا متناہی تعداد رکھی ہوئی ہے اور یہ سب کمیتیں ایک ذرہ کو جس کا فاصلہ خط مذکور سے ما ہے فاصلہ کے مقلوب مکعب کے تناسب کھینچتی ہیں ثابت کرو کہ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ جو حاصل قوت کی سمت خط مذکور کے ساتھ بنا سکتی ہے $\text{جم}^{-1} \left[ \frac{\text{م ما}}{\text{جبنر م ما}} \right]$ ہے۔

[ اگر کسی نقطہ (لا، ما) پر قوۃ قہ ہو اور کسی ایک جاذب کمیت کو مرکز مانا جائے

تو ہمیں حاصل ہوتا ہے ق = م/۲ ا × جبنز م ا / (جتز م ا – جم م لا) ]

۷ — اگر مادہ کا ہر ایک ذرہ دوسرے ذرہ کو فاصلہ کی ن ویں قوت کے متناسب قوت کے ساتھ کھینچتا ہو تو ثابت کرو کہ مادہ کے اندر ہر نقطہ پر کشش لا متناہی ہوگی اگر ن > ۲۔

۸ — لا انتہا لمبی پتلی سلاخوں کی لا متناہی تعداد ایک دوسرے کے متوازی اور ایک دوسرے سے فاصلہ ج؍ پر ایک سطح مستوی میں ترتیب دی ہوئی ہے سلاخوں کی یکساں خطی کثافت م ہے۔ ثابت کرو کہ سطح مستوی کے کسی نقطہ پر جس کا فاصلہ قریب ترین سلاخ سے ا ہے حاصل کشش ۲ج ؍ ج؍ مم ۵ ط ا / ج؍ ہے۔

[جب ط کا اجزائے ضربی والا جملہ استعمال کرو اور لوکارثمی تفرق کے عمل سے مم ط کا پھیلاؤ حاصل کرو]

۹ — لا محدود طول کی ایک یکساں سلاخ فاصلہ کی مقلوب ن ویں قوت کے مطابق کشش کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ حاصل کشش جذر ط م / ج؍^(ن-۱) جا (ن/۲) / جا (ن/۲ + ۱/۲) ہے

جہاں م تار کی فی اکائی طول کمیت ہے اور ج؍ مجذوب نقطہ سے سلاخ کا کم سے کم فاصلہ ہے۔

۱۰ — ایک یکساں مکعب کی کثافت ھ ہے ثابت کرو کہ اس کی کشش کسی نقطہ پر جس کا فاصلہ مرکز سے ر ہے ۴/۳ ط ھ ر بجانب مرکز ہوگی اگر ر چھوٹا ہو۔

۱۱ — ایک یکساں مکعب قانون قدرت کے مطابق کشش کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ کسی راس پر اس کی حاصل کشش کے تین مساوی اجزاء ترکیبی ہیں جو اس راس پر ملنے والے کناروں کے ساتھ عمل کرتے ہیں اور مقدار میں ذیل کے مساوی ہیں۔

ج ھ ر؍ [ لوک؍ (۳ + ۲ جذر۲)(۲ – جذر۳) + ط/۶ ]

جہاں ھ مکعب کی کثافت ہے اور ر؍ اس کے ایک کنارہ کا طول ہے۔

۱۲ — ایک متجانس منشور لا انتہا لمبا ہے اور اس کی کثافت م ہے۔ اس کی عمودی تراش مستطیل ہے جس کے اضلاع $\text{و}_1$ اور $\text{ب}_1$ ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے کنارہ کے کسی ایک نقطہ پر کشش کے اجزائے ترکیبی اس میں سے گزرنے والی تراش کے اضلاع $\text{و}_1$ اور $\text{ب}_1$ کے متوازی

$$\text{ج م}\left[۲\,\text{و}_1\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{ب}_1}{\text{و}_1}+\text{ب}_1\,\text{لوک}\,\frac{\text{و}_1^2+\text{ب}_1^2}{\text{ب}_1^2}\right]\ \text{اور}\ \text{ج م}\left[۲\,\text{ب}_1\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{و}_1}{\text{ب}_1}+\text{و}_1\,\text{لوک}\,\frac{\text{و}_1^2+\text{ب}_1^2}{\text{و}_1^2}\right]$$

ہیں۔

۱۳ — مشق ماقبل کی مدد سے ثابت کرو کہ اگر زمین کے اندر ایک لمبا گہرا تنگ شگاف شرقاً غرباً واقع ہو تو اس کے ایک کنارہ پر کے ظاہری عرض بلد میں شگاف کی موجودگی کی وجہ سے بقدر زاویہ $\frac{۳\,\text{م}_1\,\text{و}_1}{۴\,\text{م}\,\text{ر}}$ کے تفاوت واقع ہوگا جہاں م اور $\text{م}_1$ بالترتیب زمین کی اوسط کثافت اور سطحی کثافت ہیں اور ر اس کا نصف قطر ہے اور شگاف کا عرض $\text{و}_1$ ہے۔
نیز ثابت کرو کہ اگر شگاف کی گہرائی ھ اس کی چوڑائی و کے مقابلہ میں بہت چھوٹی ہو تو تبدیلی تقریباً $\frac{۳}{۲}\times\frac{\text{م}_1\,\text{ھ}}{\pi\,\text{م}\,\text{ر}}\left[۱+\text{لوک}\,\frac{\text{و}_1}{\text{ب}_1}\right]$ ہوگی۔

۱۴ — ایک نہر کی تراش مستطیل ہے اور اس کا طول اس کی گہرائی گ کے مقابلہ میں بہت زیادہ ہے، اگر نہر کی چوڑائی ۲گ ہو اور زمین کا نصف قطر ر ہو تو ثابت کرو کہ نہر کی سطح کے وسطی نقطہ پر جاذبہ ارض کی قیمت میں $\frac{۳}{۴}\times\frac{\pi+۲\,\text{لوک}\,۲}{\pi}\times\frac{(۱-\text{ن})\,\text{اج}}{\text{ر}}$ کی کمی ہو جاتی ہے
جہاں ن نسبت ہے پانی کی کثافت کی زمین کی اوسط کثافت کے ساتھ۔

۱۵ — ایک پترا ہے جو اندرونی اور بیرونی طور پر ہم مرکز دائروں سے گھرا ہوا ہے جن کے نصف قطر بالترتیب ب اور و ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر پترے کی کشش کا کلیہ (فاصلہ)$^{-\text{ن}}$ ہو تو کشش اس نقطہ پر جس کا فاصلہ مرکز سے $\text{و}^{\frac{۱}{۳}}\,\text{ب}^{\frac{۱}{۳}}\sqrt[\text{ن}]{\dfrac{\text{ب}^{\frac{\text{ن}}{۳}}+\text{و}^{\frac{\text{ن}}{۳}}}{\text{ب}^{\frac{۲\text{ن}}{۳}}+\text{و}^{\frac{۲\text{ن}}{۳}}}}$ ہے صفر ہوتی ہے۔

۱۶ — ایک متجانس کرہ کا نصف قطر و ہے اگر کشش کا کلیہ $\frac{\text{م}}{(\text{فاصلہ})^2}$ ہو تو ثابت کرو کہ

اس کی کشش کسی اندرونی نقطہ پر جس کا مرکز سے فاصلہ لا ہے $\frac{\pi \text{ مہ } ا}{لا} - \pi \text{ مہ } \frac{ا^2 + لا^2}{2 لا^2} \times$ لوک $\frac{ا + لا}{ا - لا}$ ہے۔ کرہ کی کمیت م ہے اور لا فاصلہ ہے نقطہ کا کرہ کے مرکز سے

۱۷ — ایک کروی خول کا مادہ جس قوت سے کشش کرتا ہے فاصلہ کی پانچویں قوت کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ کسی بیرونی نقطہ ن پر کشش جہ م $\frac{ج ن}{ن ت^4}$ ہوگی جہاں م کروی خول کی کمیت ہے، ج اس کا مرکز ہے اور ن م مماس ہے ن سے

اگر ن خول کے اندر ہو تو یہ کشش کیا ہو جاتی ہے۔

۱۸ — اگر کشش کا کلیہ فاصلہ کی مقلوب پانچویں قوت ہو تو ثابت کرو کہ ایک یکساں ٹھوس کرہ کی کشش جس کی کثافت ک اور نصف قطر ا ہے کسی بیرونی نقطہ پر جس کا فاصلہ مرکز سے ج ہے جہ $\frac{\pi \text{ ھر}}{4 ج^2} \left\{ \frac{2 ج ا (ج^2 + ا^2)}{(ج^2 - ا^2)} + \text{لوک} \frac{ج - ا}{ج + ا} \right\}$ ہوگی۔

۱۹ — ثابت کرو کہ ایک ایسے ٹھوس چپٹے کرہ نما کی کشش جس کا خروج المرکز چھوٹا ہو اور جس کے محور ا، ا، ب ہوں اکائی کمیت کے ذرہ پر جو اس کے محور اعظم کے سرے پر واقع ہے $\frac{4}{3}$ جہ $\pi$ ھر $\left(1 - \frac{2 د}{5}\right)$ ا ہوگی اور محور اصغر کے سرے پر $\frac{4}{3}$ جہ $\pi$ ھر $\left(1 + \frac{2 د}{5}\right)$ ب ہوگی

جہاں ب = (۱ − د) ا۔

۲۰ — ایک یکساں نصف کروی خول کا نصف قطر ا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی کشش اسکی مستوی سطح کے کسی نقطہ پر جس کا فاصلہ مرکز سے ر (> ا) ہو ان دو ترکیبی کششوں پر مشتمل ہے:

$\frac{م}{ر^2}$ مرکز کی طرف اور ایک قوت $\frac{2 م ا}{\pi ر^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جب}^2 ط \, د ط}{\sqrt{ر^2 - ا^2 \text{جب}^2 ط}}$ سطح مستوی پر عمود وار۔

اس سے مستنبط کرو کہ ایک مجسم نصف کرہ کی کشش اس کے کنارہ پر کے ایک نقطہ پر کیا ہوگی۔

۲۱ — ایک مکانی $م^2 = 4 ہ لا$ اور اس کے بر پیچہ $27 ہ م^2 = 4 (لا - 2 ہ)^3$ کے درمیان

جو جگہ گھر جاتی ہے اس کو مکانی کے محور کے گرد گھمانے سے ایک مجسم تیار کیا گیا ہے جس کی کثافت ھ ہے۔ ثابت کرو کہ اس مجسم کی کشش بہ سچہ کے قرن نقطہ پر

$$\pi\,\text{جہ م ا}\left[\text{۴ جب}^{-1}\text{۴} + \text{۵}\,\text{۴}^{\frac{1}{2}} - \text{۲۷}\right] \text{ ہے۔}$$

۲۲ — ایک گردشی مکافی نما کو اس کے راس سے فاصلہ ب پر ایک سطح مستوی سے کاٹا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ مجسم کی کشش اس کے راس پر

$\text{۴}\,\pi\,\text{جہ م ا}\ \text{لوک}_{\text{و}}\dfrac{\text{ا}+\text{ب}}{\text{ا}}$ ہے جہاں ۴ ا مکافی کا وتر خاص ہے۔

۲۳ — ایک ٹھوس متجانس چپٹے کرہ نما کو محور اصغر پر علی القوائم سطح مستوی سے دو مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ایک نصف کی کشش اس کی مستوی سطح کے کنارہ پر کے کسی نقطہ پر قاعدہ کی سطح مستوی کے ساتھ زاویہ $\text{مس}^{-1}\dfrac{\text{۴ ج}(\text{مس}^{-1}\text{ز} - \text{ز})}{\pi(\text{و جب}^{-1}\text{ز} - \text{ج ز})}$ بناتی ہے جہاں ا اور ج نیم محور ہیں اور ز محور اصغر میں سے گزرنے والی کسی مستوی تراشش کا خروج المرکز ہے۔

۲۴ — اگر ایک پتر امبدا میں سے گزرے اور زائد $\dfrac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \dfrac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = \text{۱}$ اسے محیط ہو تو ثابت کرو کہ اس کی جو کشش ناقص $\dfrac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2+\text{ب}^2} + \dfrac{\text{ی}^2}{\text{ب}^2} = \text{۱}$، ما = ۰ پر کے کسی نقطہ پر ہوگی اس کا ی جزو ترکیبی $\dfrac{\text{۲}\,\pi\,\text{جہ م ا ھ}}{\sqrt{\text{ا}^2\,\text{ھ}^2 + \text{ب}^4}}$ ہوگا جہاں ھ نقطۂ مذکورہ کا ی محدد ہے اور م کمیت ہے پترے کے اکائی رقبہ کی۔

۲۵ — ثابت کرو کہ ایک ٹھوس لمبوترے کرہ نما کے قطب پر استوائی سطح مستوی کے دوسرے جانب کے مادہ سے جو کشش پیدا ہوتی ہے وہ

$$\text{۲}\,\pi\,\text{جہ م ا}\left[\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{ز}^2}\left(\text{۲} - \sqrt{\text{۲} - \text{ز}^2}\right) + \frac{\text{۱}-\text{ز}^2}{\text{ز}^3}\ \text{لوک}\,\frac{(\text{۱}+\text{ز})^2}{\text{۱} + \text{ز}\sqrt{\text{۲} - \text{ز}^2}}\right]$$

ہے جہاں نصف النہاری ناقص کا نیم محور ا اور ز خروج المرکز ہے اور ھ مجسم کی

کثافت ہے۔

۲۶ ۔۔ ایک منحنی کی قوس ایک ذرہ کو جو اس کے قطب پر پڑا ہے قوت $\frac{\text{م}}{(\text{فاصلہ})^{\text{ن}}}$ سے کشش کرتی ہے۔ اگر حاصل کشش دونوں سروں کے نیم قطروں کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرے تو ثابت کرو کہ منحنی کی مساوات ہوگی

$$\text{ر}^{\text{ن}-1} \text{ جب } \{(\text{ن} - 1)\text{ ط}\} = \text{مستقل}$$

۲۷ ۔۔ اگر ایک متجانس گردشی مجسم جس کی کمیت ہم اور کثافت ھ ہے ایسا ہو کہ اس کی کشش گردشی محور پر کے کسی نقطہ و پر بڑی سے بڑی ہو تو ثابت کرو کہ مجسم جس منحنی کی گردش سے پیدا ہوتا ہے اس کی مساوات ہے

$$\text{ر}^2 = \text{ا}^2 \text{ جم ط}$$

[فرض کرو کہ گردش کا محور ولا ہے۔ ظاہر ہے کہ و جسم پر واقع ہوگا۔ وہ سطح جو ایسی ہو کہ اس پر کے کسی ذرہ کی کشش کا ولا کے متوازی جزو تحلیلی ہمیشہ وہی رہے صریحاً $\frac{\text{جم ط}}{\text{ر}^2}$ = مستقل یعنی $\text{ر}^2 = \text{ا}^2 \text{ جم ط}$ ... ... ... (۱)

ہونی چاہیئے۔ ا کو ایسا منتخب کرو کہ معلومہ مادہ کی کل کمیت ہم عین اس سطح کے اندر آ جائے یعنی ہم = (۱) سے جو گردشی سطح حاصل ہوتی ہے اُس کی کمیت = $\frac{4\pi \text{ھ}}{15} \text{ا}^3$۔ یہ نتیجہ تکمل کرنے سے بآسانی حاصل ہو سکتا ہے۔ اب اس طرح حاصل شدہ سطح مطلوبہ سطح ہے۔ کیونکہ فرض کرو کہ ہم مادہ کے ایک چھوٹے جزو کو سطح کے اندر کے نقطہ $\text{ن}_1$ سے ہٹا کر باہر کے نقطہ $\text{ن}_2$ پر لے جاتے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ و $\text{ن}_1$ اور و $\text{ن}_2$ سطح سے $\text{ق}_1$ اور $\text{ق}_2$ پر ملتے ہیں۔ تب صریحاً و پر کے ایک ذرہ پر ہم کی کشش جبکہ یہ مقام $\text{ن}_1$ پر ہے اس کشش سے بڑی ہوگی جبکہ یہ مقام $\text{ق}_1$ پر ہے اور اس کی کشش جبکہ یہ $\text{ن}_2$ پر ہو چھوٹی ہوگی اس کشش سے جبکہ یہ $\text{ق}_2$ پر ہو ساتھ ہی اس کے جبکہ یہ $\text{ق}_1$ پر ہو یا $\text{ق}_2$ پر ہو تو اس کی کششوں کے اجزائے تحلیلی و لا کی سمت میں وہی ہیں۔ اس لئے

ھم کو سطح کے اندر سے سطح کے باہر لانے میں د لا کے متوازی کشش میں کمی واقع ہوتی ہے۔ پس مسئلہ ثابت ہوا]

۲۸ ــــ ایک یکساں ٹھوس کرہ کی کمیت م ہے۔ اُس کو اس کے مرکز میں سے گزرنے والی سطح مستوی سے دو مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان نصفوں کے درمیان جو تعامل باہمی کشش کی وجہ سے ہے وہ $\frac{۳}{۱۶}$ ج $\frac{\text{م}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}$ کے مساوی ہوگا جہاں ا کرہ کا نصف قطر ہے۔

صریحاً ایک نصف کرہ کی کشش خود پر صفر ہے کیونکہ یہ مساوی اور مختلف قوتوں کے زوجوں پر مشتمل ہے اس لئے ایک نصف کی کشش دوسرے نصف پر مساوی ہے ایک نصف پر کل کرہ کی کشش کے۔ فرض کرو کہ اس نصف کا کوئی نقطہ ن ہے، و ن = ر، $\angle$ ن و ی = ط جہاں و مرکز ہے اور و ی عمود ہے کاٹنے والی سطح مستوی پر۔

کل کرہ کی کشش ن پر = ج × $\frac{۴}{۳}$ × π ھ ر [دفعہ ۲۸۷] اور حجم کے جس جزو کی وجہ سے یہ کشش عمل کر رہی ہے وہ = ر مف ط × مف ر × ۲ π ر جیب ط

اس لئے کل کرہ کی کشش ایک نصف پر مستوی سطح کے علی القوائم سمت میں

$$= \int_{۰}^{\text{ا}} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \text{ھ ر فر ط} \times \text{فر ر} \times ۲\pi\,\text{ر جیب ط} \left[\text{ج}\,\frac{۴}{۳} \times \pi\,\text{ھ ر}\right] \text{جم ط}$$

$$= \frac{۱}{۳}\,\text{ج}\,\pi^{۲}\,\text{ھ}^{۲}\,\text{ا}^{۴} = \frac{۳\,\text{ج}}{۱۶} \times \frac{\text{م}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}$$

ان دو نصف کروں کے درمیان حاصل تعامل ان کے باہمی حاصل کشش کے مساوی ہے۔

**متبادل ثبوت** - سیال کے ایک ایسے کرہ پر غور کرو جو صرف اپنی کشش کے زیر عمل ساکن ہو۔ ایک نقطہ پر جس کا فاصلہ مرکز سے ر ہے کشش = ج $\frac{۴}{۳}$ × π ھ ر

اس لئے سکونِ سیالات کی اساسی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{مف د}}{\text{ھ}} = -\frac{۴\,\pi\,\text{ھ ج}}{۳}\,\text{ر فر ر}$$

$$\therefore \quad د = ج - \frac{۲}{۳} \pi ھ^{۲} ج ر^{۲} = \frac{۲}{۳} \pi ھ^{۲} ج \left( ا^{۲} - ر^{۲} \right)$$

کیونکہ کرہ کی سطح پر دباؤ صفر ہے۔

مرکز میں سے گزرنے والی سطح مستوی پر عمل القوائم دباؤ

$$= \int_{0}^{ا} ۲ \pi ر \, فر \times د = \frac{۴}{۳} \pi^{۲} ھ^{۲} ج \int_{0}^{ا} \left( ا^{۲} ر - ر^{۳} \right) فر = \frac{\pi^{۲} ھ^{۲} ج ا^{۴}}{۳}$$

اب اگر ایک نصف کرہ کو استوار بنا دیا جائے تو یہ پہلی ہی قوتوں کے زیر عمل متعادل ہوگا اور اس لئے مطلوبہ تعامل $= \frac{\pi^{۲} ھ^{۲} ج ا^{۴}}{۳} = \frac{۳ ج}{۱۶} \times \frac{م^{۲}}{ا^{۲}}$

۲۹ — ایک کششی مادہ کا خول دو ہم مرکز کروں سے جن کے نصف قطر ا اور ب ہیں گھرا ہوا ہے۔ اس کو مرکز میں سے گزرنے والے مستوی سے دو حصوں میں کاٹا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر دو نصف حصوں کے درمیان دباؤ $\frac{۳ ج م^{۲}}{۱۶} \times \frac{ا^{۲} + ۲ ا ب + ۳ ب^{۲}}{\left( ا^{۲} + ا ب + ب^{۲} \right)}$ ہے۔

۳۰ — ایک یکساں مجسم کرہ کا نصف قطر ا ہے، اس کے دو (کسی طرح کے) حصوں کو الگ کرنے کے لئے جو قوت درکار ہوتی ہے وہ $= \frac{ج م مَ}{۳ ا} \times ن نَ$ جہاں م اور مَ ان حصوں کی کمیتیں ہیں اور ن اور نَ ان کے مرکز ثقل ہیں۔

۳۱ — ایک لامتناہی متجانس اسطوانہ کا نصف قطر ا ہے اس کے اکائی طول کی کمیت م ہے۔ اس کے محور میں سے گزرنے والی مستوی سطح سے اس کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان حصوں کے درمیان دباؤ فی اکائی طول بوجہ ان کی باہمی کشش کے $\frac{۴ ج م^{۲}}{۳ \pi ا}$ ہے۔

۳۲ — ایک پتلے کروی خول میں سے دو اعظم دائروں کے ذریعہ ایک پھانک کاٹ لی گئی ہے دائروں کے مستویوں کے درمیان زاویہ ۲ع ہے۔ ثابت کرو کہ باقی خول کی کشش اس پھانک پر $\frac{ج م^{۲}}{۴ ا^{۲}}$ جب ع ہوگی جہاں م خول کی کمیت ہے اور ا اس کا نصف قطر ہے۔

۳۳ — ایک یکساں متجانس کرہ ایک مستوی مستدیر تختی پر اس طرح رکھا ہوا ہے کہ کرہ تختی کے مرکز پر مس کرتا ہے۔ کرہ اور تختی کے قطر اور کمیتیں مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ باہمی تجاذب کی وجہ سے ان کا باہمی تعامل ۴ لہ مہ جب$^{۲}$ $\frac{\pi}{۸}$ × (ان میں سے ایک کا وزن) ہوگا جہاں لہ نسبت ہے کسی ایک کے نصف قطر کو زمین کے نصف قطر کے ساتھ اور مہ نسبت ہے کرہ کی کثافت کو زمین کی اوسط کثافت کے ساتھ۔

۳۴ — ایک متجانس کرہ کا نصف قطر ا اور کمیت $م_۱$ ہے - یہ کرہ ایک دوسرے نصف کرہ کے مستوی قاعدہ کو مرکز پر مس کرتا ہے۔ نصف کرہ کا نصف قطر ا اور کمیت $م_۲$ ہے۔

ثابت کرو کہ باہمی کشش کی وجہ سے ان کے درمیان دباؤ $\frac{جہ م_۱ م_۲}{ا^۲}$ $(\sqrt{۲} - ۱)$ ہے -

۳۵ — ایک یکساں مستدیر تختی کی کمیت م ہے اور یہ اُسی نصف قطر کے ایک کشش کرنے والے ثابت کھردرے کرہ پر بحالت سکون پڑی ہے۔ اگر تختی کے کنارہ کے ساتھ ایک چھوٹا وزن $م_۱$ لگا دیا جائے تو ثابت کرو کہ تختی ایک ایسے زاویہ میں سے گھوم جائیگی جس کا توسی پیمانہ $\frac{م_۱}{م}$ ہوگا جہاں $(\frac{م_۱}{م})$ کے مربعوں کو نظرانداز کر دیا گیا ہے۔

۳۶ — ثابت کرو کہ ایک یکساں پتلے مساوی الاضلاع مثلث ا ب ج کا قوہ ایک ایسے نقطہ ن پر جو اس کے مرکز و میں سے گزرنے والے اور اس کی سطح پر علی القوائم خط پر واقع ہے یہ ہوگا

$$\frac{۲ جہ م \, مم \, عہ}{ا}\left[مس \, عہ \, لوک \frac{۲ + \sqrt{۳} \, جب \, عہ}{۲ - \sqrt{۳} \, جب \, عہ} - \frac{۲\pi}{۳} + ۴ \, مس^{-۱}(\sqrt{۳} \, جم \, عہ)\right]$$

جہاں م اس مثلث کی کمیت ہے، ا اس کے ایک ضلع کا طول ہے اور $\angle$ و ن ا = عہ۔
[مثلث کو قاعدہ کے متوازی خطوں سے بنا ہوا فرض کرو] -

۳۷ — ایک یکساں منتظم چار سطحی مجسم کشش کرنے والے مادہ سے بنا ہوا ہے -
ثابت کرو کہ اس کے مرکز پر قوہ ہے

$$\frac{جہ م}{ا}\left\{۶ \, لوک\left(\sqrt{۳} + \sqrt{۲}\right) - \frac{\pi}{\sqrt{۲}}\right\}$$

ہے جہاں م مذکور کی کمیت اور ا اس کے ایک کنارہ کا طول ہے ۔
(سوال ماقبل کے نتیجہ کو استعمال کرو )

۳۸ — ایک منتظم چہار سطحی کا ایک رخ کشش کرنے والے مادہ سے بنا ہوا ہے اس رخ کے مقابل کے راس سے ایک ذرہ اس رخ کی کشش کے زیر عمل گرتا ہے چہار سطحی کی سطحی کثافت صہ ہے اور اگر کشش کا کلیہ مقلوب مربع کا کلیہ ہو تو ثابت کرو کہ جب ذرہ جاذب رخ پر آکر لگیگا تو اس کی رفتار کا مربع

$$\text{۲ جہ صہ ا}\sqrt{\text{۳}}\left[\text{لوک}\left(\text{۱}+\frac{\text{۲}}{\sqrt{\text{۳}}}\right)+\text{۲}\sqrt{\text{۲}}\;\text{مم}^{-\text{۱}}\sqrt{\text{۲}}-\frac{\pi\sqrt{\text{۲}}}{\text{۳}}\right]$$

ہوگا جہاں ا اس کے ایک ضلع کا طول ہے اور باقی رخ کسی قسم کی کشش نہیں کرتے ۔

۳۹ — اگر م اور مَ کوئی دو کمیتیں ہوں اور کمیت م کے کسی جزو مف م پر مَ کا قوہ قہَ ہو اور کمیت مَ کے کسی جزو مف مَ پر م کا قوہ قہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\int \text{قہ فرمَ} = \int \text{قہَ فرم}$$

۴۰ — اگر ایک مادہ فاصلہ کی ن ویں قوت کے مطابق کشش کرے تو اس کی کچھ مقدار کا قوہ کسی نقطہ پر قہن ہوتا ہے اور اگر کشش کا ضابطہ فاصلہ کی (ن - ۲) ویں قوت ہو تو قوہ $\text{قہ}_{\text{ن}-\text{۲}}$ ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{لف}^{\text{۲}}\,\text{قہ}_{\text{ن}} = (\text{ن}-\text{۱})(\text{ن}+\text{۲})\;\text{قہ}_{\text{ن}-\text{۲}}$$

۴۱ — ایک متجانس پتلے کروی خول کے کسی اندرونی نقطہ ن (لا، ما، ی) کے لئے قوہ تفاعل ف (لا، ما، ی) ہو تو بیرونی نقطہ نَ (لاَ، ماَ، یَ) پر قوہ

$$\frac{\text{ا}}{\text{ر}}\;\text{ف}\left(\frac{\text{ا}^{\text{۲}}\text{لاَ}}{\text{ر}^{\text{۲}}},\ \frac{\text{ا}^{\text{۲}}\text{ماَ}}{\text{ر}^{\text{۲}}},\ \frac{\text{ا}^{\text{۲}}\text{یَ}}{\text{ر}^{\text{۲}}}\right)$$

ہوگا جہاں ا خول کا نصف قطر ہے اور ر نقطہ نَ کا مرکز سے فاصلہ ہے ۔

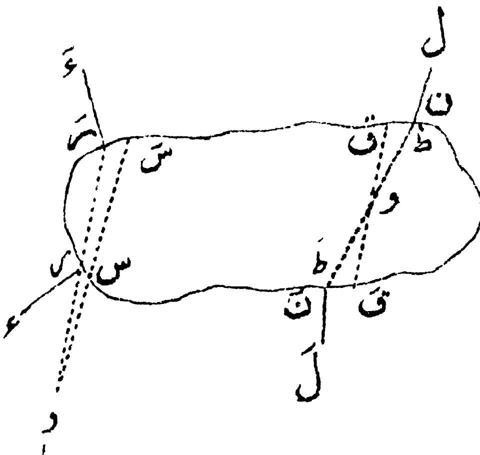


# پندرھواں باب

## کشش اور قوہ

### عام مسائل

**۳۰۴۔ کسی بند سطح پر عمادی کششوں کا تکملہ (گاؤس کا مسئلہ)۔**
اگر ایک بند سطح کے کسی جزو مف س کے کسی نقطہ پر ایک کشش کرنے والی کمیت کی وجہ سے جو کشش ہے اس کا جزو ترکیبی مف س پر کے عماد کی سمت میں باہر کی طرف ع ہو تو $\iint$ ع فرس $= -4$ ح $\pi$ م
جہاں م سطح کے اندر کشش کرنے والی کل کمیت کی مقدار ہے اور دوہرے تکمل کو پوری سطح پر لیا گیا ہے۔




فرض کرو کہ بند سطح کے اندر کشش کرنے والی کمیت کے کسی جزو م کا مقام و ہے۔ و میں سے ایک مخروط کھینچو جس کا راسی زاویہ بہت چھوٹا ہو اور فرض کرو کہ وہ سطح کو ن ق اور نَ قَ پر

کاٹتا ہے جن کے رقبے مف س اور مف سَ ہیں۔
کمیت کی کشش ان اجزا پر بالترتیب

- جم $\frac{\text{مف س}}{\text{و ن}^2}$ جب و ن ق، خط ن ل کی سمت میں

اور - جم $\frac{\text{مف سَ}}{\text{و نَ}^2}$ جب و نَ قَ، خط نَ لَ کی سمت میں

ہیں جہاں ن ل اور نَ لَ، ن اور نَ پر باہر کی طرف کھنچے ہوئے عمادوں کی سمتیں ہیں۔

ق اور قَ میں سے ان چھوٹے مخروطوں کی عمادی تراشیں ق ط اور قَ طَ کھینچو اور فرض کرو کہ مخروط کا مجسم زاویہ مف سہ ہے، تب

$$\text{مف سہ} = \frac{\text{رقبہ ق ط}}{\text{و ق}^2} = \frac{\text{مف س} \times \text{جم ط ق ن}}{\text{و ق}^2} = \frac{\text{مف س} \times \text{جب و ن ق}}{\text{و ق}^2}$$

$$= \frac{\text{مف س} \times \text{جب و ن ق}}{\text{و ن}^2}$$ انتہا میں جبکہ ن ق بہت چھوٹا ہو

اور اسی طرح $\text{مف سہ} = \frac{\text{مف سَ} \times \text{جب و نَ قَ}}{\text{و نَ}^2}$

اس لئے نقطے ن اور نَ پر اجزا مف س اور مف سَ میں سے ہر ایک کے لئے عمادی کشش = - جم مف سہ

اس لئے کل سطح کے لئے مجموعی عمادی کشش = - جم $\sum$ مف سہ = - جم × ۴π
یعنی و پر کے ایک واحد ذرہ م کے لئے

$$\iint \text{ع فرس} = -4\pi\, \text{م}$$

یہی کیفیت سطح مذکور کے دیگر کشش کرنے والے ذروں کی ہے۔
پس بالآخر کل کمیت کے لئے

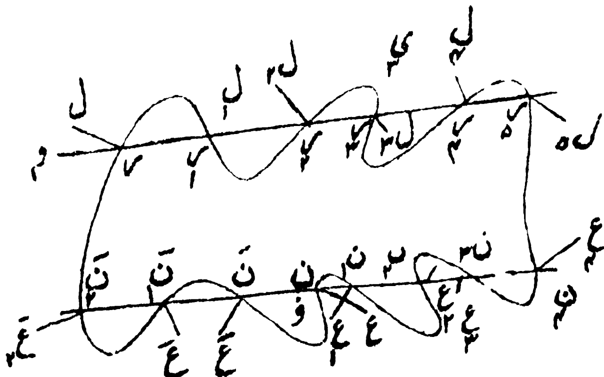
$$\iint$$ ع فرس = − ۴ ج π م

اب فرض کرو کہ بند سطح کے باہر و مقام پر ایک کشش کرنے والا ذرہ م ہے۔ حسب سابق ایک چھوٹا مخروط کھینچو جو سطح کو سا۱ س اور سا۱ سَ پر قطع کرے تب پہلے کی طرح سا س اور سا سَ پر کی عمادی کششیں مساوی ہونگی لیکن ان کی علامتیں مختلف ہونگی کیونکہ سا پر عماد کی سمت میں باہر کی جانب کشش مثبت ہوگی۔ اور سَا پر عماد کی سمت میں باہر کی جانب کشش منفی ہوگی۔ اس لئے جزوی سطحوں سا س اور سَا سَ کے لئے عمادی کششوں کے اجزا جہ م مف سہ اور ـ جہ م مف سہ ہونگے۔ اس لئے ان کا مجموعہ صفر ہے۔

یہی بات و میں سے گزرنے والے سب کے سب چھوٹے مخروطوں پر صادق آتی ہے۔ اس لئے سطح کے باہر کی کسی جزوی کمیت م کے لئے عمادی کشش کا سطحی تکملہ صفر ہوتا ہے، اس لئے کل کمیت م۱ کے لئے بھی جو سطح کے باہر واقع ہو تکملہ مذکور صفر ہوگا۔

[ اوپر کی شکل میں دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ جب کشش کرنے والی کمیت سطح کے اندر ہو جیسے و پر تو دونوں زاوئے و ن ل اور و نَ لَ منفرجہ زاوئے ہوتے ہیں، جب کمیت باہر ہو جیسے و پر تو ایک زاویہ و۱ سا عَ منفرجہ ہوتا ہے اور دوسرا و سا ع حادہ ہوتا ہے۔ ]

۴۳۰۔ اگر جزوی مخروط بند سطح کو دو سے زیادہ تراشوں پر قطع کرے تو بھی بآسانی



دیکھا جا سکتا ہے کہ متذکرہ بالا نتیجہ درست رہے گا۔

کیونکہ زاویے ون ع، ون۲ ع۲، ون َع اور ون َ۲ عَ۲ سب کے سب منفرجہ ہیں اور ہر ایک کے تکملہ کا متناظر جزو − جہ م مف سہ ہے نیز زاویے ون۱ ع۱ اور ون۳ ع۳ اور ون َ۱ عَ۱ حادے ہیں اور متناظر تکملے + جہ م مف سہ ہیں۔

اس لئے ان تمام نقطوں کے لئے تکملوں کا مجموعہ

= − ۵ جہ م مف سہ + ۳ جہ م مف سہ

= − ۲ جہ م مف سہ جیسا کہ پہلی شکل میں درست تھا۔

اس لئے پہلی شکل کی طرح کل سطح کے لئے

∫ ع فرس = − جہ م × ۴ π

اسی طرح کسی بیرونی نقطہ و سے شروع کر کے زاویے وسا ل، وسا۱ ل۱ اور وسا۲ ل۲ منفرجہ ہیں اور اس لئے ہر ایک متناظر جزوی تکملہ − جہ م مف سہ کے مساوی ہے۔ نیز زاویے وسال، وسا۱ل۱، وسا۲ ل۲ حادہ ہیں اور ہر متناظر تکملہ + جہ م مف سہ کے مساوی ہے۔

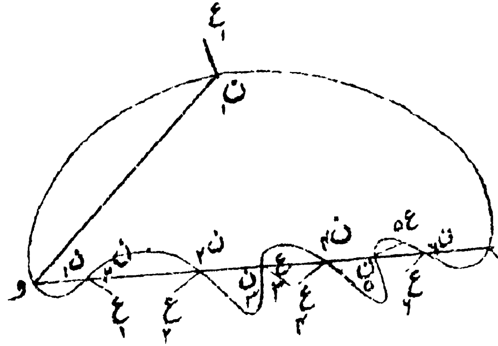
پس اس چھوٹے سے مخروط کے لئے عمادی کشش کا کل سطحی تکملہ صفر ہے

اس لئے پہلی شکل کی مانند ∫ ع فرس = ۰

۵.۳ ـ جب نقطہ و سطح پر ہو یعنی جب کشش کرنے والی مقدار م سطح پر ہو تو و میں سے گزرنے والا چھوٹا مخروط سطح سے ایک نقطہ پر یا طاق نقطوں پر ملے گا ہر صورت میں سطحی تکملہ کا جو جزو م سے پیدا ہوتا ہے وہ − جہ م مف سہ ہوگا۔ اس لئے م کی وجہ سے کل سطحی تکملہ ہوگا − ∑ جہ م ف سہ جہاں فرسہ، و پر کی مماسی سطح سے نوی

سے صرف ایک طرف کا مجسم زاویہ ہے لہذا اس صورت میں

$$\int جم فرسہ = - جم \times ۲ \pi$$

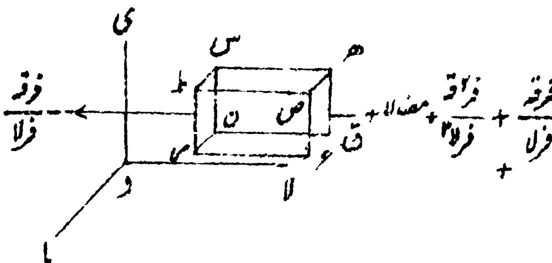


اسی طرح سے سطح پر کی کمیت کے کسی اور جزو کے لئے
اس لئے اگر کشش کرنے والی کمیت کی مقدار بند سطح پر م ہو تو اس کی وجہ سے عادی نارت کا سطحی تکملہ - ۲ $\pi$ جم ہوگا -

## ۳۰۶ - لاپلاس اور پوئیسون کی مساواتیں -

اگر ایک بند سطح کے کسی نقطہ پر باہر کی طرف عادی کشش ع ہو تو دفعہ ۳۰۴ کی رو سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$\iint ع فرس = -۴ \pi جم \quad \ldots\ldots (۱)$$



جہاں م سطح کے اندر کشش کرنے والے مادہ کی مقدار ہے -
اب بند سطح کی بجائے ایک مستطیلی متوازی السطوح لو جس کا ایک راس نقطہ

ن (لا، ما، ی) ہو اور جس کے کنارے محوروں کے متوازی ہوں اور طول میں مف لا، مف ما، مف ی ہوں۔

چونکہ رخ ن ماطہس بہت چھوٹا ہے اس لئے انتہا میں اس کے ہر ایک نقطہ پر مساوی قوت عمل کرتی ہے اور $\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف لا}}$ کے مساوی ہے اور و لا کی منفی سمت میں عمل کرتی ہے

اس لئے ∫ ع × فرس کا حصہ جو اس رُخ کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے وہ یہ ہے

$$- \frac{\text{جف قہ}}{\text{جف لا}} \text{ مف ما} \times \text{مف ی}$$

نیز اگر $\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف لا}}$ = ف (لا) تو محور لا کی مثبت سمت میں ترکیبی قوت جو رخ ق ء ص ھ کے ہر ایک نقطہ پر عمل کرتی ہے وہ

= ف (لا + مف لا) = ف (لا) + مف لا × فَ (لا) + .. .. .. .. .. ..

= $\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ قہ}}{\text{جف لا}^2} \times$ مف لا + .. .. .. .. مف لا کی بڑی قوتوں والی رقمیں

اس لئے ∫ ع فرس کا جو جزو اس رخ کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے وہ

$$= \left( \frac{\text{جف قہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ قہ}}{\text{جف لا}^2} \times \text{مف لا} + \ldots \right) \text{ مف ما} \times \text{مف ی}$$

اس لئے ان دو رخوں سے ∫ ع × فرس کا جو حصہ پیدا ہوتا ہے وہ

$$= \left( \frac{\text{جف}^2 \text{ قہ}}{\text{جف لا}^2} + \ldots\ldots \right) \text{مف لا} \times \text{مف ما} \times \text{مف ی}$$

اسی طرح سے محور ما اور ی پر عمود وار رخوں کے لئے ∫ ع × فرس کے حصے بالترتیب

مف لا ( ... + جف² ق / جف ی² ) اور مف ی × مف ما × مف لا ( ... + جف² ق / جف ما² )
× مف ما × مف ی ہیں۔

نیز اگر یہ جزوی متوازی السطوح کشش کرنے والے مادہ کے اندر لیا جائے تو
م = متوازی السطوح کی کمیت = م مف لا × مف ما × مف ی جہاں م کثافت ہے۔
اس لئے گاؤس کے مسئلہ سے حاصل ہوتا ہے

( جف² ق / جف لا² + جف² ق / جف ما² + جف² ق / جف ی² + ... ) مف لا × مف ما × مف ی = − ۴ π جہ م ×

مف لا مف ما مف ی یعنی مف لا × مف ما × مف ی پر تقسیم کر دینے سے اور انتہا لینے سے

لف² ق = ( جف² ق / جف لا² + جف² ق / جف ما² + جف² ق / جف ی² ) = − ۴ جہ π م

جہاں عامل ( جف² / جف لا² + جف² / جف ما² + جف² / جف ی² ) کو اختصار کے لئے علامت لف² یا $\nabla^2$

سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ یہ پوئیسون کی مساوات ہے۔

اگر نقطہ ن اور چھوٹا سا متوازی السطوح، کشش کرنے والے مادہ کے باہر ہو یعنی متوازی السطوح مذکور کے اندر مادہ کی مقدار صفر ہو تو مساوات بالا ہوگی،

لف² ق = جف² ق / جف لا² + جف² ق / جف ما² + جف² ق / جف ی² = ۰

اس مساوات کو لاپلاس کی مساوات کہتے ہیں۔

اس مساوات کو محض تفرق کرنے سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ دفعہ ۲۹۶ کی مانند دفعہ ۲۹۴ کے جملوں کو تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

جف² ق / جف لا² + جف² ق / جف ما² + جف² ق / جف ی²

= − جہ ∫ فرم [ ۳ / ن ق³ − ۳ ( (لا − لاَ)² + (ما − ماَ)² + (ی − یَ)² ) / ن ق⁵ ]

اگر ن کشش کرنے والی کمیت کے باہر واقع ہو یعنی ن ق کبھی صفر نہ ہو تو اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{جف^{۲} ق}{جف لا^{۲}} + \frac{جف^{۲} ق}{جف ما^{۲}} + \frac{جف^{۲} ق}{جف ی^{۲}} = ۰$$

۴۰۷- احصائے تفرقی کے معمولی قاعدوں کے مطابق تفرق کرنے سے یا غیر تابع متغیروں لا، ما، ی کو ر، طہ، فہ میں ان رشتوں

$$لا = ر جب طہ × جم فہ ، \quad ما = ر جب طہ جب فہ \quad اور \quad ی = ر جم طہ$$

کی مدد سے تبدیل کرنے سے یا دفعہ ماقبل کے طریقہ کے اصول کی بنا پر پائیسون کی مساوات کو قطبی محددوں میں حسب ذیل شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{جف}{جف ر}\left[ر مف طہ × ر جب طہ × مف فہ × \frac{جف ق}{جف ر}\right] مف ر + \frac{جف}{ر جف طہ} × \left[ر جب طہ مف فہ × مف ر × \frac{جف ق}{ر جف طہ}\right] ر مف طہ$$

$$+ \frac{جف}{ر جب طہ جف فہ}\left[ر مف طہ × مف ر \frac{جف ر}{ر جب طہ جف فہ}\right] ر جب طہ مف فہ$$

$$= -۴ \pi جہ م × مف ر × ر مف طہ ر جب طہ مف فہ$$

یعنی

$$\frac{۱}{ر^{۲}}\left[\frac{جف}{جف ر}\left(ر^{۲} \frac{جف ق}{جف ر}\right) + \frac{۱}{جب طہ} × \frac{جف}{جف طہ}\left(جب طہ \frac{جف ق}{جف طہ}\right) + \frac{۱}{جب^{۲} طہ}\frac{جف}{جف فہ}\left(\frac{جف ق}{جف فہ}\right)\right] = -۴ \pi جہ م \quad ...... (۱)$$

یا

$$\frac{جف^{۲} ق}{جف ر^{۲}} + \frac{۲}{ر}\frac{جف ق}{جف ر} + \frac{۱}{ر^{۲}}\frac{جف^{۲} ق}{جف طہ^{۲}} + \frac{قم طہ}{ر^{۲}}\frac{جف ق}{جف طہ} + \frac{۱}{ر^{۲} جب^{۲} طہ}\frac{جف^{۲} ق}{جف فہ^{۲}} = -۴ جہ \pi م \quad (۲)$$

جہاں م کثافت ہے۔

نیز اگر ہم اسطوانی محدد سا، ط، ی استعمال کریں (اور بناءً علیہ لا = سا جم ط، ما = سا جیب ط)
تو مساوات بالا ہو جاتی ہے :-

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف سا}}\left(\text{سا}\,\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف سا}}\right)+\frac{\text{جف}}{\text{جف ط}}\left(\frac{1}{\text{سا}}\,\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ط}}\right)+\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}\left(\text{سا}\,\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ی}}\right)$$
$$= -4\pi\,\text{ہ م سا}$$

یعنی
$$\frac{\text{جف}^2\,\text{قہ}}{\text{جف سا}^2}+\frac{1}{\text{سا}}\,\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف سا}}+\frac{1}{\text{سا}^2}\,\frac{\text{جف}^2\,\text{قہ}}{\text{جف ط}^2}+\frac{\text{جف}^2\,\text{قہ}}{\text{جف ی}^2}=-4\pi\,\text{ہ م} \quad \ldots\ldots (3)$$

اگر زیر بحث نقطہ کشش کرنے والے مادہ کے اندر نہ ہو تو مساواتوں (۱)، (۲) اور (۳) کے بائیں طرف کے حصے صفر ہونگے اور اس صورت میں ہمیں لاپلاس کی مساوات کی تناظر شکلیں حاصل ہونگی۔

**۳۰۸**— دفعہ ماقبل کی مساواتوں کی مدد سے ہم قہ کی قیمتیں چند آسان صورتوں میں آسانی سے حاصل کر سکتے ہیں۔

**کروی خول**۔ اس صورت میں ظاہر ہے کہ قہ کی قیمت کسی نقطہ ن پر محض خول کے مرکز سے اس نقطہ کے فاصلہ پر منحصر ہونی چاہیئے اور ط اور فہ کے بالکل غیر تابع ہونی چاہیئے

∴ دفعہ ۳۰۷ کی مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف ر}}\left(\text{ر}^2\,\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ر}}\right)=0 \text{ ، اس لئے } \text{ر}^2\,\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف سا}}=\text{مستقل}$$

$$\text{یعنی}\quad \text{قہ}=\frac{\text{ا}}{\text{ر}}+\text{ب}$$

(۱) اگر نقطہ ن خول کے اندر ہو تو صریحاً حاصل کشش $\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ر}}$ مرکز پر صفر ہونی چاہیئے اس لئے ا = ۰۔

اس لئے قہ کروی خول کے اندر سب نقطوں پر مستقل ہے اور

$$\text{اس کی قیمت مرکز پر} = \text{حہ}\,\frac{\text{کمیّت}}{\text{نصف قطر}}$$

(۱۱) اگر ن خول کے باہر ہو تو چونکہ قہ کو لامتناہی پر صفر ہونا چاہیئے اس لئے حاصل ہوتا ہے ب = ۰ ـ نیز چونکہ قہ مسلسل ہے اس لئے اس صورت میں سطح پر اس کی وہ قیمت ہونی چاہیئے جو اندرونی نقطے کے لئے قہ کی قیمت سطح پر ہوتی ہے، اس لئے

$$\frac{\text{لَ}}{\text{ا}} = \text{حہ} \times \frac{\text{کمیت}}{\text{نصف قطر}} \qquad \text{یعنی} \qquad \text{لَ} = \text{حہ} \times \text{م}$$

$$\text{اس لئے خول کے باہر قوہ} = \text{حہ}\,\frac{\text{م}}{\text{ر}}$$

ٹھوس کرہ ـ اندرونی نقطہ ـ چونکہ قہ بھی ہ، طہ اور فہ کے غیر تابع ہے اس لئے پوئیسون کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{ر}^2}\frac{\text{جف}}{\text{جف ر}}\left[\text{ر}^2\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ر}}\right] = -\,4\pi\,\text{حہ م}$$

$$\therefore \quad \text{ر}^2\,\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ر}} = -\frac{4\pi}{3}\,\text{حہ م ر}^3 + \text{گ}$$

$$\text{اب}\left(\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ر}}\right) = \text{مرکز پر حاصل کشش} = ۰ \qquad \text{اس لئے گ} = ۰$$

$$\therefore \quad \frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ر}} = \frac{-4\pi}{3}\,\text{حہ م ر} \qquad \text{یعنی} \qquad \text{قہ} = -\frac{2}{3}\pi\,\text{حہ م ر}^2 + \text{ب}$$

$$\text{لیکن صریحاً قہ کی قیمت مرکز پر} = \int_{۰}^{\text{ا}} \frac{4\pi\,\text{حہ م ما}^2\,\text{فرما}}{\text{ما}} = 2\pi\,\text{حہ م ا}^2 = \text{ب}$$

$$\therefore \quad \text{قہ} = 2\pi\,\text{حہ م ا}^2 - \frac{2}{3}\pi\,\text{حہ م ر}^2$$

۳۰۵ ـ مشق ا ـ دو لامتناہی اسطوانوں $\text{ر} = \frac{\text{ا}}{2}$ اور ر = ا کے درمیان مادہ اس طرح منقسم ہے کہ کثافت متناسب ہے $\frac{\text{ا}}{\text{ر}}$ ـ $\frac{\text{ر}}{\text{ا}}$ کے اور محور کے متوازی سمت میں کمیت فی اکائی

طول م ہے۔ قوۃ کا کلیہ مادہ کے اندر کے لئے معلوم کرو۔ اور ثابت کرو کہ بیرونی اور اندرونی سطحوں پر کے قوتوں کا فرق

$$\frac{2}{15}\,\text{جم}\left(29 - 33\,\text{لوک}_{\text{ی}}\,2\right) \ \text{ہے۔}$$

اگر کثافت $\text{ل}\left(\frac{\text{ا}}{\text{ر}} - \frac{\text{ر}}{\text{ا}}\right)$ ہو تو

$$\text{م} = \int_{0}^{2\pi}\int_{\frac{\text{ا}}{2}}^{\text{ا}} \text{ر فرط} \times \text{فرر ل}\left(\frac{\text{ا}}{\text{ر}} - \frac{\text{ر}}{\text{ا}}\right) = \frac{5}{12}\,\pi\,\text{ل}\,\text{ا}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

قوۃ قصریحاً صرف ر کا تفاعل ہے، پس پوئیسن کی مساوات (دفعہ ۳۰۷ کا نتیجہ ۳) ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{ق}}{\text{جف ر}^2} + \frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف ق}}{\text{جف ر}} + 4\pi\,\text{ج ل}\,\frac{\text{ا}^2 - \text{ر}^2}{\text{ا ر}} = 0$$

$$\therefore\ \text{ر}\,\frac{\text{جف ق}}{\text{جف ر}} + \frac{4\pi\,\text{ج ل}}{\text{ا}}\left(\text{ا}^2\,\text{ر} - \frac{\text{ر}^3}{3}\right) = \text{أ} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

اب $\int \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ر}}$ فرس کی قیمت اندرونی سطح کے لئے (گاؤس کے مسئلہ کی رو سے)

صفر ہے اور $\frac{\text{جف ق}}{\text{جف ر}}$ تشاکل سے اندرونی سطح پر مستقل ہے، اس لئے

$$\therefore\ \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ر}} = 0 \quad \text{جبکہ}\ \text{ر} = \frac{\text{ا}}{2}$$

$$\therefore\quad \text{أ} = \frac{11}{6}\,\pi\,\text{ج ل}\,\text{ا}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$\therefore$ (۲) سے حاصل ہوتا ہے $\quad \text{ق} = \text{أ}\,\text{لوک ر} - \frac{4\pi\,\text{ج ل}}{\text{ا}}\left(\text{ا}^2\,\text{ر} - \frac{\text{ر}^3}{9}\right) + \text{ب}$

{نیز بڑے اسطوانہ کے باہر کے کسی نقطہ کے لئے لاپلاس کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے:

$\text{ق} = -\,\text{ج}\ \text{لوک ر} + \text{ک}$ جہاں ک لا انتہائی مستقل ہے کیونکہ ق کو صریحاً لا انتہا ہی پر صفر ہونا چاہیئے۔ نیز چونکہ مادہ کے اندر اور باہر کے قوۃ تفاعل کی قیمت اسطوانہ کے باہری سطح

پر اایک ہی ہے اس لئے ظاہر ہے کہ ب بھی لامتناہی مستقل ہوگا ]

$$\therefore \quad \text{قہ}_{\frac{ا}{۲}} - \text{قہ}_{ا} = \text{ا}\left[\text{لوک}\frac{۱}{۲} - \frac{۳\pi\text{ جہل}}{\text{ا}}\left(\frac{\text{ا}^۳}{۲} - \frac{\text{ا}^۳}{۲۴} - \text{ا}^۳ + \frac{\text{ا}^۳}{۹}\right)\right]$$

$$= -\left[\text{لوک}_{و}۲ + \frac{۲۹}{۱۸}\pi\text{ جہل ا}^۲\right] = \frac{۲\text{ جہم}}{۱۵}\left(۲۹ - ۳۳\ \text{لوک}_{و}۲\right)$$

**مشق ۲:**— اگر قہ کی ایک قیمت جو لاپلاس کی مساوات

$$\frac{\text{جف}^۲\text{ قہ}}{\text{جف لا}^۲} + \frac{\text{جف}^۲\text{ قہ}}{\text{جف ما}^۲} + \frac{\text{جف}^۲\text{ قہ}}{\text{جف ی}^۲} = ۰$$

کو قطبی محددوں میں پورا کرے $\text{ر}^{ن}$ ف (ط، فہ) ہو تو قہ = $\text{ر}^{-(ن+۱)}$ ف (ط، فہ) بھی لاپلاس کی مساوات کو پورا کریگی۔

**۳۱۰— مساوی قوہ سطحیں**۔ کشش کرنے والی کمیت م کا کسی نقطہ ن (لا، ما، ی) پر قوہ اس کے محددوں لا، ما، ی کا کوئی تفاعل فہ (لا، ما، ی) ہوگا یعنی قہ = فہ (لا، ما، ی م)۔ اُن تمام نقطوں کا طریق جہاں قوہ کی قیمت مستقل گ کے مساوی ہے مساوات ذیل سے حاصل ہوگا

فہ (لا، ما، ی) = گ ............ (۱)

سطح (۱) ایسی سطح ہے کہ اس کے ہر نقطہ پر کشش کرنے والے مادہ کا قوہ مستقل ہے لہٰذا اس سطح کو مساوی قوہ سطح کہتے ہیں۔ مستقل گ کو مختلف قیمتیں دینے سے مساوی قوہ سطحوں کا ایک جٹ حاصل ہوگا۔ صریحاً یہی نتیجہ حاصل ہوگا خواہ قہ کو کسی محددوں میں بیان کیا جائے۔

مثلاً ایک سلاخ اب (دفعہ ۲۹۸) کا قوہ کسی نقطہ ن پر جس کے فاصلے سلاخ کے سروں سے $\text{ر}_۱$ اور $\text{ر}_۲$ ہیں یہ ہے

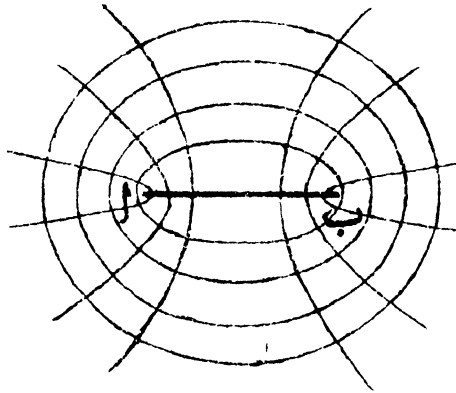
$$\text{جہ ک م لوک}\ \frac{\text{ر}_۱ + \text{ر}_۲ + \text{ا}}{\text{ر}_۱ + \text{ر}_۲ - \text{ا}}$$

اور بناءً علیہ یہ مستقل رہیگا اگر ر۱ + ر۲ مستقل ہو۔

لیکن اگر ر۱ + ر۲ یعنی ا ن + ب ن مستقل ہو تو کاغذ کے مستوی میں ن کا طریق قطع ناقص ہوگا جس کے ماسکے ا اور ب ہیں۔

پس فضا میں اس کا طریق وہ سطح ہوگی جو اس ناقص کو ا ب کے گرد گھمانے سے حاصل ہو۔

اس لئے مساوی قوہ سطحیں ایسے گردشی ناقص نما ہیں جو ماسکہ ا اور ب والے ہم ماسکی ناقصوں کو ا ب کے گرد گھمانے سے حاصل ہوں۔ چند ایسے ناقص شکل میں دکھائے گئے ہیں۔




نیز دفعات (۳۰) اور (۳۰۱) کے کروں اور کروی خولوں کی صورت میں کسی نقطہ پر قوہ مرکز سے اس نقطہ کے صرف فاصلہ پر منحصر ہوتا ہے لہذا ان سب نقطوں پر جو ایک ہم مرکز کرہ کی سطح پر واقع ہوں اس کی قیمت وہی ہوگی۔ پس ان صورتوں میں مساوی قوہ سطحیں ہم مرکز کروں کے نظام پر مشتمل ہونگی۔

۱۳۱ – کسی نقطہ ن پر قوت کشش، ن میں سے گزرنے والی مساوی قوہ سطح پر عمود وار ہوتی ہے۔

کیونکہ اگر اس مساوی قوہ سطح پر ن کے قرب میں کوئی اور نقطہ نَ ہو تو دفعہ (۲۹۴) کے بموجب ن نَ کی سمت میں کشش

$$= \frac{\text{نَ پر قوہ} - \text{ن پر قوہ}}{\text{ن نَ}} = 0$$

کیونکہ ن، نَ مساوی قوہ سطح پر واقع ہیں۔ اس لئے ہر ایسی سمت ن نَ کیلئے جو نقطہ ن پر مماسی مستوی میں واقع ہے قوت کشش صفر ہوگی۔

اس لئے نقطہ ن پر حاصل قوت کشش، مساوی قوہ سطح کے نقطہ ن پر عماد کی سمت میں عمل کریگی۔

اس نتیجہ کو تحلیلی طور پر یوں ثابت کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ فہ (لا، ما، ی) = ج (مستقل) کوئی مساوی قوہ سطح ہے تب چونکہ اس پر کے کسی خاص نقطہ ن (لا، ما، ی) پر سطح مذکور کے عماد کی سمتی جیوب التمام بالترتیب $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}$ ، $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}$ ، $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}}$ کے متناسب ہیں اس لئے اگر سطح مستوی کے (نقطہ ن پر کے) مماسی مستوی پر کوئی خط لیا جائے اور اس کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہوں تو

$$\text{ل}\,\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \text{م}\,\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} + \text{ن}\,\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}} = 0$$

کیونکہ اس خط اور عماد کے درمیان زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

لیکن چونکہ $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}$ ، $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}$ ، $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}}$ محوروں کی سمت میں قوت کشش کے اجزاء ترکیبی ہیں اس لئے یہ مساوات اس امر کو بیان کرتی ہے کہ خط (ل، م، ن) کی سمت میں حاصل قوتِ کشش کا جزو ترکیبی صفر ہے۔ یہ بات مماسی مستوی میں تمام خطوط کے لئے صحیح ہے اس لئے حاصل قوت کشش مساوی

قوہ سطح کے عماد کی سمت میں عمل کرتی ہے اور اس لئے مادہ کی کشش ذرہ پر کوئی کام نہیں کرتی جبکہ ذرہ کو مساوی قوہ سطح کے ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ پر منتقل کیا جائے۔

۲۱۲- اگر کسی مساوی قوہ سطح پر کے کسی نقطہ ن سے سطح مذکور کا عماد کھینچا جائے اور اس عماد کا جو جزو اس سطح اور متصل مساوی قوہ سطح کے درمیان ہے وہ مف ع ہو تو ن پر کی کشش کی قوت مف ع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔

کیونکہ اگر ن پر قوہ قہ ہو اور ن پر مساوی قوہ سطح کا عماد متصل مساوی قوہ سطح سے نَ پر ملے اور نَ پر قوہ قہ + مف قہ ہو تو ظاہر ہے کہ

ن پر قوت کشش دفعہ ۲۳۱ کے مطابق

$$= \frac{\text{نَ پر قوہ} - \text{ن پر قوہ}}{\text{ن نَ}} = \frac{(\text{قہ} + \text{مف قہ}) - \text{قہ}}{\text{مف ع}} = \frac{\text{مف قہ}}{\text{مف ع}}$$

اس لئے اُن سب نقطوں پر جو قوہ قہ والی مساوی قوہ سطح پر واقع ہیں حاصل قوت کشش مف ع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔

۲۱۳- مساوی قوہ سطحوں کو زمین کے ساتھ ایک مشابہت ہونے کی وجہ سے ہموار سطحیں بھی کہتے ہیں کیونکہ اگر ہم کشش زمین کو مستقل فرض کریں تو کسی نقطہ میں سے گزرنے والی مساوی قوہ سطح افقی سطح مستوی ہے یا زیادہ صحیح طور پر زمین سے ہم مرکز ایک بہت بڑے کرہ کا حصہ ہے جس طرح کسی وزن کو چکنے افقی مستوی پر حرکت دینے میں جاذبہ کے خلاف کوئی کام نہیں ہوتا اسی طرح مادہ کی کشش کے خلاف کوئی کام نہیں ہوتا اگر ایک ذرہ کو اس کے مساوی قوہ سطح پر حرکت دی جائے۔

۲۱۴- قوت کے خطوط- اگر کسی نقطہ ن سے ایک چھوٹا سا خط ن نَ، ن پر کی حاصل کشش کی سمت میں کھینچا جائے اور پھر نَ نً نقطہ نَ پر کی حاصل کشش کی سمت میں ایک چھوٹا سا خط کھینچا جائے اور علیٰ ہذا القیاس نً نٌ وغیرہ ...... تو ہمیں ایک شکستہ خط حاصل ہوگا جو ن، نَ، ...... کو ایک دوسرے سے

نہایت قریب لینے سے ایک مسلسل منحنی بن جائیگا اس منحنی کو قوت کا خط کہتے ہیں۔
بالفاظ دیگر قوت کا خط ایک ایسا منحنی ہوتا ہے جس کے کسی نقطہ پر کا
مماس اس نقطہ پر کشش کی سمت کو تعبیر کرتا ہے۔

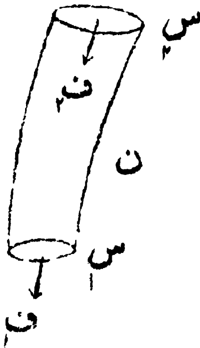
چونکہ ن نَ، نَ نً، نً نٌ، .. .. .. میں سے ہر ایک خط
ن، نَ، نً، میں سے گزرنے والی مساوی قوہ سطحوں کے عماد ہیں اس لئے
قوت کا خط اپنے طول کے ہر ایک نقطہ پر متناظر مساوی قوہ سطح پر علی القوائم ہے۔
اس لئے قوت کے خطوط ایسے خط ہوتے ہیں جو مساوی قوہ سطحوں کے نظام
کو علی القوائم کاٹتے ہیں۔

کروی خولوں یا کروں (دفعہ ۳۰۰ اور ۳۰۱) کی صورت میں قوت کے خط
خطوط مستقیم ہوتے ہیں جو مرکز و میں سے گزرتے ہیں۔ یہ سب کے سب مساوی
قوہ سطحوں یعنی ہم مرکز کروں کو علی القوائم کاٹتے ہیں۔

ایک پتلی سلاخ ا ب کی صورت میں مساوی قوہ منحنی قطع ناقص ہوتے ہیں
اور ان سب کے ماسکے ا اور ب پر ہوتے ہیں (شکل دفعہ (۳۱۰))۔

اب ہم جانتے ہیں کہ ہم ماسکہ ناقصوں کے ایک نظام کو اسی نظام کے ہم ماسکہ
زائد علی القوائم کاٹتے ہیں پس پتلی سلاخ کے قوت کے خطوط ایسے زائد ہیں جن کے ماسکے
سلاخ کے سرے ہیں ان میں سے بعض زائد دفعہ (۳۱۰) کی شکل میں دکھائے گئے ہیں۔

۳۱۵۔ **قوت کی نلیاں۔** اگر ایک چھوٹے سے
بند منحنی کے خط حائط پر کے ہر ایک نقطہ سے
قوت کے خط کھینچے جائیں تو ہمیں ایک قسم
کی نلی سی حاصل ہوتی ہے جس کو قوت کی نلی
کہتے ہیں۔




قوت کے خط کی تعریف کی بنا پر ظاہر ہے
کہ قوت کی نلی کی منحنی سطح کے کسی نقطہ پر کشش
اس سطح کے (نقطہ مذکور پر کے) عماد کی سمت

ہیں صفر ہوگی۔
قوت کی نلی کے ایسے حصہ پر غور کرو جو دو چھوٹی عادی تراشوں س۱ اور س۲ سے گھرا ہوا ہے۔ اور فرض کرو کہ سروں س۱ اور س۲ پر عماد کی سمت میں کششیں بالترتیب ف۱ اور ف۲ ہیں۔
نیز فرض کرو کہ قوت کی نلی کے اس حصے کے اندر کوئی مادہ نہیں ہے۔
اب نلی کے اس حصہ پر دفعہ (۳۰۴) کا مسئلہ لگاؤ۔ نلی کی منحنی سطح پر کے تمام نقطوں ن کے لئے سطحی تکملہ صفر ہے کیونکہ اس نقطہ پر عادی قوت صفر ہے۔ پس سطحی تکملہ کی کل مقدار صرف مستوی سروں کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے۔ پس مسئلہ مذکور سے حاصل ہوتا ہے

ف۱ س۱ + (- ف۲) س۲ = ۰

اس لئے ف۱ س۱ = ف۲ س۲۔
خواہ نلی کا طول کچھ ہی ہو ہر حالت میں یہ مسئلہ درست رہتا ہے اس لئے ف × س۱ کی قیمت وہی رہتی ہے تاوقتیکہ ہم ایک ہی نلی پر قائم رہیں یعنی ایک ہی نلی کے کسی نقطہ پر کشش کی قوت نلی کی عادی تراش کے رقبہ کے بالعکس تناسب ہوتی ہے۔
۳۱۶ — اس مسئلہ کی ایک خاص صورت کے طور پر کسی بیرونی نقطہ پر ایک ٹھوس کرہ کی کشش پر غور کرو۔ قوت کی نلیاں پتلے مخروط ہیں جن سب کے راس کرہ کے مرکز پر ہیں۔ پس س۱ اس قسم کی مخروط کی عمودی تراش ہے اور اس لئے اس کا رقبہ مرکز سے فاصلہ کے مربع کے متناسب ہے۔ اس لئے اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے جیسا کہ دفعہ (۲۸۷) میں ثابت کیا گیا تھا کہ ایک ٹھوس کرہ کی کشش کسی بیرونی نقطہ پر مرکز سے اس نقطہ کے فاصلہ کے مربع کے بالعکس تناسب ہوتی ہے
اسی طرح ایک لامتناہی مجسم مستدیر اسطوانہ پر غور کرو۔ تشاکل سے ظاہر ہے کہ اس کے محور پر کے کسی نقطہ سے جو قوتی خطوط نکلتے ہیں وہ سیدھے خط ہیں اور محور پر عمود وار ہیں پس اس صورت میں قوت کی نلیاں خانہ کی مانند ہیں اور

تراش س کا رقبہ محور و ۱ سے اس کے فاصلہ کے متناسب ہے۔ اس لئے ایک لامتناہی اسطوانہ کی کشش کسی بیرونی نقطہ پر محور سے نقطہ مذکور کے فاصلہ کے بالعکس متناسب ہوتی ہے (مقابلہ کرو دفعہ ۲۸۵ مشق ۲)۔

## مثالیں

۱۔ ش اور ج ایک مقناطیس کے قطب ہیں۔ اگر ط اور ف وہ زاویے ہوں جو ش ن اور ج ن، ش ج ممدودہ کے ساتھ بناتے ہیں اور ش ن = ر اور ج ن = ر' تو اس مقناطیس کے قوت کے خطوط کی مساوات ہے

جم ط ـ جم ف = مستقل

اور مساوی قوہ سطحیں ش ج کے گرد منحنیات $\frac{1}{ر} - \frac{1}{ر'}$ = مستقل کو گردش دینے سے حاصل ہونگی۔

۲۔ دو لامتناہی مستقیم سلاخیں جو ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کی سطح مستوی میں مساوی قوہ منحنی قائم زائد ہونگے

۳۔ ایک پتلی یکساں سیدھی سلاخ کی کشش کا قانون معکوس مکعب کا قانون ہے ثابت کرو کہ مساوی قوہ سطحیں خط ابتدائی کے گرد ذیل کے منحنیوں کی گردش سے حاصل ہوتی ہیں

$$(ر^۴ + ۱^۴ - ۲ ر^۲ ۱^۲ جم ۲ ط)^{\frac{۱}{۲}} = ۲ ۱ ر جب ط قم (ج ر جب ط)$$

جہاں ۲ ۱ سلاخ کا طول ہے اور ج ایک مبدل ہے۔

۴۔ ایک ہی کثافت کی دو لامتناہی سلاخوں کی مساواتیں یہ ہیں

$$ا = لاس ع، ی = ج \quad اور \quad ا = - لاس ع، ی = - ج$$

ان کی مساوی قوہ سطحوں کی مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر ایک ذرہ کو لا کر محور پر رکھا جائے تو وہ فضا جس میں ذرہ مذکور کے ہٹاؤ تعادل قائم پیدا کرتے ہیں اور وہ فضا جس میں تعادل غیر قائم ہوتا ہے ایک دوسرے سے سطحوں

ج ما جم عہ - لا ی جب عہ = ± (لا ما جب عہ جم عہ + ج ی)

سے علیحدہ ہوتی ہے

[علیحدہ کرنے والی سطح قہ (لا، ما، ی) = قہ (لا، ۰، ۰) سے حاصل ہوتی ہے جہاں ما اور ی چھوٹے ہوتے ہیں بمقابلہ لا کے]

۷ ۱۳۔ ایک کمیت کے ذروں کو لا متناہی فاصلہ سے اپنے موجودہ مقام پر آنے میں ان کی باہمی منجاذبہ قوتوں نے جو کام کیا ہے اُسے معلوم کرو۔







فرض کرو کہ مادہ کے ذروں کی کمیتیں م۱، م۲، م۳ وغیرہ اور ان کے موجودہ محل ا۱، ا۲، ا۳ وغیرہ ہیں۔

نیز فرض کرو کہ م۱ اور م۲ کا درمیانی فاصلہ ر۲۱ ہے اور بالعموم م س اور م ط کا فاصلہ س ط ہے۔

پہلے م۱ کو لا متناہی سے اس کے موجودہ مقام ا۱ تک لاؤ۔ اس عمل میں کوئی کام سر انجام نہیں ہوتا کیونکہ اس کے پاس کوئی ذرہ کشش کرنے والا نہیں ہے۔

اب م۲ کو لا متناہی سے ا۲ پر لاؤ۔ اس اثنا میں جو کام ہوا وہ

$$= \text{م}_1 \text{ کا قوہ } \text{ا}_2 \text{ پر} \times \text{م}_2 = \frac{\text{ج م}_1 \text{م}_2}{\text{ر}_{21}}$$

اب م۳ کو لا متناہی سے ا۳ پر لاؤ۔ ایسا کرنے میں جو کام ہوا وہ

$$= \text{م}_3 \times (\text{م}_1 \text{ اور م}_2 \text{ کا قوہ ا}_3 \text{ پر}) = \frac{\text{ج م}_3 \text{م}_1}{\text{ر}_{31}} + \frac{\text{ج م}_2 \text{م}_3}{\text{ر}_{32}}$$

اسی طرح نظام کے اور ذروں کے لئے۔

اس لئے کل کام جو ذروں کو لاتناہی پر کی حالت سکون سے نکال کران کی موجودہ تشکیل ا میں لانے سے سرانجام پاتا ہے وہ

$$= \text{جہ}\frac{\text{م}_۱\text{م}_۲}{\text{ر}_{۲۱}} + \text{جہ}\,\text{م}_۳\left[\frac{\text{م}_۱}{\text{ر}_{۳۱}} + \frac{\text{م}_۲}{\text{ر}_{۳۲}}\right] + \text{جہ}\,\text{م}_۴\left[\frac{\text{م}_۱}{\text{ر}_{۴۱}} + \frac{\text{م}_۲}{\text{ر}_{۴۲}} + \frac{\text{م}_۳}{\text{ر}_{۴۳}}\right]$$

$$+ \,..\,..\,..\, + \,..\,..\,..$$

$$= \text{جہ}\sum\frac{\text{م}_۱\text{م}_۲}{\text{ر}_{۲۱}} \quad ..\quad ..\quad ..\quad ..\quad (۱)$$

جب سب ذرے اپنی موجودہ تشکیل ا میں آجائیں تو فرض کرو کہ نظام کا قوہ نقاط $\text{ا}_۱$، $\text{ا}_۲$ .. .. پر بالترتیب $\text{ق}_۱$، $\text{ق}_۲$ .. .. .. ہے۔

تب

$$\text{ق}_۱ = \text{جہ}\frac{\text{م}_۲}{\text{ر}_{۲۱}} + \text{جہ}\frac{\text{م}_۳}{\text{ر}_{۳۱}} + \text{جہ}\frac{\text{م}_۴}{\text{ر}_{۴۱}} + \,..\,..\,..$$

$$\text{ق}_۲ = \text{جہ}\frac{\text{م}_۱}{\text{ر}_{۲۱}} + \text{جہ}\frac{\text{م}_۳}{\text{ر}_{۳۲}} + \text{جہ}\frac{\text{م}_۴}{\text{ر}_{۴۲}} + \,..\,..\,..$$

.. .. .. .. .. .. .. .. .. .. .. .. .. .. ..

اس لئے صریحاً جملہ (۱)

$$= \frac{۱}{۲}\sum(\text{ق}_۱\text{م}_۱)$$

[کیونکہ جملہ $\sum(\text{ق}_۱\text{م}_۱)$ میں اس قسم کی رقم جیسی $\frac{\text{م}_\text{س}\text{م}_\text{ط}}{\text{ر}_{\text{س ط}}}$ ہے فی الحقیقت دو بار آتی ہے: ایک دفعہ جزو $\text{ق}_\text{س}\times\text{م}_\text{س}$ میں اور ایک دفعہ $\text{ق}_\text{ط}\times\text{م}_\text{ط}$ میں]۔
اس لئے لاتناہی سے مادہ کے ذروں کو تشکیل ا میں لانے میں جو کام ہوا

$$\text{وہ} = \frac{۱}{۲}\sum(\text{ق}_۱\text{م}_۱) = \frac{۱}{۲}\iiint \text{ق}\,\text{ذم}$$

جہاں ق جسم ا کا اس کے کسی جزو ذم پر قوہ ہے اور تکمل کے عمل کو کل جسم کی تشکیل پر پھیلایا گیا ہے۔ برعکس اس کے اس جسم کے ذروں کو ان کی موجودہ تشکیل

سے علیحدہ کر کے لاتناہی پر لے جانے میں ان ذروں کی باہمی کششیں جو کام کرتی

ہیں وہ $= -\frac{1}{2}\iiint ق\, ذم$

پس ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ جب کوئی جسم ایک تشکیل ا سے ہٹ کر دوسری تشکیل ب میں آجائے تو اس کے ذروں کی باہمی کشش کیا کام کرتی ہیں کیونکہ

یہ کام = ان ذروں کی کششوں کا کام جو ان کششوں نے جسم کے ذروں کو تشکیل ا سے نکال کر لاتناہی تک لیجانے میں کیا + وہ کام جو باہمی ذروں کی کششوں نے لاتناہی سے تشکیل ب میں لانے میں کیا اور یہ

$$= -\frac{1}{2}\iiint ق\, ذم + \frac{1}{2}\iiint قَ\, ذمَ$$

جہاں پہلا تکملہ تشکیل ا میں تمام نظام پر لیا گیا ہے اور دوسرا تکملہ تشکیل ب میں تمام نظام پر۔

۳۱۸ — ایک جاذب بالذات کرہ کی کثافت یکساں اور ث کے مساوی ہے اور اس کا نصف قطر ا ہے، یہ کرہ بدل کر ایک اور یکساں کثافت والا کرہ بن جاتا ہے جس کا نصف قطر ب ہے ثابت کرو کہ اس کی باہمی کشش کی قوتوں نے جو کام کیا وہ $\frac{3}{5}\, جہ\, م^2 \left(\frac{1}{ب} - \frac{1}{ا}\right)$ ہے جہاں م کرہ کی کمیت ہے۔

پہلی شکل میں مرکز سے فاصلہ لا پر قوہ (بموجب دفعہ ۳۰۱)

$$= \pi\, جہ\, ث \left(2\, ا^2 - \frac{2\, لا^2}{3}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{2}\iiint ق\, ذم = \frac{1}{2}\int_0^{ا} \pi\, جہ\, ث \left(2\, ا^2 - \frac{2\, لا^2}{3}\right) \times 4\pi\, لا^2\, ث\, ذلا$$

$$= 4\pi^2\, جہ\, ث^2 \left\{\frac{1}{3}\, ا^5 - \frac{1}{15}\, ا^5\right\} = \frac{16}{15}\pi^2\, جہ\, ث^2\, ا^5 = \frac{3}{5}\, جہ\, \frac{م^2}{ا}$$

اسی طرح $\frac{۱}{۲}\iint \text{قہ}\,\text{فرم}$ تشکیل ب کے لئے $\frac{۳}{۵}\,\text{جہ}\,\frac{\text{م}^{۲}}{\text{ب}}$ ہے۔

پس مطلوبہ کام $= \frac{۳}{۵}\,\text{جہ}\,\text{م}^{۲}\left(\frac{۱}{\text{ب}} - \frac{۱}{\text{ا}}\right)$

# مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ اگر زمین کی کثافت کو یکساں فرض کیا جائے تو زمین کو کثیف کرکے ایک پتلے کروی خول میں منتقل کر دینے میں جبکہ خول کا نصف قطر د ہی ہو جو کام کرنا پڑتا ہے وہ $\frac{۹}{۱۰}\,\text{م}\,\text{ا}$ فٹ پونڈ ہے جہاں م زمین کی کمیت ہے پونڈوں میں اور ا زمین کا نصف قطر ہے فٹوں میں۔

۲۔ ایک کرہ کا نصف قطر ا ہے اور کمیت م ہے، اگر اس کے کسی نقطہ پر کثافت مرکز سے نقطہ مذکور کے فاصلہ کے بالعکس متناسب ہو تو ثابت کرو کہ کرہ کے ذروں کو لامتناہی سے موجودہ تشکیل میں لانے میں جو کام باہمی کششیں انجام دیتی ہیں وہ $\frac{۲}{۳}\,\text{جہ}\,\frac{\text{م}^{۲}}{\text{ا}}$ ہے۔

۳۔ ایک مستدیر قرص کے ذروں کو اکٹھا کرنے میں (جبکہ قوت کا قانون نیوٹن کے کلیہ کے مطابق ہو) $\frac{۸}{۳\pi}\,\text{جہ}\,\frac{\text{م}^{۲}}{\text{ا}}$ کام کرنا پڑتا ہے جہاں م قرص کی کمیت ہے اور ا اس کا نصف قطر ہے۔

[باسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ مرکز سے فاصلہ لا پر قوہ $= ۴\,\text{جہ}\,\text{مر}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{ط}}\;\text{فرط}$

اس لئے مطلوبہ کام $= \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\text{ا}}\text{قہ}\times ۲\pi\,\text{مر}\,\text{لا}\,\text{فرلا} = ۴\pi\,\text{جہ}\,\text{مر}^{۲}\int_{۰}^{\text{ا}}\text{لا}\,\text{فرلا}\left[\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{ط}}\;\text{فرط}\right]$

$= ۴\pi\,\text{جہ}\,\text{مر}^{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{\text{ا}}\text{لا}\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{ط}}\;\text{فرلا}\,\text{فرط} = ۴\pi\,\text{جہ}\,\text{مر}^{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\left[-\frac{\left(\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{ط}\right)^{\frac{۳}{۲}}}{۳\,\text{جب}^{۲}\,\text{ط}}\right]_{۰}^{\text{ا}}$

$= \frac{۴\pi\,\text{جہ}\,\text{مر}^{۲}\,\text{ا}^{۳}}{۳}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱ - \text{جم}^{۳}\,\text{ط}}{\text{جب}^{۲}\,\text{ط}}\;\text{فرط} = \frac{۴\pi\,\text{جہ}\,\text{مر}^{۲}\,\text{ا}^{۳}}{۳}\left[\text{جم}\,\text{ط} + \frac{۱}{۱ + \text{جم}\,\text{ط}}\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$

$$= \frac{4\pi\,\text{ج}\,\text{ہ}^2\,\text{ا}^3}{3}\left[\text{جب ط} + \text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2}\right]^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8\pi\,\text{ج}\,\text{ہ}^2\,\text{ا}^3}{3} = \frac{8}{3}\,\frac{\text{ج}\,\text{م}^2}{\pi\,\text{ا}}$$ جہاں ہ کثافت ہے

۴ — ایک متجانس چپٹے کرہ نما کا خروج المرکز جب بہ، نیم محور اعظم ا اور کمیت م ہے، ثابت کرو کہ اس کے ذروں کو موجودہ تشکیل سے لاتناہی پرے جانے میں ان کی باہمی تجاذبی قوتوں کے خلاف $\frac{3}{5}\,\text{ج}\,\frac{\text{م}^2}{\text{ا}}\,\frac{\text{بہ}}{\text{جب بہ}}$ کام کرنا پڑتا ہے۔

۵ — ایک کشش کرنے والے مادہ کی کمیت م، اس کا قوہ قہ اور اس کی حاصل کشش نقطہ (لا، ما، ی) پر س ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{2}\iiint \text{قہ}\,\text{فرم} = \frac{1}{8\pi\,\text{ج}}\iiint \text{س}^2\,\text{فرلا}\,\text{فرما}\,\text{فری}$$

جہاں موخرالذکر تکملہ کو کل فضا میں پھیلایا گیا ہے۔
ایک ٹھوس متجانس کرہ کے لئے اس مسئلہ کی تصدیق کرو۔

تکملہ $\iiint \text{قہ}\,\text{لف}^2\,\text{قہ}\,\text{فرلا}\,\text{فرما}\,\text{فری}$ پر غور کرو جبکہ عمل تکمل کو تمام فضا پر یعنی لا انتہا نصف قطر والے دائرے سے گھری ہوئی فضا پر پھیلایا جائے۔

تکمل بالحصص سے

$$\iint\left\{\int \text{قہ}\,\frac{\text{جف}^2\,\text{قہ}}{\text{جف}\,\text{لا}^2}\,\text{فرلا}\right\}\text{سف ا}\,\text{سف ی} = \iint\left[\text{قہ}\,\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف لا}}\right]\text{سف ما}\,\text{سف ی}$$

$$-\iint\left[\int\left(\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف لا}}\right)^2\text{فرلا}\right]\text{سف ما}\,\text{سف ی} \quad \ldots\ldots (1)$$

یہاں $\left[\text{قہ}\,\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف لا}}\right]$ کو وہ قیمتیں دینی چاہئیں جو اس کی اُن نقطوں پر ہیں جہاں قاعدہ (سف ما سف ی) پر کا متوازی السطوح جس کے باقی رخ و لا کے متوازی ہیں لا متناہی کرہ سے ملتا ہے اس لئے اگر کرہ کی سطح کا وہ حصہ جو اس متوازی السطوح سے منقطع ہوتا ہے سف س ہو تو سف ما × سف ی = سف س × جم لہ جہاں لہ وہ زاویہ ہے جو سف س پر

کا ئما و محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ بناتا ہے۔

$$\therefore \iint \left[ قہ \frac{جف\, قہ}{جف\, لا} \right] مف\, ما \times مف\, ی = \int قہ \frac{جف\, قہ}{جف\, لا} \times فرس\, جم\, لہ$$

جہاں موخرالذکر تکملہ کو لامتناہی کرہ کی کل سطح پر پھیلانا چاہیئے۔

اب $قہ \frac{جف\, قہ}{جف\, لا}$ اس فاصلہ کے معکوس مکعب درجہ کی مقدار ہے جو مف س اور کشش کرنے والے مادہ کے کسی نقطہ کے درمیان ہے اور مف س اسی فاصلہ کے مربع کے درجہ کی مقدار ہے۔ اس لئے

$$\iint قہ \frac{جف\, قہ}{جف\, لا} فرس\, جم\, لہ = 0$$

$$\therefore (1) \text{ سے حاصل ہوتا ہے } \iiint قہ \frac{جف^2\, قہ}{جف\, لا^2} فرلا\, فرما\, فری = -\iiint \left(\frac{جف\, قہ}{جف\, لا}\right)^2 فرلا\, فرما\, فری$$

$$\text{لہذا } \iiint قہ\, لعث^2\, قہ\, فرلا\, فرما\, فری = -\iiint \left\{ \left(\frac{جف\, قہ}{جف\, لا}\right)^2 + \left(\frac{جف\, قہ}{جف\, ما}\right)^2 + \left(\frac{جف\, قہ}{جف\, ی}\right)^2 \right\} فرلا\, فرما\, فری$$

$$= -\iiint سا^2\, فرلا\, فرما\, فری$$

اب کشش کرنے والے مادہ کے اندر $لعث^2\, قہ = -4\pi\, جہ\, مر$ جہاں مر کثافت ہے۔
اور باہر $لعث^2\, قہ = 0$

$$\text{اس لئے } \iiint قہ\, مر\, فرلا\, فرما\, فری = \frac{1}{4\pi\, جہ} \iiint سا^2\, فرلا\, فرما\, فری$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{2} \int قہ\, فرم = \frac{1}{8\pi\, جہ} \iiint سا^2\, فرلا\, فرما\, فری$$

ایک ٹھوس کرہ کی صورت میں دائیں طرف کا رکن $= \frac{3}{5}\, جہ \frac{م^2}{و}$ جیسا کہ دفعہ ۳۱۸ میں دکھایا گیا ہے۔ کرہ کے اندر $سا = \frac{جہ\, م}{و^3}\, ر$ اور اس کے باہر $سا = جہ \frac{م}{ر^2}$ (دفعہ ۲۸۷)۔

اس لئے $\frac{1}{8\pi ج}\iiint س^2\, فرلا\, فرما\, فری$

$$= \frac{1}{8\pi ج}\iiint س^2 \times 4\pi ر^2 \times فرر$$

$$= \frac{1}{2ج}\left[\int^{ب} \frac{ج^2 م^2 ر^2}{ب^6} \times ر^2\, فرر + \int_{ب}^{\infty} \frac{ج^2 م^2}{ر^4} \times ر^2 \times فرر\right] = \frac{3\, جب\, م^2}{15} -$$

۹۱۳۱ — کسی کشش کرنے والی کمیت یا کمیتوں کے قوہ کی قیمت کسی ایسے نقطہ پر جس پر مادہ مذکور نہ ہو مطلق اعظم یا مطلق اقل نہیں ہو سکتی

فرض کرو کہ ن کوئی نقطہ ہے۔ ن کے گرد ایک بہت چھوٹا کرہ بناؤ جس کا مرکز ن ہو اب اگر نقطہ ن پر قوہ کی قیمت اعظم ہو تو اس کے یہ معنی ہیں کہ یہ قیمت ن کے پاس کے کرہ پر کے ہر دوسرے نقطہ ق پر قہ کی قیمت سے بڑی ہو گی یعنی $\frac{جف\, قہ}{جف\, ع}$ ہر سمت میں منفی ہو گا خواہ مف ع، ن سے کسی سمت میں کھینچا جائے

اس لئے کشش کی عادی قوت ع جو ہر نقطہ ق پر $\frac{جف\, قہ}{جف\, ع}$ کے مساوی ہے کرہ مذکور پر کے ہر نقطہ کے لئے منفی ہے اس لئے تکملہ $\iint$ ع فرس کی قیمت کرہ پر منفی ہونی چاہیئے۔ لیکن گاس کے مسئلہ سے (دفعہ ۳۰۴) اس تکملہ کو صفر ہونا چاہیئے کیونکہ ن کے گرد اس چھوٹے سے کرہ میں کوئی مادہ نہیں ہے۔ لہذا یہ ناممکن ہے کہ ن پر قوہ کی قیمت بڑی سے بڑی ہو سکے۔

اسی طرح سے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ ن پر قوہ کی قیمت اقل بھی نہیں ہو سکتی کیونکہ اس طرح کی دلیل سے $\iint$ ع فرس کی قیمت کل کرہ پر مثبت ہونی چاہیئے۔

فرع ۱:- ارنشا کا مسئلہ۔ اگر ایک ذرہ معکوس مربع کے مطابق عمل

کرنے والی قوتوں کے زیر عمل تعادل میں ہو تو تعادل ہمہ قسم کے ہٹاؤں کے لئے قایم نہیں ہوسکتا۔
کیونکہ اگر یہ ذرہ کسی نقطہ ن پر متعادل ہو اور اسے ذرا سا ہٹا کر نقطہ ق پر لے جائیں اور یہ پھر ن پر آنا چاہے تو ضروری ہے کہ $\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ر ع}}$ کی قیمت ق پر منفی ہو، اگر تعادل سب سمتوں میں قایم ہو تو سب ہٹاؤں کی یہی کیفیت ہونی چاہیئے یعنی قہ کی قیمت ن پر بڑی سے بڑی ہونی چاہیئے جو دفعۂ ماقبل کی رو سے ناممکن ہے۔
نیز تعادل غیر قایم بھی نہیں ہوسکتا۔ کیونکہ اس سے $\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ع}}$ کا تمام سمتوں کے لئے مثبت ہونا اور بناءً علیہ قہ کا ن پر اقل ہونا لازم آتا ہے۔
فرع ۲۔ اگر قہ کی قیمت ایک بند سطح س کے سب نقطوں پر ایک ہی مستقل کے مساوی ہو اور اس بند سطح کے اندر کوئی کشش کرنے والا مادہ نہ ہو تو اس کی قیمت سطح مذکور کے اندر سب نقطوں پر بھی وہی ہوگی۔
کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو س کے اندر کوئی نہ کوئی نقطہ ایسا ضرور ہوگا جس پر قوہ س کے اندر کے کسی دوسرے نقطہ پر کے قوہ کی نسبت یا بڑا ہوگا یا چھوٹا ہوگا یعنی کوئی نہ کوئی نقطہ ضرور ایسا ہوگا جس پر قوہ بڑے سے بڑا یا چھوٹے سے چھوٹا ہوگا لیکن یہ مسئلہ ماقبل کی رو سے ناممکن ہے۔
۲۰۳۔ اگر کسی تقسیم مادہ کے قوہ کی قیمت فضا کے تمام نقاط کے لئے معلوم ہو تو ہم اسکے جواب میں مادہ کی تقسیم دریافت کرسکتے ہیں۔ کیونکہ قہ کے معلوم ہونے سے ہم فضا کے ہر نقطہ پر $\text{لف}^2$ قہ کی قیمت معلوم کرسکتے ہیں۔ جہاں کہیں یہ صفر ہو وہاں پائیسون کی مساوات سے ظاہر ہے کہ کثافت صفر ہوگی یعنی ان نقطوں پر مادہ موجود نہ ہوگا۔ جہاں کہیں یہ صفر نہ ہو وہاں کثافت مادہ $\frac{\text{لف}^2 \text{ قہ}}{\text{۴ ج ۲۲}}$ ہوگی۔
اگر قوہ تفاعل کی شکل ایک سطح س کے اندر کے نقطوں کے لئے اور باہر کے نقطوں کے لئے مختلف ہو اور اگر $\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ع}}$ کی قیمت میں جبکہ ہم اس سطح

کی ایک طرف سے دوسری طرف جائیں دفعۃً تغیر واقع ہو تو س پر مادہ کی سطحی تقسیم دفعہ ۲۸۲ کی رو سے حاصل ہو گی کیونکہ اگر س کے عین اندر قوہ $\text{قہ}_1$ اور اس کے عین باہر قوہ قب ہو تو دفعہ ۲۸۲ کے نتیجہ سے ظاہر ہے کہ

$$4\pi\,\text{ج}\,\text{ثہ} = \left(-\frac{\text{جف قہ}_1}{\text{جف ع}}\right) - \left(-\frac{\text{جف قب}}{\text{جف ع}}\right)$$

$$\text{یعنی ثہ} = \frac{1}{4\pi\,\text{ج}}\left[\frac{\text{جف قہ}_1}{\text{جف ع}} - \frac{\text{جف قب}}{\text{جف ع}}\right] \quad \ldots\ldots (1)$$

جہاں ثہ، س پر مادہ کی سطحی کثافت ہے۔

مشق۔ مادہ کی تقسیم دریافت کرو جو یہ قوہ پیدا کرے

$$\frac{\text{ج م}}{\text{ا}}\left(1-\frac{\text{لا}}{2\,\text{ا}^2}\right) \;\text{یا}\; \frac{\text{ج م}}{\text{ر}}\left(1-\frac{\text{ا لا}}{2\,\text{ر}^2}\right)$$

جبکہ ر $\left(=\sqrt{\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2}\right)$ بالترتیب ا سے کم ہو یا زیادہ ہو۔

فرض کرو کہ نصف قطر ا کے کرہ کے اندر قوہ $\text{قہ}_1$ ہے اور باہر $\text{قہ}_2$

$$\text{پس}\; \text{قہ}_1 = \frac{\text{ج م}}{\text{ا}}\left(1-\frac{\text{لا}}{2\,\text{ا}^2}\right) \;\text{اور}\; \text{قہ}_2 = \text{ج م}\left(\frac{1}{\text{ر}}-\frac{\text{ا لا}}{2\,\text{ر}^3}\right)$$

تفرق کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$\text{لف}^2\,\text{قہ}_1 = 0$ اور $\text{لف}^2\,\text{قہ}_2 = 0$ اس لئے کروی خول ر = ا کے اندر اور باہر کوئی مادہ نہیں ہے۔

کروی سطح پر کی تقسیم کے لئے

$$\frac{\text{جف قہ}_1}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{ج م}}{2\,\text{ا}^3} \;\text{اور}\; \frac{\text{جف قہ}_1}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف قہ}_1}{\text{جف ی}} = 0$$

$$\text{اس لئے کروی سطح پر}\; \frac{\text{جف قہ}_1}{\text{جف ع}} = \frac{\text{جف قہ}_1}{\text{جف لا}} \times \frac{\text{لا}}{\text{ر}} = -\frac{\text{ج م}}{2\,\text{ا}^3}\,\text{لا}$$

نیز
$$\frac{\text{جف قہ}_۲}{\text{جف لا}} = \text{جہ م}\left[-\frac{\text{ا} + ۳\,\text{لا}}{\text{ر}^۳} + \frac{\text{ا لا}^۲}{\text{ر}^۵}\right]$$

اور
$$\frac{\text{جف قہ}_۲}{\text{جف ما}} = \text{جہ م}\left[-\frac{\text{ما}}{\text{ر}^۳} + \frac{\text{ا لا ما}}{\text{ر}^۵}\right]$$
اور
$$\frac{\text{جف قہ}_۲}{\text{جف ی}} = \text{جہ م}\left[-\frac{\text{ی}}{\text{ر}^۳} + \frac{\text{ا لا ی}}{\text{ر}^۵}\right]$$

اس لئے جبکہ ر = ا تو

$$\frac{\text{جف قہ}_۲}{\text{جف لا}} = \text{جہ م}\,\frac{۳\,\text{لا}^۲ - ۳\,\text{ا لا} - \text{ا}^۲}{۳\,\text{ا}^۴}$$

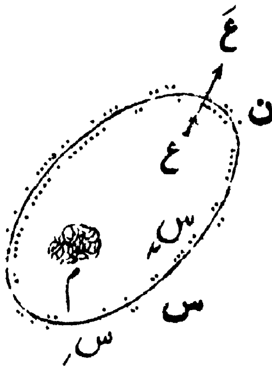
$$\frac{\text{جف قہ}_۲}{\text{جف ما}} = \text{جہ م} \times \frac{\text{ما}(\text{لا} - \text{ا})}{\text{ا}^۴}$$
اور
$$\frac{\text{جف قہ}_۲}{\text{جف ی}} = \text{جہ م}\,\frac{\text{ی}(\text{لا} - \text{ا})}{\text{ا}^۴}$$

پس کرہ ن کی سطح پر
$$\frac{\text{جف قہ}_۲}{\text{جف ع}} = \frac{\text{جف قہ}_۲}{\text{جف لا}} \times \frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{جف قہ}_۲}{\text{جف ما}} \times \frac{\text{ما}}{\text{ا}} + \frac{\text{جف قہ}_۲}{\text{جف ی}} \times \frac{\text{ی}}{\text{ا}}$$

$$= \text{جہ م} \times \frac{۳(\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ + \text{ی}^۲)(\text{لا} - \text{ا}) - \text{ا}^۲\,\text{لا}}{۳\,\text{ا}^۵} = \text{جہ م} \times \frac{۲\,\text{لا} - ۳\,\text{ا}}{۳\,\text{ا}^۲}$$

اس لئے (۱) سے $\text{ثہ} = \frac{\text{م}}{۴\pi\,۳\,\text{ا}^۲}(\text{ا} - \text{لا})$ جس سے کرہ کی سطح پر کے کسی نقطہ پر کثافت معلوم ہوتی ہے۔

۳۲۱- اگر س، قوہ قہ کی ایک بند مساوی قوہ سطح ہو جس کے جاذب مادہ کی کمیت م ہے اور اگر جاذب مادہ کی ایک پتلی تہ س پر چڑھائی جائے اور کسی نقطہ ن پر اس کی کثافت
$$\text{ثہ} = -\frac{۱}{۴\pi\,\text{ص}}\,\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ع}}$$
جہاں حف ع نقطہ ن پر باہر کی طرف کھینچے ہوئے عماد کا ایک چھوٹا جزو ہے تو س کے باہر کے سب نقطوں پر پتلی تہ کا قوہ، م کے قوہ کے مساوی ہوگا نیز پتلی تہ اور مَ کا مجموعی قوہ س کے تمام اندرونی نقطوں پر مستقل اور قہ کے مساوی ہوگا جہاں مَ جاذب مادہ کا وہ حصہ ہے جو س کے باہر ہے۔




پہلے ہم تہ کی کثافت کسی نقطہ ن پر ایسی معلوم کرتے ہیں کہ س کے ہر نقطہ پر اس کا اور مَ کا قوہ ملکر = قہ

اب م اور مَ کا (جو کشش کرنے والے مادہ کی کمل کمیت ہے) س کے ہر نقطہ پر قوہ = قہ

اس لئے کل تہ کا قوہ = س کے ہر نقطہ پر م کا قوہ

اس لئے اگر کثافت مر کی علامت بدل دیں یعنی نظام کو تجاذبی نظام سے بدل کر اندفاعی نظام بنا دیں تو م اور نقطہ ن پر - مر کثافت والی تہ کا قوہ، سطح س کے سب نقطوں پر (جو س کے عین باہر واقع ہے) صفر ہوگا۔

لیکن م اور تہ (- مر) کا قوہ لا انتہا نصف قطر والے کرہ پر بھی صفر ہے۔ اس لئے دفعہ ۳۱۹ کی فرع ۲ کی رو سے (چونکہ س اور لا انتناہی کرہ کے اندر کی فضا میں کمیت م اور تہ کا کوئی جزو نہیں ہے) م اور تہ (- مر) کا قوہ س اور لا انتناہی کرہ کے اندر کی سب فضا میں ہر جگہ صفر ہے یعنی س کے باہر کی کل فضا میں صفر ہے۔

یعنی م کا قوہ = انتہا میں س کے باہر کی تمام فضا میں کثافت مر والی تہ کا قوہ، . . . . . . . (۱)

نیز دفعہ ۳۱۸ کی اسی فرع کے بموجب چونکہ تہ اور مَ کا قوہ سطح س کے تمام نقطوں پر جو س کے عین اندر کی سطح ہے قہ کے مساوی ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ س کے اندر ہر جگہ ان کے قوؤں کا مجموعہ مستقل ہے اور قہ کے مساوی ہے (کیونکہ س کے اندر کوئی کشش کرنے والا مادہ جو تہ اور مَ پر مشتمل ہے موجود نہیں ہے) اور اس لئے انتہا میں سطح س کے اندر قوہ مستقل اور قہ کے مساوی ہے . . . . (۲)

فرض کرو کہ سطح کے نقطہ ن پر تہ کے عین اندر اور عین باہر کے نقطوں پر

قوت کشش کے عمادی جزو تحلیلی جبکہ دونوں باہر کی طرف ناپے گئے ہوں بالترتیب ع اور عَ ہیں، تب دفعہ ۲۸۲ کی رو سے

۴ ٹ جب مر = عَ - ع . . . . . . (۳)

اب (۲) سے ظاہر ہے کہ عَ + مَ کی نقطہ ن پر عمادی کشش = ۰

اور (۱) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

عَ = ن پر م کی عمادی کشش

اس لئے (۳) سے حاصل ہوتا ہے

- ۴ ٹ جب مر = ن پر مَ کی عمادی کشش + ن پر م کی عمادی کشش

(چونکہ عمادی کششوں کو باہر کی طرف ناپا گیا ہے)

= کل کشش کرنے والی کمیت کی ن پر عمادی کشش باہر کی طرف

$$= \frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ع}}$$

اس لئے تہ کی کثافت مر نقطہ ن پر = - $\frac{۱}{\text{۴ ٹ جب}}$ $\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ع}}$

فرع ۱ — چونکہ کمیت م اور تہ کے قوہ س کے باہر کے سب نقطوں پر مساوی ہیں اس لئے یہ لاتناہی پر بھی مساوی ہیں -

اس سے ظاہر ہے کہ تہ کی کمیت = م

متبادل ثبوت

تہ کی کمیت = ∫ مر فرس = - $\frac{۱}{\text{۴ ٹ جب}}$ ∫ $\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ع}}$ × فرس

= - $\frac{۱}{\text{۴ ٹ جب}}$ × عمادی کشش کا سطحی تکملی سطح س پر

= کمیت س کے اندر بموجب دفعہ ۳۰۳ = م

فرع ۲ — فرض کرو کہ س کے باہر کوئی کشش کرنے والی کمیت نہیں ہے یعنی

فرض کرو کہ مَ صفر ہے، تب س کے باہر کی فضا کے ہر نقطہ پر تہ کا قوہ = م کا قوہ

نیز س کے اندر تہ کا قوہ = قہ = سطح س پر م کا قوہ

۳۲۲۔ دفعہ ما قبل کی ایک آسان مثال ذیل میں درج کی جاتی ہے۔ فرض کرو کہ نقطہ و پر کمیت م کا ایک ذرہ ہے اور مَ صفر ہے۔ تب س ایک کرہ ہوگا جس کا مرکز و اور نصف قطر کسی مقدار ر کے مساوی ہے۔

اس لئے $ھ = -\frac{1}{4\pi\,جہ}\,\frac{جف\,قہ}{جف\,ر} = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{جف}{جف\,ر}\left(\frac{جہ\,م}{ر}\right)$

$$= \frac{م}{4\pi ر^2}$$

اس لئے س کے باہر اس تہ کا قوہ = ذرہ م کا قوہ = $\frac{جہ\,م}{\text{نقطہ و سے فاصلہ}} = \frac{جہ\,4\pi ر^2 ھ}{\text{و سے فاصلہ}}$

اور س کے اندر اس تہ کا قوہ مستقل ہے اور = م کا قوہ کرہ کی سطح پر

$$= \frac{جہ\,م}{ر} = \frac{جہ \times 4\pi ر^2 ھ}{ر}$$

یہ دفعہ ۳۰۰ کے نتائج ہیں۔

۳۲۳۔ مشق۔ ایک متجانس پتلی سیدھی سلاخ کا طول ۲ج اور کمیت م ہے۔ اس کے مساوی قوہ منحنیوں میں سے ایک منحنی کے محور اعظم کا طول ۲و ہے۔ ثابت کرو

اگر اس منحنی پر مادہ کی تقسیم اس طرح ہو کہ کسی نقطہ ن پر کثافت $\frac{1}{4\pi} \times \frac{م\,ع}{و(و^2 - ج^2)}$

ہو (جہاں ع سلاخ کے وسطی نقطہ سے ن پر منحنی کے مماس پر عمود کا طول ہے) تو اس تہ کا قوہ سطح مذکور کے باہر کے کسی نقطہ پر سلاخ کے قوہ کے مساوی ہوگا۔

فرض کرو کہ سلاخ ا ب ہے اور ا ن = ر، اور ب ن = ر۲ اور ن سے

ا ب پر عمود ما ہے۔

تب $\frac{\text{جف ق}}{\text{جف ع}}$ = ن پر سلاخ کی کشش = $\frac{\text{۲ جہ ک م}}{\text{ما}}$ جب $\frac{\text{ان ب}}{۲}$ (دفعہ ۲۷۷)

$$= \frac{\text{۲ جہ ک م} \times \text{۲ ج جب} \frac{\text{ان ب}}{۲}}{ر_۱ ر_۲ \text{ جب ان ب}} = \frac{\text{۲ جہ ک م ج}}{ر_۱ ر_۲ \text{ جم} \frac{\text{ان ب}}{۲}}$$

اب جم$^۲$ $\frac{\text{ان ب}}{۲}$ = جب$^۲$ (ب ن ت) جہاں ن ت نقطہ ن پر مساوی قوہ منحنی کا مماس ہے $= \frac{\text{ب}^۲}{ر_۱ ر_۲} = \frac{\text{ا}^۲ - \text{ج}^۲}{ر_۱ ر_۲}$

اور $ر_۱ ر_۲$ = ج ن کا مزدوج نیم قطر $= \frac{\text{ا ب}}{\text{ع}} = \frac{\text{ا}\sqrt{\text{ا}^۲ - \text{ج}^۲}}{\text{ع}}$

$$\therefore \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ع}} = \frac{\text{۲ جہ ک م ج ع}}{\text{ا}(\text{ا}^۲ - \text{ج}^۲)} = \frac{\text{جہ م ع}}{\text{ا}(\text{ا}^۲ - \text{ج}^۲)}$$

اس لئے ت کی کثافت $= \frac{۱}{۴\pi} \frac{\text{م ع}}{\text{ا}(\text{ا}^۲ - \text{ج}^۲)}$

مساوی قوہ منحنی کے باہر، ت اور سلاخ کے قوہ تمام نقطوں پر مساوی ہیں۔
مساوی قوہ منحنی کے اندر دفعہ ۱۲۳ کے فرع (۲) کی رو سے ت کا قوہ سب نقطوں پر وہی ہے اور = قوہ منحنی کے سب نقطوں پر سلاخ کا قوہ

یعنی = جہ ک م لوک $\frac{ر_۱ + ر_۲ + \text{۲ ج}}{ر_۱ + ر_۲ - \text{۲ ج}}$ (دفعہ ۲۹۸)

$$= \text{جہ} \frac{\text{م}}{\text{۲ ج}} \text{ لوک } \frac{\text{ا} + \text{ج}}{\text{ا} - \text{ج}}$$

## مثالیں

۱— ایک ثابت نقطہ و سے ایک نقطہ کا فاصلہ ر ہے اور اس پر قوہ

ق = ۲$\pi$ جہ مہ (ا$^{2}$ − ب$^{2}$)　اگر ر < ب < ا

ق = ۲$\pi$ جہ مہ (ا$^{2}$ − ر$^{2}$/۳ − ۲/۳ · ب$^{3}$/ر)　اگر ب < ر < ا

اور　ق = ۴$\pi$ جہ مہ (ا$^{3}$ − ب$^{3}$) / ۳ر　اگر ب < ا < ر

ثابت کرو کہ کشش کرنے والا مادہ ایک کروی خول ہے جسکی کثافت مہ ہے اور جسکی حدود دو مرکز والے ہم مرکز کُرے ہیں جن کے نصف قطر ا اور ب ہیں۔

۲ — بتاؤ کہ مادہ کی کس تقسیم سے ذیل کے قوہ حاصل ہو سکتے ہیں

ق = ۴ جہ م ا ی / ر$^{3}$　جبکہ ر > ا

ق = جہ م × (۳ ا$^{2}$ + ۴ ا ی − ۳ ر$^{2}$) / ا$^{3}$　جبکہ ر < ا جہاں ر$^{2}$ = لا$^{2}$ + ما$^{2}$ + ی$^{2}$

[ کرہ ر = ا کے اندر کثافت ہے ۹ م / ۲$\pi$ ا$^{3}$ اور اس کے باہر صفر ہے

اس کی سطح پر سطحی کثافت ۳ م / ۲$\pi$ ا$^{2}$ (۲ی/ا − ۱) ہے ]

۳ — مادہ کی ایک خاص تقسیم کا قوہ کسی نقطہ لا، ما، ی پر

۲ جہ مہ $\pi$ / ۳ × ا$^{3}$/ر + ۴ جہ مہ $\pi$ / ۱۵ × ا$^{5}$ (۲ لا$^{2}$ − ما$^{2}$ − ی$^{2}$) / ر$^{5}$　جبکہ ر > ا

اور　۴ جہ مہ $\pi$ / ۳ ا$^{3}$ + ۴ جہ مہ $\pi$ / ۱۵ ا (۲ لا$^{2}$ − ما$^{2}$ − ی$^{2}$)　جبکہ ر < ا

تقسیم معلوم کرو۔

(کرہ ر = ا کی سطح پر سطحی کثافت مہ لا ہے، کرہ کے اندر اور باہر کوئی مادہ نہیں۔)

۴ — ایک اسطوانی سطح کے کنارے محوری کے متوازی ہیں۔ اس کے باہر قوہ صفر ہے اور اندر ق = لا$^{3}$ − ۳ ما$^{2}$ لا − ا لا$^{2}$ + ۳ ا ما$^{2}$، تقسیم معلوم کرو۔

۵ — مادہ کی کس تقسیم سے ذیل کے قوہ پیدا ہوتے ہیں۔

قہ = ۱ ، ناقص نما $\frac{لا^2}{مہ^2 ا^2} + \frac{ما^2}{مہ^2 ب^2} + \frac{ی^2}{مہ^2 ج^2} = 1$ کے اندر $(مہ < 1)$

قہ = $\frac{1}{1 - مہ^2}\left[1 - \frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} - \frac{ی^2}{ج^2}\right]$ اوپر کے ناقص نما اور ناقص نما

$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} + \frac{ی^2}{ج^2} = 1$ کے اندر اور

قہ = ۰ ناقص نما $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} + \frac{ی^2}{ج^2} = 1$ کے باہر۔

۶ — کشش کرنے والے مادہ کی معلومہ مقدار کا قوہ کسی نقطہ (لا ، ما ، ی) پر

جو $\frac{ا^2(لا^2 - ما^2) + 2ب^2 لا ما}{(لا^2 + ما^2)^2}$ ہے ، ثابت کرو کہ کسی ایک مساوی قوہ سطح پر

سطحی کثافت $-\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ا^4 + ب^4}{(لا^2 + ما^2)^3}}$ تمام بیرونی نقطوں پر وہی قوہ پیدا کرے گی جو اصلی کمیت پیدا کرتی ہے۔

۷ — ایک کرہ کا نصف قطر ا ہے۔ اس کی سطح پر وہ کثافت معلوم کرو جس کی وجہ سے اس کے مرکز سے فاصلہ ر پر کے نقطہ پر قوہ $لہ(2ا^3 - ر^3)$ ہو جبکہ $ر < ا$ اور $لہ\frac{ا^4}{ر}$ ہو جبکہ $ر > ا$

[$مر = \frac{3لہ ر}{\pi ج}$ کرہ کے اندر ، $مر = 0$ اس کے باہر ، اور $مر = -\frac{لہ ا^2}{2\pi ج}$ اس کی سطح پر]

# سولھواں باب

## کم لچک والے شہتیروں کا تعادل

۳۲۴۔ اگر ہم ایک ایسی پتلی سلاخ یا شہتیر کی شکل معلوم کرنا چاہیں جو کسی طرح بوجھ سے لدی ہوئی ہے تو ہمیں سلاخ کی شکل اور جھکاؤ کے معیار اثر میں کوئی رشتہ معلوم ہونا چاہیئے۔ ہم یہاں فرض کریں گے کہ جھکاؤ کا معیار اثر انحنا کے متناسب ہوتا ہے

یعنی جھکاؤ کا معیار اثر = $\frac{ک}{ر}$ جہاں شہتیر کا نصف قطر انحنا ر ہے اور ک کو خماؤ کی استواریت کہتے ہیں۔

اگر وزن ڈالنے سے پہلے شہتیر کا انحنا اسی نقطہ پر $\frac{1}{ر_0}$ تھا تو جھکاؤ کا

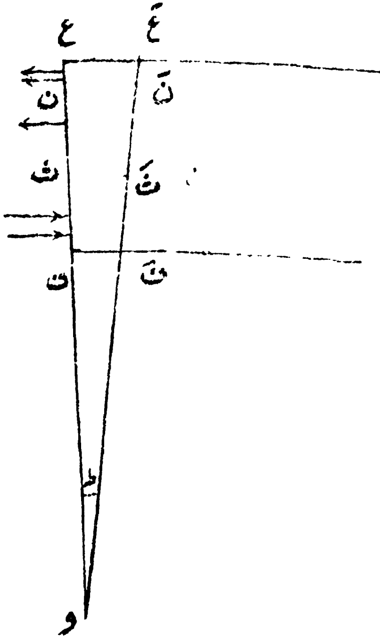
معیار اثر $ک\left(\frac{1}{ر} - \frac{1}{ر_0}\right)$ ہوگا۔

یہ مفروضہ پہلے پہل برنولی اور یولر نے استعمال کیا تھا۔ اس کی تصدیق معمولی شہتیروں کی صورت میں جن کے طول اُن کی تراشوں کے ابعاد کے مقابل میں بہت زیادہ ہوں تجربہ کے ذریعہ ہو چکی ہے۔ دفعہ ذیل میں چند امور کو تسلیم کر کے جن کا تسلیم کرنا درحقیقت پورے طور پر صحیح نہیں ہے برنولی کے مفروضہ کا ثبوت دیا گیا ہے۔

۳۲۵۔ ایک مستطیلی شہتیر کو بغیر تناؤ کے جھکایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر جھکاؤ کا معیار اثر اُس نقطہ پر کے انحنا کے متناسب ہوتا ہے۔

جب ایک شہتیر کو جو قدرتی طور پر بالکل سیدھا تھا جھکا کر ذیل کی شکل میں لایا جاتا ہے تو ظاہر ہے کہ

اوپر کے حصے کے ریشے یعنی ع کے نزدیک کے ریشے تناؤ کی حالت میں ہونگے اور نیچے کے حصہ کے ریشے جوف کے نزدیک ہیں پچکاؤ کی حالت میں ہوں گے۔




خط ث ثَ کو جو تناؤ اور پچکاؤ کی حالت والے ریشوں کو علیحدہ کرتا ہے تعدیلی خط کہتے ہیں۔

اب ہم یہ مان لیتے ہیں اور ایسا کرنا حقیقت سے کچھ زیادہ بعید نہیں ہے کہ شہتیر کی کوئی مستوی تراش جو محور کے علی القوائم ہے جھکاؤ کے بعد بھی مستوی تراش کی شکل قایم رکھتی ہے۔

فرض کرو کہ تعدیلی خط ث ثَ پر کے دو قریب کے نقطوں پر کے عماد ایک دوسرے سے و پر ملتے ہیں اور و ث = ر

فرض کرو کہ کاغذ کی سطح مستوی میں ث ثَ کے ع کی جانب میں کوئی ریشہ ن نَ ہے۔ اگر اس ریشہ کے لئے ہک کا مقیاس لچک لہ ہو تو اس کا

$$\text{تناؤ فی اکائی رقبہ} = \text{لہ} \times \frac{\text{ن نَ} - \text{ث ثَ}}{\text{ث ثَ}} = \text{لہ}\,\frac{(\text{ر} + \text{لا}) - \text{ر}}{\text{ر}} = \text{لہ}\,\frac{\text{لا}}{\text{ر}}$$

جہاں ث ن = لا۔

اس لئے اگر ن پر کے ریشے کی عمودی تراش کا رقبہ مف ا ہو تو اس کا

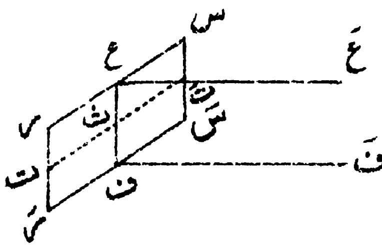
$$\text{تناؤ} = \text{لہ} \times \frac{\text{لا}}{\text{ر}} \times \text{مف ا}$$

[اگر ن، ث کے دوسری جانب واقع ہو یعنی ف کی طرف ہو تو لا منفی ہوگا اور یہ تناؤ پچکاؤ میں بدل جاتا ہے]

چونکہ شہتیر میں تناؤ نہیں ہے اس لئے و ع پر عمود وار ریشوں کے تناؤں کا مجموعہ صفر ہے۔

اس لئے ∑ لہ لا/ر مف ا = ۰ جبکہ جمع کا عمل ث میں سے گزرنے والی کاغذ کی سطح پر علی القوائم تراش کے کل رقبہ ر س س َ ر َ پر پھیلایا گیا ہے۔

اس لئے ∑ لا × مف ا = ۰




کسی رقبہ کا مرکز ثقل معلوم کرنے کے لئے جو ضابطے ہیں اُن سے ظاہر ہے کہ ث اس خط پر واقع ہے جو تراش ر س س َ ر َ کے مرکز ثقل میں سے کاغذ کی سطح پر علی القوائم کھینچا جائے۔ لہذا اگر کاغذ کی سطح مستوی شہتیر کی متشاکل تراش ہو تو ث کو تراش ر س س َ ر َ کا مرکز ثقل ہونا چاہیئے۔

خط ث ت کے گرد جو کاغذ کی سطح مستوی پر عمود وار ہے معیار اثر لینے سے ظاہر ہے کہ اس کے گرد حاصل جفت

= ∑ لہ لا/ر × مف ا × لا = لہ/ر × ∑ لا۲ مف ا

(صریحاً ث کے اوپر کے ریشوں کے تناؤ نیچے کے ریشوں کے دباؤں کے ساتھ مل کر جفت بناتے ہیں)

لیکن تراش ر س س َ ر َ کا جمود کا معیار اثر خط ث ت کے گرد ∑ لا۲ مف ا ہے اس کو عموماً جؔ سے تعبیر کیا جائے گا۔

اس لئے حاصل جفت یعنی جھکاؤ کا معیار اثر $\frac{مجله}{ر}$ کے مساوی ہے جہاں
لہ لچک کا مقیاس لچک ہے، ر تعدیلی خط کا نصف قطر انحنا ہے اور مج شہتیر
کی عمودی تراش کے جمود کا معیار اثر اس خط کے گرد ہے جو تراش کے مرکز ثقل
میں سے شہتیر کی لمبائی پر علی القوائم ہے۔

۳۲۶ — جب شہتیر بہت ہی خفیف طور پر خمائیدہ پذیر ہو یعنی جب مقدار لہ مج بہت بڑی ہو
تو مقدار $\frac{لہ مج}{ر}$ کو مختصر کیا جا سکتا ہے۔

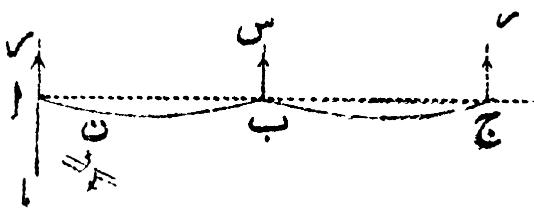
کیونکہ

$$\frac{1}{ر} = \pm \frac{\frac{ف^2 ما}{فر لا^2}}{\left\{1+\left(\frac{فر ما}{فر لا}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

اگر سلاخ تقریباً سیدھی ہو یعنی خط مستقیم سے زیادہ متفاوت نہ ہو تو $\frac{فر ما}{فر لا}$
بہت چھوٹا ہوگا جبکہ لا کو افقاً اور ما کو انتصاباً ناپا جائے۔

اس صورت میں $\frac{1}{ر}$ کی قیمت تقریباً $\pm \frac{ف^2 ما}{فر لا^2}$ ہوگی یعنی جھکاؤ کا معیار اثر
$\pm$ لہ مج $\frac{ف^2 ما}{فر لا^2}$ ہوگا۔ مشتبہ علامت کی تحقیق $\frac{ف^2 ما}{فر لا^2}$ کی علامت پر منحصر ہے۔

۳۲۷ — مشق ۔ ایک یکساں تھوڑی سی مڑ سکنے والی سلاخ اج کا طول ۲ ل ہے اس کو
اس کے دو کناروں پر اور نیز
اس کے وسطی نقطہ ب پر
سہارا گیا ہے۔ سہارے کے
تینوں مقام ایک ہی خط مستقیم میں
واقع ہیں، ان پر کے دباؤ معلوم
کرو اور نیز سلاخ جس منحنی کی شکل
میں ساکن ہے اس کی مساوات معلوم کرو۔



فرض کرو کہ ا ب کے اندر کوئی نقطہ ن ہے۔

تب ن پر کا جھکاؤ کا معیار اثر ن کے بائیں طرف کے حصہ پر $\frac{لہ\ جج}{سا}$ ہے جو اس ↺ سمت میں عمل کرتا ہے۔ نیز اگر ما کا محور انتصاباً نیچے کی طرف ہو تو ن پر $\frac{فرما}{فرلا}$ کی قیمت گھٹتی ہے اور اس لئے $\frac{فر^{2}ما}{فرلا^{2}}$ منفی ہے لہذا $\frac{1}{سا}$ تقریباً $-\frac{فر^{2}ما}{فرلا^{2}}$ کے مساوی ہے۔

اگر ا پر کا تعامل ضر ہو اور سلاخ کا وزن فی اکائی طول $و_1$ ہو تو حصہ ن ا کے لئے ن کے گرد معیار اثر لینے سے

$$-لہ\ جج \frac{فر^{2}ما}{فرلا^{2}} = \frac{لہ\ جج}{سا} = ضر \times لا - و_1 لا \times \frac{لا}{2} \quad \ldots (1)$$

$$\therefore -لہ\ جج \frac{فرما}{فرلا} = ضر \frac{لا^{2}}{2} - \frac{و_1 لا^{3}}{6} + د \quad \ldots (2)$$

لیکن تشاکل سے $\frac{فرما}{فرلا} = 0$ جبکہ $لا = ا_1$

$$\therefore د = \frac{و_1 ا_1^{3}}{6} - ضر \frac{ا_1^{2}}{2}$$

$$\therefore -لہ\ جج\ ما = ضر \frac{لا^{3}}{6} - \frac{و_1 لا^{4}}{24} + \left(\frac{و_1 ا_1^{3}}{6} - ضر \frac{ا_1^{2}}{2}\right) لا \quad \ldots (3)$$

تکمل کا مستقل صفر ہے کیونکہ لا اور ما ایک ساتھ معدوم ہوتے ہیں۔

نیز ما = ۰ جب، $لا = ا_1$

$$\therefore 0 = ضر \frac{ا_1^{3}}{6} - \frac{و_1 ا_1^{4}}{24} + \left(\frac{و_1 ا_1^{4}}{6} - ضر \frac{ا_1^{3}}{2}\right)$$

$$\therefore ضر = \frac{3}{8} و_1 ا_1 = \frac{3}{16} \times کل\ وزن$$

ش س = وسطی سہارے کا دباؤ = $\frac{5}{8}$ × کل وزن

نما کی یہ قیمتیں (۱)، (۲)، (۳) میں درج کرنے سے

$$-\text{لہ مجر}\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \frac{\text{لہ}}{\text{نما}} = \frac{\text{و}}{2}\left(\frac{3\,\text{ل}_1\text{لا}}{4} - \text{لا}^2\right) \quad \ldots\ldots (4)$$

$$-\text{لہ مجر}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{و}}{2}\left(\frac{3\,\text{ل}_1\text{لا}^2}{8} - \frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{ل}_1^3}{24}\right) \quad \ldots\ldots (5)$$

اور $$-\text{لہ مجر ما} = \frac{\text{و}}{2}\left(\frac{\text{ل}_1\text{لا}^3}{8} - \frac{\text{لا}^4}{12} - \frac{\text{ل}_1^3\text{لا}}{24}\right) = -\frac{\text{و}}{48}\text{لا}(\text{لا}-\text{ل}_1)^2(2\text{لا}+\text{ل}_1) \quad \ldots (6)$$

(۴) سے ظاہر ہے کہ لا = $\frac{3}{4}$ ل۱ = $\frac{3}{4}$ (ا ب) پر ایک مخالف خماؤ کا نقطہ ہے

نیز جھکاؤ کا معیار اثر بڑے سے بڑا ہوتا ہے جبکہ لا = $\frac{3\,\text{ل}_1}{8}$ اور اس وقت جھکاؤ کا معیار اثر $\frac{9\,\text{و}\,\text{ل}_1^2}{128}$ ہے سمت میں ہوگا بسرے ب پر جھکاؤ کا معیار اثر $\frac{\text{و}\,\text{ل}_1^2}{8}$ مقابل سمت میں ہے، اس لئے شہتیر پہلے ب پر ٹوٹیگا۔

(۵) سے ظاہر ہے کہ سلاخ کا بڑے سے بڑا جھوک اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \frac{\text{ل}_1}{16}\left(1+\sqrt{33}\right) = .42 \times \text{ل}_1$$

ایک شہتیر کے نقاط انعطاف کو بالعموم اس کے قبضے یا موہوم جوڑ کہتے ہیں کیونکہ ان نقطوں پر جھکاؤ کے معیار اثر کی عدم موجودگی کی وجہ سے شہتیر کے تعادل میں بغیر خلل ڈالے ان نقطوں پر قبضے یا جوڑ لگائے جا سکتے ہیں۔

۲۲۸ ۔ دفعہ ۱۲۹ میں یہ ثابت کیا گیا تھا کہ

بوجھ = $-\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ [جزئی زور]

اور جزئی زور = $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ [جھکاؤ کا معیار اثر]

اور دفعہ ۳۲۶ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ خفیف سے لچکدار شہتیروں کی صورت میں

جھکاؤ کا معیار اثر ∞ فر²/فر لا² [ڈھال]

اور ڈھال = فر/فر لا [انصراف]

اس لئے بوجھ کے منحنی، جزی زور کے منحنی اور جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی میں باہم اسی طرح کا ربط ہے جیسا کہ جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی ڈھال کے منحنی اور انصراف کے منحنی میں ہے۔

اس لئے ہمیں دفعہ ۱۳۳ کی طرح ایک مسئلہ حاصل ہوتا ہے یعنی انصراف کے منحنی کے کوئی دو مماس جس نقطہ پر قطع کرتے ہیں وہ جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کے تناظر حصہ کے مرکز ثقل کے انتصاباً نیچے ہوتا ہے۔

ہم آسانی سے اس امر کی تصدیق دفعہ ما قبل کی مثال کی صورت میں کر سکتے ہیں۔
حصہ اب کے لئے جھکاؤ کے معیار اثر کا منحنی ہے

$$\text{ما} = \text{م} = \frac{\text{و}_1}{2}\left[\frac{3\,\text{ل}\,\text{لا}}{4} - \text{لا}^2\right] \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

اور انصراف کا منحنی ہے

$$\frac{2\,\text{لہ}\,\text{جر}}{\text{و}_1}\,\text{ما} = \frac{\text{لا}^4}{12} - \frac{\text{ل}_1\,\text{لا}^3}{8} + \frac{\text{ل}_1^3\,\text{لا}}{24} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

(۲) کے نقطہ $(\text{لا}_1,\ \text{ما}_1)$ پر کا مماس ہے

$$\frac{2\,\text{لہ}\,\text{جر}\,\text{ما}}{\text{و}_1} = \text{لا}\left[\frac{\text{لا}_1^3}{3} - \frac{3\,\text{ل}_1\,\text{لا}_1^2}{8} + \frac{\text{ل}_1^3}{24}\right] - \frac{\text{لا}_1^4 - \text{ل}_1\,\text{لا}_1^3}{4}$$

یہ $(\text{لا}_2,\ \text{ما}_2)$ پر کے مماس کو قطع کرتا ہے جہاں

$$\text{لا} = \frac{6\left[\left(\text{لا}_2^4 - \text{لا}_1^4\right) - \text{ل}_1\left(\text{لا}_2^3 - \text{لا}_1^3\right)\right]}{8\left(\text{لا}_2^3 - \text{لا}_1^3\right) - 9\,\text{ل}_1\left(\text{لا}_2^2 - \text{لا}_1^2\right)}$$

نیز منحنی (۱) کے متناظر حصہ کے مرکز ثقل کا فصلہ

$$\bar{لا} = \frac{\int_{لا_1}^{لا_2} ما \; فرلا \times لا}{\int_{لا_1}^{لا_2} ما \; فرلا} = \frac{\int_{لا_1}^{لا_2} (۳ ا لا^{۲} - ۴ لا^{۳}) \; فرلا}{\int_{لا_1}^{لا_2} (۳ ا لا - ۴ لا^{۲}) \; فرلا}$$

$$= \frac{ا (لا_2^{۳} - لا_1^{۳}) - (لا_2^{۴} - لا_1^{۴})}{۳ \frac{ا}{۲} (لا_2^{۲} - لا_1^{۲}) - \frac{۴}{۳} (لا_2^{۳} - لا_1^{۳})} = \frac{۶ \left[ (لا_2^{۴} - لا_1^{۴}) - ا (لا_2^{۳} - لا_1^{۳}) \right]}{۸ (لا_2^{۳} - لا_1^{۳}) - ۹ ا (لا_2^{۲} - لا_1^{۲})}$$

پس مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

# مثالیں

۱ — ایک خفیف سے جھک جانے والے شہتیر کے سرے دو افقی سہاروں پر ساکن ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک سرے سے فاصلہ پر انصراف ہوگا

$$\frac{و}{۲۴ ک} لا (ا - لا) \{ ا^{۲} + ا لا + لا^{۲} \}$$ جہاں ک انصراف کی استواریت ہے،

ا شہتیر کا طول ہے، و ا اس کا کل وزن ہے۔

۲ — ایک یکساں پل جس کا وزن وَ ہے ایک ہی تختہ سے بنا ہوا ہے۔ پل کناروں کے سہاروں پر ساکن ہے۔ ایک شخص اس پل پر ایسے مقام پر کھڑا ہے جس کے فاصلے کناروں سے ا اور ب ہیں۔ ثابت کرو کہ اس مقام پر انصراف

$$\frac{وَ (ا^{۲} + ۳ ا ب + ب^{۲}) + ۸ و ا ب}{۲۴ ا جہ (ا + ب)} \times ا ب$$

ہے جہاں و اُس شخص کا وزن ہے۔

۳ — ایک لچکدار سلاخ کے ایک سرے کو شکنجہ کے ذریعہ اس طرح ثابت کر دیا گیا ہے کہ سلاخ کی سمت اس مقام پر افقی ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے سرے کا انصراف اس انصراف

کا $\frac{۳}{۸}$ ہے جو اس کے سرے پر اس کے وزن کے مساوی وزن لٹکا دینے سے حاصل ہوتا۔

۴ — ایک یکساں شہتیر ا ب کا طول ل ہے اس کو اس کے سروں سے سہارا گیا ہے اور اس کے ایک نقطہ ق پر وزن و باندھا گیا ہے ا ق = $ا_۱$، اگر شہتیر کے وزن کو نظر انداز کیا جائے تو ثابت کرو کہ ا ق کی مساوات ہے

$$ل\,ج\,ما = \frac{و(ل - ا_۱)}{۶ل}\left[ا_۱(۲ل - ا_۱)لا - لا^۳\right]$$

اور ق ب کی مساوات ہے

$$ل\,ج\,ما = \frac{و\,ا_۱}{۶ل}\left[(ل^۲ - ا_۱^۲)(ل - لا) - (ل - لا)^۳\right]$$

ثابت کرو کہ کسی نقطہ ن پر کا انحراف جبکہ بوجھ ق پر ہو مساوی ہوتا ہے ق پر کے انحراف کے جبکہ وہی بوجھ ن پر ہو۔

۵ — ایک وزنی یکساں سلاخ دو سہاروں پر افقاً ساکن ہے جن میں سے ایک سہارا ایک سرے پر ہے۔ اگر سلاخ کے وسطی نقطہ پر جھکاؤ کا معیار اثر صفر ہو تو ثابت کرو کہ دوسرا سہارا اول الذکر سرے سے سلاخ کے طول کے دو تہائی فاصلہ پر ہونا چاہیئے۔

۶ — ایک کم لچکدار شہتیر ا ب کا وزن و اور طول ۲ ا ہے اس کو سروں پر اور وسطی نقطہ ج پر سہارا گیا ہے۔ اگر سہاروں پر کے دباؤ مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ج کی گہرائی ا ب کے نیچے $\frac{۷}{۱۴۴}\,\frac{و\,ا^۳}{ک}$ ہے اور یہ گہرائی اس گہرائی کا $\frac{۷}{۱۵}$ ہے جو شہتیر کو صرف سروں پر سہارنے کی صورت میں ہوتی۔

۷ — ایک یکساں شہتیر کو اس کے تثلیث کے نقطوں ا اور ب پر سہارا گیا ہے۔ ا ب متوازی الافق ہے۔ ثابت کرو کہ شہتیر کے وسطی نقطہ کی ا ب کے اوپر بلندی کو شہتیر کے دونوں سروں کی ا ب کے نیچے گہرائی کے ساتھ نسبت ۱۹ : ۱۲۸ ہے۔

۸ — ایک پتلی یکساں خفیف طور پر لچکدار سلاخ کا طول ۴ ا ہے، اس کے وسطی نقطہ کے ساتھ وزن و بندھا ہے۔ سلاخ کو دو ایسے نقطوں پر سہارا گیا ہے جن کے وسطی نقطہ

سے فاصلے $l$ ہیں اگر سہارے کے مقاموں پر کے مماس افق کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ و سلاخ کے وزن کے چھٹے حصہ کے مساوی ہے۔

۹۔۔۔ایک مرتکز بوجھ شہتیر کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ جھکاؤ کے منحنیوں کے ڈھالوں کی نسبت ۲ سے شروع کر کے $\frac{5}{4}$ تک بدلتی ہے اور موخر الذکر قیمت اُس وقت اختیار کرتی ہے جبکہ بوجھ ایک سرے سے شہتیر کے ایک تہائی طول کے فاصلہ پر ہو۔

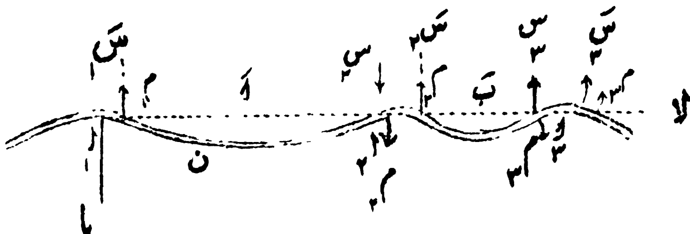
۱۰۔۔۔ایک ریل کا پل دو شہتیروں سے بنا ہوا ہے اور اس پر ریل کی ایک پٹری پڑی ہے سہاروں کے درمیان ہر ایک شہتیر کا طول ۴۰ فٹ ہے۔ ایک انجن کا کل وزن ۶۸ ٹن ہے اور یہ ۴ دھروں پر منقسم ہے جس میں سے اگلے دھرے پر ۸ ٹن وزن ہے اور باقی تینوں دھروں میں سے ہر ایک پر ۲۰ ٹن وزن ہے۔ اگلے اور باقی تینوں دھروں کے فاصلے پل کے ایک سرے سے بالترتیب ۶ فٹ، $13\frac{1}{2}$ فٹ، ۲۱ فٹ اور ۲۹ فٹ ہیں شہتیر کا بڑے سے بڑا انصراف معلوم کرو اور بتاؤ کہ یہ کس مقام پر ہے۔

## ۳۲۹۔ تین معیار اثروں کے متعلق کلا لی رون کی مساوات۔

اگر ایک یکساں طور پر لدے ہوئے شہتیر کے جھکاؤ کے معیار اثر سہارے کے تین مقاموں $ا_1$، $ا_2$، $ا_3$ کے گرد بالترتیب $م_1$، $م_2$، $م_3$ ہوں جہاں سہارے کے مقام ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں تو ثابت کرو کہ

$$آ م_1 + ۲ (آ + ب) م_2 + ب م_3 = \frac{و}{۴} (آ^۳ + ب^۳)$$

جہاں و شہتیر کے فی اکائی طول کا وزن ہے اور $آ = ا_1 ا_2$ اور $ب = ا_2 ا_3$



فرض کرو کہ $\text{ا}_1$ کے عین دائیں جانب جزّی زور $\text{سَ}_1$ ہے اور $\text{س}_2$ اور $\text{سَ}_2$ جزّی زور ہیں $\text{ا}_2$ کے عین بائیں اور دائیں جانب۔

$\text{ا}_1$ کو مبداء فرض کرو اور $\text{ا}_1\,\text{ا}_2\,\text{ا}_3$ کو لا کا محور مانو اور فرض کرو کہ ما کا محور انتصاباً نیچے کی طرف کھینچا گیا ہے۔

تب $\text{ا}_1\,\text{ا}_2$ کے اندر کسی نقطہ ن کے لئے جس کا فاصلہ $\text{ا}_1$ سے لا ہو ہمیں ن کے بائیں طرف کے حصے کے لئے معیار اثر لینے سے دفعہ ۳۲۷ کے مطابق حاصل ہوتا ہے

$$-\text{لہ مج}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = \frac{\text{لہ مج}}{\text{ر}} = \text{سَ}_1\,\text{لا} - \frac{\text{و}_1}{2}\,\text{لا}^2 - \text{م}_1 \quad \ldots\ (1)$$

نیز $\text{ا}_2$ کے گرد معیار اثر لینے سے ہمیں حصہ $\text{ا}_1\,\text{ا}_2$ کے لئے حاصل ہوتا ہے

$$\text{م}_2 = \frac{1}{2}\,\text{و}_1\,\text{ل}_1^2 - \text{سَ}_1\,\text{ل}_1 + \text{م}_1 \quad \ldots\ (2)$$

$\text{سَ}_1$ کو ساقط کر دینے سے

$$-\text{لہ مج}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = \frac{\text{و}_1}{2}\left(\text{ل}_1\,\text{لا} - \text{لا}^2\right) - \text{م}_1\left(1 - \frac{\text{لا}}{\text{ل}_1}\right) - \text{م}_2\,\frac{\text{لا}}{\text{ل}_1} \quad \ldots\ (3)$$

$$\text{اس لئے}\quad \text{لہ مج}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{و}_1}{2}\left(\frac{\text{ل}_1\,\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^3}{3}\right) - \text{م}_1\left(\text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2\,\text{ل}_1}\right) - \text{م}_2\,\frac{\text{لا}^2}{2\,\text{ل}_1} + \text{ج} \quad \ldots\ (4)$$

$$\text{اور}\quad -\text{لہ مج ما} = \frac{\text{و}_1}{2}\left(\frac{\text{ل}_1\,\text{لا}^3}{6} - \frac{\text{لا}^4}{12}\right) - \text{م}_1\left(\frac{\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^3}{6\,\text{ل}_1}\right) - \text{م}_2\,\frac{\text{لا}^3}{6\,\text{ل}_1} + \text{ج لا} + \text{د}$$

اب ما = ۰ جبکہ لا = ۰ یا $\text{ل}_1$ ۔ اس لئے د = ۰ اور

$$\text{ج} = \text{م}_1\,\frac{\text{ل}_1}{3} + \text{م}_2\,\frac{\text{ل}_1}{6} - \frac{\text{و}_1\,\text{ل}_1^3}{24} \quad \ldots\ (5)$$

اس لئے (۴) سے

$$\left[-\text{لہ مج}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right] \text{کی قیمت نقطہ } \text{ا}_1 \text{ پر} = \text{ج} = \text{م}_1\,\frac{\text{ل}_1}{3} + \text{م}_2\,\frac{\text{ل}_1}{6} - \frac{\text{و}_1\,\text{ل}_1^3}{24} \quad \ldots\ (6)$$

اور [ $- \text{لہ مج} \frac{\text{فر}^2}{\text{فرلا}^2}$ ] کی قیمت نقطہ $\text{ا}_2$ پر $= \frac{\text{و}}{12} \text{ا}^3 - (\text{م}_1 + \text{م}_2) \frac{\text{ا}}{2} + \text{ج}$

$$= \frac{\text{و}_1 \text{ا}^3}{24} - \text{م}_1 \frac{\text{ا}}{6} - \text{م}_2 \frac{\text{ا}}{3} \quad \ldots \ldots (7)$$

اسی طرح حصہ $\text{ا}_2 \text{ا}_3$ کے تعادل کے لئے (۶) کے نمونہ کا نتیجہ حسب ذیل حاصل ہوگا

$$\left[- \text{لہ مج} \frac{\text{فر}^2}{\text{فرلا}^2}\right] \text{ کی قیمت نقطہ } \text{ا}_2 \text{ پر} = \text{م}_2 \frac{\text{ب}}{3} + \text{م}_3 \frac{\text{ب}}{6} - \frac{\text{و}_1 \text{ب}^3}{24} \quad \ldots (8)$$

چونکہ نقطہ $\text{ا}_2$ پر سمت میں تبدیلی واقع نہیں ہوتی اس لئے نتائج (۷) اور (۸) ایک ہی ہونے چاہئیں ان کو مساوی رکھنے سے

$$\text{م}_1 \text{ا} + 2 \text{م}_2 (\text{ا} + \text{ب}) + \text{م}_3 \text{ب} = \frac{\text{و}_1}{4} (\text{ا}^3 + \text{ب}^3)$$

[یہ بات قابل غور ہے کہ دفعہ ہذا میں م۱، م۲ اور م۳ کی مثبت سمت وہ نہیں ہے جو کہ دفعات ۱۲۹ اور ۱۳۲ میں ہے بلکہ اس کے مقابل ہے]

کسی سہارے پر کے تعامل کو جھکاؤ کے معیار اثروں م۱، م۲، م۳ کی رقوم میں بیان کرنا۔ $\text{ا}_1 \text{ا}_2$ کے تعادل سے

$$\text{س}_1 - \text{س}_2 = \text{و}_1 \text{ا}$$

پس (۲) سے

$$\text{س}_2 = \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{\text{ا}} - \frac{\text{و}_1 \text{ا}}{2}$$

حصہ $\text{ا}_2 \text{ا}_3$ کے لئے (۲) کے نمونے کی مساوات سے

$$\text{س}'_2 = \frac{\text{و}_1 \text{ب}}{2} + \frac{\text{م}_2 - \text{م}_3}{\text{ب}}$$

اس لئے سہارے $\text{ا}_2$ پر کا تعامل $= \text{س}'_2 - \text{س}_2 = \frac{\text{و}_1 (\text{ا} + \text{ب})}{2} - \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{\text{ا}} + \frac{\text{م}_2 - \text{م}_3}{\text{ب}}$

**۳۳۰**۔ اگر نقطہ $ل_۲$، نقاط $ل_۱$ اور $ل_۳$ کی ہموار ی پر ہونے کی بجائے ان سے بالترتیب $ہا_۱$ اور $ہا_۲$ طول نیچے ہو تو آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ تین معیار اثروں میں رشتہ حسب ذیل ہے

$$م_۱ اَ + ۲ م_۲ (اَ + بَ) + م_۳ بَ = \frac{و}{۴} (اَ^۳ + بَ^۳) - ۶ لہ مج \left( \frac{ہا_۱}{اَ} + \frac{ہا_۲}{بَ} \right)$$

**۳۳۱**۔ **مشق ۱**۔ فرض کرو کہ دفعہ ۳۲۹ کی مشق میں شہتیر کے سرے $ل_۱$ اور $ل_۳$ ہیں۔ یعنی شہتیر سہاروں $ل_۱$، $ل_۲$، $ل_۳$ پر قائم ہے جہاں $ل_۱ ل_۲ = اَ$ اور $ل_۲ ل_۳ = بَ$

$$تب\ م_۱ = م_۳ = ۰ \quad اور\ م_۲ = \frac{و}{۸} (اَ^۲ - اَ بَ + بَ^۲)$$

جہاں $و$ شہتیر کا فی اکائی طول وزن ہے۔

فرض کرو کہ $ل_۱$، $ل_۲$، $ل_۳$ پر تعامل $سہا_۱$، $سہا_۲$، $سہا_۳$ ہیں۔ $ل_۲$ کے گرد معیار اثر لینے سے

$$م_۲ = \frac{و اَ^۲}{۲} - سہا_۱ اَ$$

$$اور\ اس\ لئے\ سہا_۱ = \frac{و}{۸} \left[ \frac{۳ اَ^۲ + اَ بَ - بَ^۲}{اَ} \right]$$

$$اور\ اسی\ طرح\ سے\quad سہا_۳ = \frac{و}{۸} \left[ \frac{۳ بَ^۲ + اَ بَ - اَ^۲}{بَ} \right]$$

$$اور\ سہا_۲ = و (اَ + بَ) - سہا_۱ - سہا_۳ = \frac{و}{۸} \left[ اَ + بَ \right] \left[ \frac{اَ^۲ + ۳ اَ بَ + بَ^۲}{اَ بَ} \right]$$

فرض کرو کہ $اَ > بَ$، تب $سہا_۳$ منفی ہوگا اگر

$$اَ^۲ - اَ بَ > ۳ بَ^۲ \quad یعنی\ اگر\ اَ > \frac{بَ}{۲} (۱ + \sqrt{۱۳})$$

$$یعنی\ اگر\ اَ > بَ \times ۲٫۳\ تقریباً$$

اس صورت میں سرے $ل_۳$ کو سہارے کے ساتھ مس کرتا ہوا رکھنے کے لئے اس پر مزید وزن

رکھنا پڑیگا۔

نیز جھکاؤ کا معیار اثر م ﴿ کسی نقطہ پر جو $ا_۱$ سے فاصلہ لا پر ہو

$$= س_۱ لا - \frac{و لا^۲}{۲} = و لا \times \frac{۳ اَ^۲ + اَ ب - ب^۲}{۸ اَ} - \frac{و لا^۲}{۲}$$

اس لئے یہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ $لا = \frac{۳ اَ^۲ + اَ ب - ب^۲}{۸ اَ}$ اور اس مقام پر جھکاؤ کے معیار اثر کی قیمت

$$= \frac{و}{۲} \left( \frac{۳ اَ^۲ + اَ ب - ب^۲}{۸ اَ} \right)^۲ \quad \cdots \quad (۱)$$

نیز $ا_۲$ پر جھکاؤ کا معیار اثر $= م_۲ ﴿ = \frac{و}{۸} ( اَ^۲ - اَ ب + ب^۲ )$

پس $ا_۲$ پر کا معیار اثر (۱) سے بڑا ہوگا اگر

$$۱۶ اَ^۲ ( اَ^۲ - اَ ب + ب^۲ ) > ( ۳ اَ^۲ + اَ ب - ب )^۲$$

یعنی اگر $( ۱۱ اَ^۲ + اَ ب - ب^۲ )^۲ < ۱۲۸ اَ^۴$

یعنی اگر $اَ ب - ب^۲ < ( ۸ \sqrt{۲} - ۱۱ ) اَ^۲ < ( ۰٫۳۱۳۶ ) \times اَ^۲$

یعنی اگر $\left( ب - \frac{اَ}{۲} \right)^۲ + ( ۰٫۰۶۳۶ ) \times اَ^۲ > ۰$ جو امر صحیح ہے۔

پس اگر شہتیر ٹوٹے تو مقام $ا_۲$ پر ٹوٹے گا۔

(مذکورہ بالا میں $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$ کے لئے جو نتائج حاصل کئے گئے ہیں اُن کی تصدیق اَ اور ب کی مختلف قیمتوں کے لئے تجربہ سے ہو سکتی ہے۔ اس طرح ہم دفعہ ۳۲۴ کے مفروضہ کی تصدیق کر سکتے ہیں)

**مشق ۲** — ایک یکساں سلاخ $ا_۱ ا_۴$ کو سروں پر اور دو اور مقاموں $ا_۲$ $ا_۳$ پر جو شہتیر کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں سہارا گیا ہے۔ سہارے کے سب مقام ایک ہی ہمواری پر واقع ہیں۔ ان پر دباؤ اور نیز ان پر وزن و کی رقوم میں جھکاؤ کے معیار اثر معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سلاخ کا طول ل (= ۳ اَ) لہٰذا و = ۳ اَ × و₁
دفعہ ۳۲۹ کا ضابطہ سہاروں ا₁، ا₂، ا₃ پر لگانے سے اور پھر سہاروں
ا₂، ا₃، ا₄ پر یہی ضابطہ لگانے سے اور اس بات کا خیال رکھتے ہوئے کہ م₁ اور م₄
صریحاً آزاد سروں پر صفر ہیں

۴ م₂ + م₃ = (و₁ اَ²)/۲ اور م₂ + ۴ م₃ = (و₁ × اَ²)/۲

∴ م₂ = م₃ = (و₁ × اَ²)/۱۰ = (و × ل)/۹۰

نیز اگر ا₁ پر تعامل س₁ ہو تو ہمیں ا₂ کے گرد حصہ ا₁ ا₂ کے لئے معیار اثر لینے سے حاصل ہوتا ہے

م₂ = ½ و₁ اَ² − س₁ اَ

یعنی س₁ = ۲/۵ و₁ اَ = ۲/۱۵ و = س₄ تشاکل سے

اس لئے س₂ اور س₃ میں سے ہر ایک کو ۱۱و/۳۰ کے مساوی ہونا چاہیئے۔

اگر ہم ا₁ کو مبدا مانیں اور محور ما نیچے کی طرف نا پیں تو درمیانی حصہ ا₂ ا₃ کی مساوات حسب ذیل ہوگی

− لہ جھ (فر² ما)/(فر لا²) = − و₁/۲ لا² + س₂ (لا − اَ) + س₁ × لا

لہٰذا لہ جھ (فر² ما)/(فر لا²) = و₁/۱۰ [ ۵ لا² − ۱۵ اَ لا + ۱۱ اَ² ]

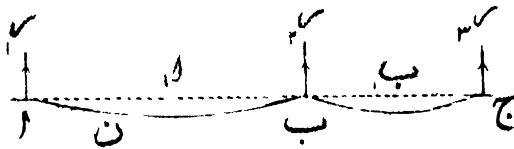
تکمل کرنے سے چونکہ ما = ۰ جبکہ لا = اَ یا ۲ اَ

لہ جھ ما = و₁/۱۲۰ (لا − اَ) (لا − ۲ اَ) ( ۵ لا² − ۱۵ اَ لا + ۱۱ اَ² )

اس لئے ما اور (فر² ما)/(فر لا²) دونوں صفر ہونگے جبکہ لا = اَ [ ۳/۲ ± √۵/۱۰ ]

پس درمیانی حصہ میں دو انعطاف کے نقطہ ہیں جو سہاروں کے مقامات کو ملانے والے خط پر واقع ہیں۔

**مشق ۳۴** —— ایک یکساں سیدھی سلاخ ا ب ج کے سروں کو اس طرح ثابت کیا گیا ہے کہ ان پر کے مماس متوازی الافق ہیں اور سلاخ کو ب پر سہارا گیا ہے۔ اگر ا، ب، ج تینوں ایک ہی افقی خط میں واقع ہوں اور ا ب = $\text{ا}_1$ اور ب ج = $\text{ب}_1$ تو ا، ب، ج پر کے تعامل اور جھکاؤ کے معیار اثر دریافت کرو۔




فرض کرو کہ ا، ب، ج پر جھکاؤ کے معیار اثر $\text{م}_1$، $\text{م}_2$، $\text{م}_3$ اور تعامل $\text{س}_1$، $\text{س}_2$، $\text{س}_3$ ہیں۔

دفعہ ۳۲۹ کا مسئلہ اس سوال میں استعمال کیا جا سکتا ہے کیونکہ سلاخ کو ا پر افقی وضع میں ساکن کئے جانے کی بجائے ہم ا کے لاانتہا قریب کے دو نقطوں کو ثابت تصور کر سکتے ہیں۔ اس لئے دفعہ ۳۲۹ کا ضابطہ درست رہیگا اگر ہم $\text{ا}_1 \text{ا}_2 = 0$ اور $\text{ا}_2 \text{ا}_3$ = ا ب = $\text{ا}_1$ رکھیں اور اس سے حاصل ہوتا ہے

$$0 + 2\text{م}_1 \times \text{ا}_1 + \text{م}_2 \times \text{ا}_1 = \frac{1}{4}\,\text{و}\,\text{ا}_1^3 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

اور سہارے کے نقطوں ا، ب، ج کے لئے

$$\text{م}_1 \text{ا}_1 + 2\text{م}_2(\text{ا}_1 + \text{ب}_1) + \text{م}_3 \text{ب}_1 = \frac{1}{4}\,\text{و}_1(\text{ا}_1^3 + \text{ب}_1^3) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

اسی طرح سے ہم ج پر اس کے لاانتہا قریب دو نقطوں کو ثابت تصور کر سکتے ہیں۔ اس صورت میں ضابطہ بالا سے حاصل ہوگا

$$\text{م}_2\,\text{ب}_1 + 2\,\text{م}_3\,\text{ب}_1 + 0 = \frac{\text{و}_1}{4}\,\text{ب}_1^3 \qquad (3)$$

(۱) ، (۲) ، اور (۳) کو حل کرنے سے

$$\text{م}_1 = \frac{\text{و}_1}{24}\left(2\,\text{ا}_1^2 + \text{ا}_1\text{ب}_1 - \text{ب}_1^2\right) = \frac{\text{و}_1}{24}\left(\text{ا}_1 + \text{ب}_1\right)\left(2\,\text{ا}_1 - \text{ب}_1\right)$$

$$\text{م}_2 = \frac{\text{و}_1}{12}\left(\text{ا}_1^2 - \text{ا}_1\text{ب}_1 + \text{ب}_1^2\right)$$

$$\text{م}_3 = \frac{\text{و}_1}{24}\left(2\,\text{ب}_1^2 + \text{ا}_1\text{ب}_1 - \text{ا}_1^2\right) = \frac{\text{و}_1}{24}\left(\text{ا}_1 + \text{ب}_1\right)\left(2\,\text{ب}_1 - \text{ا}_1\right)$$

نیز حصہ ا ب کے لئے ب کے گرد معیار اثر لینے سے

$$\text{م}_2 = \frac{\text{و}_1\,\text{ا}_1^2}{2} - \text{س}_1\,\text{ا}_1 + \text{م}_1$$

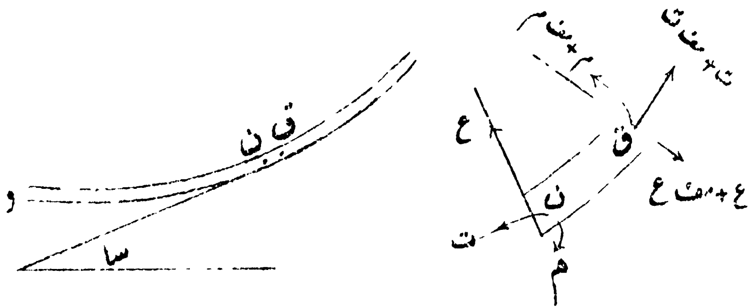
اس لئے
$$\text{س}_1 = \frac{\text{و}_1}{8}\left[4\,\text{ا}_1 + \text{ب}_1 - \frac{\text{ب}_1^2}{\text{ا}_1}\right]$$

نیز اسی طرح
$$\text{س}_3 = \frac{\text{و}_1}{8}\left[4\,\text{ب}_1 + \text{ا}_1 - \frac{\text{ا}_1^2}{\text{ب}_1}\right]$$

$$\therefore\ \text{س}_2 = \text{و}_1\left(\text{ا}_1 + \text{ب}_1\right) - \text{س}_1 - \text{س}_3 = \frac{\text{و}_1}{8}\,\frac{\left(\text{ا}_1 + \text{ب}_1\right)^3}{\text{ا}_1\,\text{ب}_1} = \frac{\left(\text{ا}_1 + \text{ب}_1\right)^2}{8\,\text{ا}_1\,\text{ب}_1} \times$$ سلاخ کا کل وزن۔

اگر ما کے محور کو انتصاباً نیچے کھینچا جائے تو ا سے فاصلہ لا پر کے نقطہ ن پر کی تراش کے گرد معیار اثر لینے سے ہمیں حصہ ا ب کے لئے حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} = \text{س}_1\,\text{لا} - \text{م}_1 - \frac{\text{و}_1\,\text{لا}^2}{2}$ ۔ قیمتیں درج کرنے سے ہمیں منحنی ا ب کی مساوات حاصل ہوجاتی ہے نیز نقطہ ب پر منحنی کا میلان افق کے ساتھ معلوم ہوجاتا ہے۔

۳۳۲ — ایک سلاخ کو ایک ہی سطح مستوی میں موڑا گیا ہے اس کے تعادل کی عام شرائط۔




فرض کرو کہ ن ق سلاخ کا کوئی جزو ہے اور و ن = س جہاں و کوئی ثابت نقطہ ہے اور ن ق = مف س ، نیز فرض کرو کہ ن اور ق پر کے مماس محور لا کے ساتھ زاویہ سا اور سا + مف سا بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ ن پر تناؤ ت اور ق پر تناؤ ت + مف ت ہے۔

فرض کرو کہ جزو ن ق کے نقطہ ن پر کا جزی زور ع ہے جسے عاد کی اندرونی جانب کی سمت میں ناپا گیا ہے اور بنائے علیہ ق پر جزی زور ع + مف ع ہے جسے ق پر کے عاد کی سمت میں باہر کی طرف ناپا گیا ہے۔

فرض کرو کہ جزو ن ق کے نقطہ ن پر جھکاؤ کا معیار اثر م ہے اور نقطہ ق پر م + مف م ہے اور ان کی سمتیں شکل میں دکھائی گئی ہیں۔

فرض کرو کہ جزو ن ق پر مماسی اور عادی قوتیں فی اکائی طول ف اور گ ہیں۔ ن پر کے مماس اور عاد کی سمت میں تحلیل کرنے سے

ت − (ت + مف ت) جم مف سا + (ع + مف ع) جب مف سا + ف مف س = ۰

اور ع − (ع + مف ع) جم مف سا + (ت + مف ت) جب مف سا + گ مف س = ۰

انتہا میں جب مف سا لا انتہا چھوٹا ہو تو ان مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} + \frac{\text{ع}}{\text{ر}} + \text{ف} = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

(جہاں ر نصف قطر انحنا ہے)

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرس}} - \frac{\text{ت}}{\text{ر}} - \text{گ} = 0 \quad \ldots \quad (۲)$$

نیز جزو ن ف کے لئے ن کے گرد معیار اثر لینے سے

$$\text{م} - (\text{م} + \text{معف م}) + (\text{ع} + \text{معف ع})\,\text{معف س} - \text{گ}\,\text{معف س} \times \tfrac{1}{2}\,\text{معف س} = 0$$

انتہا میں اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرم}}{\text{فرس}} - \text{ع} = 0 \quad \ldots \quad (۳)$$

یہ مساوات اس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ کسی نقطہ پر جزئی زور قوس کے لحاظ سے جھکاؤ کے معیار اثر کا تفرقی سر ہے۔

اگر سلاخ کا نقطہ ن پر نصف قطر انحنا ہو جبکہ سلاخ پر کوئی دباؤ نہ ہو تو ہمیں یہ مزید مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{م} = \text{ک}\left[\frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\text{ر}_0}\right] \quad \ldots \quad (۴)$$

جہاں ک سلاخ کے خم کی استواریت ہے۔

ان چار مساواتوں سے ت، ع، م اور سلاخ کے منحنی کی مساوات معلوم ہوتی ہے۔

## مثالیں

ایک یکساں خفیف طور پر لچکدار سلاخ کا طول $\text{ا}_1 + \text{ب}_1$ ہے، یہ ایک متوازی الافق ان تین سہاروں پر قائم ہے یہ سہارے سلاخ کے سروں ا اور ب پر اور نیز ایک ج پر جس کا فاصلہ ا سے $\text{ا}_1$ ہے واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ سلاخ کے انعطاف کے نقطے ثر سر حصوں اج اور جب میں واقع ہیں اور ایسے ہیں کہ

$$\text{ا}_1 \times \text{ثر ج} = \text{ب}_1 \times \text{ثر ج} = \frac{1}{4}\left(\text{ا}_1^2 - \text{ا}_1\text{ب}_1 + \text{ب}_1^2\right)$$

۲۔ ایک شہتیر پر جس کا طول ۴۰ فٹ ہے ۲ ٹن فی فٹ طول کا وزن ہے اس شہتیر کو ایک سرے سے ۸ فٹ کے فاصلے پر ایک ستون پر سہارا گیا ہے اور اس کا دوسرا سرا اینٹوں کے ایک پشتہ پر سہاروں پر جھکاؤ کے معیار اثر معلوم کرو اور پیمانہ کے مطابق جزّی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کھینچو۔ [۲۲۴ اور ۶۴ فٹ ٹن]

۳۔ ایک یکساں گاڈر ا ب کا وزن و اور طول ل ہے۔ اس کا ایک سرا ا ایک پشتہ کے اندر اس طرح مدفون ہے کہ یہاں گاڈر کی سمت متوازی الافق ہے اور دوسرا سرا ب، ا میں سے گزرنے والے افقی خط میں واقع ہے ثابت کرو کہ ا پر جھکاؤ کا معیار اثر اور جزّی زور بالترتیب $\frac{و ل}{۸}$ اور $\frac{۵ و}{۸}$ ہیں۔ تمام شہتیر کے لئے جزّی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کھینچو اور ثابت کرو کہ جن نقطوں پر جھکاؤ کا معیار اثر صفر یا بڑے سے بڑا ہے اُن کے فاصلے ا سے $\frac{ل}{۴}$ اور $\frac{۵ ل}{۸}$ ہیں۔

ثابت کرو کہ شہتیر جس شکل میں ساکن ہے اس کی مساوات ہے ۴۸ لہ مج ما ل = و × لا$^۲$ (ل - لا)(۳ ل - ۲ لا)۔

۴۔ ایک سلاخ ا ب کا طول ل ہے۔ اس کے نقطہ ق (ا ق = ا$_۱$) پر وزن و لٹکایا گیا ہے اور شہتیر کے وزن کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ اگر سروں کو متوازی الافق محل میں ساکن رکھا جائے تو ثابت کرو کہ ا ق کی مساوات ہے

$$لہ مج ما = \frac{و (ل - ا_۱)^۲}{۶ ل^۳} لا^۲ \left[ ۳ ل ا_۱ - ۲ لا ا_۱ - ل لا \right]$$

اور ب ق کی مساوات ہے $لہ مج ما = \frac{و ا_۱^۲}{۶ ل^۳} (ل - لا)^۲ \left[ ۳ ل لا - ۲ ا_۱ لا - ا_۱ ل \right]$

۵۔ ایک خفیف طور پر مڑ سکنے والی سلاخ کا طول ۲ ا ہے، اس کے ایک سرے کو متوازی الافق محل میں ثابت کیا گیا ہے۔ ایک سہارے کو سلاخ کے وسطی نقطہ کے نیچے اسطرح رکھا گیا ہے کہ آزاد سرا ثابت سرے کی ہمواری پر ہو ثابت کرو کہ وسطی نقطہ کی اونچائی سرے

کے اوپر $\frac{11}{240} \times \frac{و\, ل^3}{ک}$ ہے جہاں ک خماؤ کا مستقل ہے اور و سلاخ کا وزن ہے۔

نیز ثابت کرو کہ سہارے پر دباؤ $\frac{6}{5}$ و ہے

۶۔۔۔ ایک مسلسل گارڈر کا طول ۲ل فٹ ہے اور اسے تین مساوی الفصل ستونوں پر سہارا گیا ہے جن میں دو سروں پر واقع ہیں اور ایک وسطی نقطہ پر۔ درمیانی ستون دھات کا بنا ہوا ہے اور اس لئے تپش کے تغیر سے اس میں انقباضی حرکت پیدا ہوتی ہے جس کی وسعت سروں کی ہمواری کے مقام سے اوپر اور نیچے دونوں طرف ۱ فٹ ہے۔ وسطی ستون کے عین اوپر گارڈر کی تراش عرضی پر عمادی دباؤ کا تغیر اس تغیر کے اوپر اور نیچے معلوم کرو جو واقع ہوتا ہے [illegible] ستون ایک خط میں ہوں۔

۷۔۔۔ ایک یکساں [illegible] شہتیر کا وزن و اور طول ل ہے۔ [illegible] ثابت کیا گیا [illegible] شہتیر [illegible] دونوں سروں پر متوازی الافق ہے۔ [illegible] جھکاؤ کا معیار [illegible] نقطہ [illegible] معلوم کرو اور ثابت کرو کہ سروں پر اس کی [illegible] وسطی نقطہ پر اس [illegible] کی دوچند ہے اور ہر سرے سے ۰٫۲۱۱ × ل فاصلہ پر [illegible] ہوتی ہیں

۸۔۔۔ اگر ایک یکساں [illegible] سلاخ [illegible] سروں [illegible] نقطہ کو [illegible] دونوں سروں کی ہمواری [illegible] اوپر [illegible] تو ثابت کرو کہ [illegible]

$$[illegible]$$

ہوگا [illegible] جھکاؤ کے سہارا [illegible] $\frac{[illegible]}{۶}$ $\frac{1}{24}$ [illegible] ہوں گے [illegible] سلاخ کا طول ل ہے، و اس کا وزن ہے اور ک اس کے خماؤ کی استوار [illegible] ہے

۹۔۔۔ ایک شہتیر کی تراش یکساں ہے اس کے سروں کو دو دیواروں میں [illegible] فاصلہ ل ہے انقادفون کیا گیا ہے ایک دیوار فاصلہ صہ میں سے اس طرح بیٹھ جاتی ہے کہ سروں کے متوازی الافق رہنے میں کوئی فرق نہیں پڑتا۔ ثابت کرو کہ [illegible]

کی وجہ سے بڑے سے بڑا دباؤ جو پیدا ہوتا ہے وہ $\frac{3\,ل\,د\,صہ}{ل^2}$ ہے جہاں د گاڈر کی گہرائی ہے اور لہ حسبِ معمول ینگ کا مقیاسِ لچک ہے۔

۱۰۔۔۔ ایک مسلسل شہتیر کی تراش یکساں ہے اور یہ یکساں ہمواری کے چار سہاروں پر قائم ہے جن سے شہتیر ۱۰۰ فٹ کے تین مساوی فصلوں میں منقسم ہو جاتا ہے۔ گاڈر کا وزن ۲ ٹن فی فٹ ہے۔ تمام گاڈر کے لئے پیمانہ کے مطابق جھکاؤ کے معیار اثر کا منحنی کھینچو اور ہر ایک سہارے پر کا دباؤ محسوب کرو۔

(۰، ۲۲۰، ۲۲۰، ۸۰ ٹن وزن)

۱۱۔۔۔ ایک وزنی لچکدار سلاخ چار ہمواری سہاروں پر جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں سہارا ہوئی ہے۔ ان چار سہاروں میں سے دو سلاخ کے سروں پر واقع ہیں اور دوان سروں سے متساوی الفصل متوازن ہیں۔ جب سلاخ اپنے وزن [illegible] تو سہاروں پر کے دباؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ سلاخ کا دباؤ سروں پر کے سہاروں پر معدوم ہو جائے گا جبکہ کسی اندرونی سہارے کا فرق [illegible] سے واسطہ سلاخ سے [illegible] تقریباً ۰۱۴۳ گنا سے کم ہو۔

۱۲۔۔۔ ایک [illegible] ایک ہی افقی خط پر چار سہاروں [illegible] ب ج [illegible] [illegible] زور کے منحنی [illegible] اور ہر انقلاب [illegible] کرو۔

۱۳۔۔۔ ایک یکساں سلاخ (جس کا طول ۲ ل ہے، وزن ۶ ۱ و اور خماؤ کی استواریت ک ہے) کو اس کے دو سروں أ اور د پر اور ہر دو نقاط تثلیث ب اور ج پر اس طرح سہارا دیا ہے کہ سب سہاروں پر دباؤ مساوی ہیں اور سلاخ کو أ اور د پر اس طرح ساکن کیا گیا ہے کہ ان نقطوں پر کے مماس متوازی الافق ہیں۔ ثابت کرو کہ أ اور د کی بلندی ب اور ج کے اوپر $\frac{2\,و\,ل^3}{3\,ک}$ ہے اور أ ب اور ج د کے وسطی نقطے انعطاف کے نقطے ہیں اور ب اور ج پر انحنا بغیر تبدیل علامت معدوم ہو جاتا ہے۔

۱۴ — ایک وزنی یکساں خفیف طور پر لچکدار سلاخ پانچ سہاروں کے مقاموں پر جو سب کے سب ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں ساکن ہے۔ دو سہارے سلاخ کے سروں پر واقع ہیں ایک سہارا وسطی نقطہ پر ہے اور دو وسطی نقطہ اور سروں کے درمیانی فاصلہ کی تنصیف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ سہاروں کے نقاط پر کے دباؤ نسبت ۱۱ : ۲۶ : ۳۲ میں ہیں۔

نیز ثابت کرو کہ مرکز پر جھکاؤ کا معیار اثر $\frac{و ل}{۵۶}$ ہے اور اس کے قریب کے سہاروں کے مقاموں پر جھکاؤ کا معیار اثر $\frac{۳ و ل}{۱۱۲}$ ہے جہاں و سلاخ کا وزن ہے اور ۴ ل سلاخ کا طول ہے۔

۱۵ — ایک تار جس کی تراش یکساں اور سندیر ہے اور جو ابتداءً سیدھا تھا سروں پر کے دو سہاروں پر ساکن ہے ثابت کرو کہ اگر کسی تراش پر ریشوں کا بڑے سے بڑا تناؤ ت ہو تو جھکاؤ کا جفت $\frac{۱}{۴} \pi ر^۳ ت$ ہوگا اور نیز اگر ۲ ا سہاروں کے مقاموں کا درمیانی فاصلہ ہو تو تار کے مرکز سے فاصلہ لا پر تناؤ

$$ت = و \frac{ا^۲ - لا^۲}{ا ر}$$

ہوگا جہاں و اسی کثافت کے ایسے تار کا وزن ہے جس کی تراش کا رقبہ اکائی ہے۔

۱۶ — ایک یکساں خفیف سی لچکدار سلاخ کا وزن و ہے یہ سلاخ اس طرح ساکن ہے کہ اس کا وسطی نقطہ ایک سہارے کے مقام پر ہے۔ اس کے سروں کے ساتھ ایک سی وزنی وَ باندھی گئی ہے جو زنجیرہ کی شکل میں لٹک رہی ہے ثابت کرو کہ سلاخ کے سروں پر انصراف نسبت

$$۱ + \frac{۸}{۳} \frac{وَ}{و} : ۱$$

میں بڑھ جائیگا۔

۱۷ — ایک تین قبضوں والے محراب کے پایوں اور چوٹی پر ایک ایک قبضہ ہے اس کی شکل نصف دائرہ کی ہے محراب کے پایوں کا درمیانی فاصلہ ۵۰ فٹ اور چوٹی کی بلندی پایوں سے ۲۵ فٹ ہے۔ اس محراب کے دائیں نصف پر افقاً یکساں طور پر تقسیم کیا ہوا

۲۵ ٹن کا وزن ہے۔ بتاؤ کہ محراب کے دو نصف حصوں پر جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کس طرح کھینچنے چاہئیں۔

۱۸ ـــ ایک فرش پر بہت سی مساوی الفصل میخیں ایک خط مستقیم میں گاڑی گئی ہیں ہر دو متصل میخوں کا درمیانی فاصلہ ا ہے اور ایک پتلی یکساں سلاخ کو جو قدرتی طور پر سیدھی ہے ان کے درمیان اندر اور باہر موڑا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر سلاخ اور متواتر میخوں کے درمیان دباؤ $سا_۱$، $سا_۲$ ... ہوں تو

$$سا_{ن-۱} - ۴ سا_ن + سا_{ن+۱} = ۴۸ \text{ لہ مج ج } ا^{-۳}$$

جہاں ج میخ کی موٹائی ہے / لہ ینگ کا مقیاس لچک ہے اور مج سلاخ کی عمودی تراش کے رقبہ کا تراش کے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی خط کے گرد جمود کا معیار اثر ہے۔

۱۹ ـــ ایک یکساں طور پر وزنی خفیف سی لچکدار سلاخ اب کا طول ۲ج ہے یہ تین سہاروں پر ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ سلاخ قوی ترین ہوگی یعنی اس کے ہر مقام پر ٹوٹنے کا امکان کم سے کم ہوگا اگر ایک سہارے کو مرکز پر رکھا جائے اور باقی دو سہاروں کو مرکز سے فاصلوں $\frac{۶-\sqrt{۶}}{۵}$ ج پر رکھا جائے۔

۲۰ ـــ ایک آسانی سے ٹوٹ جانے والا مستدیر حلقہ زمین پر اس طرح ساکن ہے کہ اس کی سطح انتصابی ہے۔ ثابت کرو کہ حلقہ کے وزن کی وجہ سے ٹوٹنے کا معیار اثر جس مقام پر بڑے سے بڑا ہے اس کا زاوی فاصلہ راس سے طہ ہے جہاں مس طہ + طہ = ۰۔

## ۳۳۳ ـــ ایک سلاخ یا تار کو جھکانے میں دباؤ کے جفتوں کا کام۔

فرض کرو کہ ن نَ سلاخ کی قوس مف س ہے اور اسکے آخری جھکے ہوئے محل میں سروں پر کے مماسوں کے درمیان زاویہ سما بنتا ہے۔ لہذا ن پر دباؤ کا جفت $= \frac{\text{لہ مج}}{ر} = \frac{\text{لہ مج}}{\text{مف س}}$ سما جہاں ر نصف قطر انحنا ہے۔

ابتدائی سیدھی شکل اور آخری جھکی ہوئی شکل کے درمیان کسی محل میں فرض کرو

کہ اس قوس مف س کے سروں پر کے ماسوں کے درمیان زاویہ فہ بنتا ہے

لہٰذا متناظر دباؤ کا جفت $\frac{\text{لہ مج}}{\text{مف س}} \times$ فہ ہوگا۔

اب اگر فہ بڑھ کر فہ + مف فہ ہو جائے تو اس جفت کے خلاف جو کام

کیا گیا وہ = $\frac{\text{لہ مج}}{\text{مف س}} \times$ فہ $\times$ مف فہ [دفعہ ۹۷]

پس کل کام جو اس قوس پر ہوا جبکہ فہ صفر سے بڑھ کر سا ہو جائے

$$= \int_{\text{ب}}^{\text{سا}} \frac{\text{لہ مج}}{\text{مف س}} \times \text{فہ فرفہ} = \frac{1}{2} \frac{\text{لہ مج}}{\text{مف س}} \times \text{سا}^2 = \frac{1}{2} \frac{\text{لہ مج}}{\text{ر}^2} \text{مف س}$$

پس سلاخ پر جو کل کام ہوا وہ $= \int \frac{1}{2} \frac{\text{لہ مج}}{\text{ر}^2}$ مف س

یہاں تکمل پورے طول پر کرنا چاہیئے۔

اگر سلاخ ابتداءً سیدھی نہ ہوتی بلکہ اس کا انحنا ن پر $\frac{1}{\text{ر}_1}$ ہوتا

جہاں $\frac{1}{\text{ر}_1} = \frac{\text{سا}_1}{\text{مف س}}$

تو دباؤ کا جفت $= \frac{\text{لہ مج}}{\text{مف س}} (\text{فہ} - \text{سا}_1)$

اور کل کام $= \int_{\text{ب}}^{\text{ل}} \left[ \int_{\text{سا}_1}^{\text{سا}} \frac{\text{لہ مج}}{\text{مف س}} (\text{فہ} - \text{سا}_1) \text{فرفہ} \right]$

$$= \int_{\text{ب}}^{\text{ل}} \frac{\text{لہ مج}}{2\,\text{مف س}} \left[\text{سا} - \text{سا}_1\right]^2 = \int_{\text{ب}}^{\text{ل}} \frac{\text{لہ مج}}{2} \left(\frac{1}{\text{ر}_1} - \frac{1}{\text{ر}}\right)^2 \text{فرس}$$

## مثالیں

۱۔ طول ا کی ایک سلاخ کی شکل زنجیرہ کی ہے جس کا مبدل ا ہے اور سلاخ کا ایک سرا

راس پر ہے اس سلاخ کو موڑ کر نصف قطر ا کے ایک دائرے کے قوس کی شکل میں لایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ دباؤ کے جفت کے خلاف جو کام کرنا پڑا ہے وہ $\frac{ک}{۱۶ ا}\left[۱۰ - ۳\pi\right]$ ہے جہاں ک سلاخ کے ہر ایک نقطہ پر خماؤ کی استواریت کی قدر ہے۔

زنجیرہ کے لئے س = ا مس سا جس سے $ر = \frac{فس}{فسا} = ا\,قط^۲\,سا = \frac{س^۲ + ا^۲}{ا}$

نیز $ر_۰ = ا$

$$\therefore \quad \text{کام جو کرنا پڑا وہ} = \frac{ک}{۲}\int_۰^{ا}\left[\frac{۱}{ا} - \frac{ا}{س^۲ + ا^۲}\right]^۲ فس$$

$$= \frac{ک}{۲ا}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\left[قط^۲ سا - ۲ + جم^۲ سا\right] فسا$$

س = ا مس سا رکھنے سے

$$= \frac{ک}{۲ا}\left[مس\,سا - \frac{۳ سا}{۲} + \frac{۱}{۴} جب\,۲ سا\right]_۰^{\frac{\pi}{۴}}$$

$$= \frac{ک}{۱۶ ا}\left(۱۰ - ۳\pi\right)$$

۲۔ ایک یکساں سلاخ جس کا طول ۲ ا اور وزن و ہے ایک چکنے افقی میز پر پڑی ہے۔ سلاخ کو اس کی وسطی تراشش پر قوت لگا کر اٹھایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جب اس کے سرے میز پر سے عین اٹھنے کو ہوں تو اس کے مرکز کی اونچائی سروں کے اوپر $\frac{و ا^۳}{۱۶ ا مج لہ}$ ہوگی۔ اور جو کام سرانجام پائیگا وہ $\frac{و^۲ ا^۳}{۲۰ لہ مج}$ ہوگا۔

۳۔ ایک یکساں وزنی سلاخ جس کا طول ل اور وزن و ہے ابتداءً سیدھی ہے اور اس کو اس کے سروں پر سہارا گیا ہے سلاخ اپنے وزن کے زیر عمل جھک جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ اس کو جھکانے میں جاذبہ ارض نے $\frac{و^۲ ل^۳}{۲۴۰ مج لہ}$ کام کیا ہے۔

۴ ۔۔۔ ایک سیدھے تار کو جس کا طول ۲ π ا ہے ایک پہیہ کے کنارے کے گرد موڑا گیا ہے اگر پہیہ کا نصف قطر ا ہو تو ثابت کرو کہ جھکانے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ $\frac{\pi\,\text{ک}}{\text{ا}}$ ہے۔

۵ ۔۔۔ ایک تار کو جس کا طول ۲ ل ہے ایک زنجیرہ کی شکل میں موڑا گیا ہے۔ زنجیرہ کا مبدل ج ہے۔ ثابت کرو کہ موڑنے میں

$$\frac{\text{ک}}{\text{۳ج}}\left(\text{ماس}^{-1}\frac{\text{ل}}{\text{ج}} + \frac{\text{ل ج}}{\text{ل}^{2}+\text{ج}^{2}}\right)$$

کام کرنا پڑتا ہے

۶ ۔۔۔ ایک وزنی تحقیقت طور پر لچکدار تار کے ایک سرے کو جو ایک ربع دائرہ کی شکل کا ہے ایک انتصابی دیوار میں اس طرح ثابت کیا گیا ہے کہ تار کی سطح مستوی انتصابی ہے اور ثابت سرے پر تار کا ماس افق کے متوازی ہے۔ یہ فرض کرکے کہ کسی نقطہ پر انحنا کی تبدیلی اس نقطہ پر جھکانے والے جفت کے معیار اثر کے متناسب ہے ثابت کرو کہ آزاد سرے پر افقی انحراف $\frac{\pi}{8}\,\frac{\text{و ا}^{4}}{\text{ک}}$ ہے جہاں ک نماؤ کی استواریت ہے، و تار کے اکائی طول کا وزن ہے اور ا دائرہ کا نصف قطر ہے۔

۷ ۔۔۔ ایک یکسان سخت تار کا وزن π و ا، اور نماؤ کی استواریت ک ہے۔ اس کی قدرتی شکل ایک نصف دائرہ کی ہے جس کا نصف قطر ا ہے۔ اس کو ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کے سرے ایک افقی میز پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ تار جو شکل اختیار کرتا ہے اس کی ذاتی مساوات تقریباً یہ ہے

$$\text{س} = \text{ا فہ} + \text{و ا}^{4}\,\text{ک}^{-1}\left\{\tfrac{1}{2}\pi\,\text{فہ} + \text{فہ جم فہ} - \text{۲ جب فہ}\right\}$$

جہاں س کو بلند ترین مقام سے ناپا گیا ہے۔

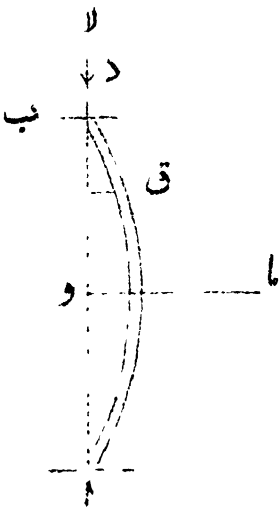
۸ ۔۔۔ ایک سخت تار کی ابتدائی شکل نصف دائرہ ہے جس کا نصف قطر ا ہے۔ اس کو انتصابی مستوی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ سرے افقی میز پر ہیں ثابت کرو کہ منحنی کی ذاتی مساوات تقریباً یہ ہے $\text{س} = \text{ا فہ} + \frac{\text{و ا}^{4}}{\text{ک}}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \text{فہ}\right)\text{جم فہ} + \text{۲ جب فہ} - \frac{\pi}{2}\right]$

جہاں و فی اکائی قوس وزن ہے ک خماؤ کی استواریت اور یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ $\frac{\text{و}\,\text{ا}^3}{\text{ک}}$ بہت چھوٹی مقدار ہے۔

## ۴۴۳۔ لمبے ستونوں کا جھکاؤ۔

فرض کرو کہ ایک ستون یا فشاربند سلاخ ایسی ہے کہ اس کا طول اس کی تراش کے ابعاد کے مقابلہ میں بہت بڑا ہے۔ نیز ستون یکساں طاقت کا ہے اور ابتداءً سیدھا ہے۔

اس کو سیدھا کھڑا کیا گیا ہے اور اس کے اوپر کے سرے پر دباؤ د ڈالا گیا ہے یہ فرض کرکے کہ انصراف بہت چھوٹا ہے ستون کی شکل معلوم کرنا مقصود ہے۔




ستون کے زمین والے سرے اور دباؤ کے نقطۂ عمل کے درمیان وسطی نقطہ کو مبدا فرض کرو اور وما اور ولا کو بالترتیب افقی اور انتصابی محور فرض کرو۔

اگر ستون کا وزن دباؤ د کے مقابل میں چھوٹا ہو تو تعادل کی مساوات ہے

$$-\text{لہ مج}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}=\frac{\text{لہ مج}}{\text{ر}}=\text{د}\times\text{ما}$$

یعنی $$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}=-\frac{\text{د}}{\text{لہ مج}}\,\text{ما}$$

$$\therefore\ \text{ما}=\text{ا}\ \text{جم}\left[\text{لا}\sqrt{\frac{\text{د}}{\text{لہ مج}}}\right]+\text{ب}\ \text{جب}\left[\text{لا}\sqrt{\frac{\text{د}}{\text{لہ مج}}}\right]\qquad(1)$$

جہاں ا اور ب اختیاری مستقل ہیں۔

تشاکل سے ظاہر ہے کہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}=0$ جبکہ لا $=0$۔ اس لئے ب $=0$۔

اب فرض کرو کہ ستون کے سرے گول کر دئے گئے ہیں تاکہ سروں پر کے مماس کوئی سی سمت اختیار کر سکتے ہیں، لیکن چونکہ سرِ ل پر کوئی جفت کام نہیں کر رہا ہے اس لئے $\frac{لہ مج}{ر}$ اور بناءً علیہ $\frac{ف^2 ما}{ف لا^2}$ ہر سرے پر صفر ہے یعنی $\frac{ف^2 ما}{ف لا^2} = ۰$

جبکہ $لا = \pm \frac{ل}{۲}$ جہاں ل ستون کا طول ہے۔

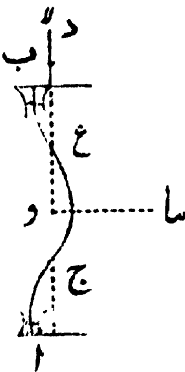
$$\therefore \quad ۱ جم \left[ \frac{ل}{۲} \sqrt{\frac{د}{لہ مج}} \right] = ۰$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{ل}{۲} \sqrt{\frac{د}{لہ}} = \frac{\pi}{۲} \quad \text{جس سے} \quad د = \frac{\pi^2 \, لہ مج}{ل^2}$$

اس سے ہمیں سرے پر کے اس وزن کی مقدار معلوم ہو جاتی ہے جو ایک دفعہ خم پیدا ہو جانے کے بعد ستون کو جھکی ہوئی حالت میں رکھنے کے لئے کافی ہے۔

اگر د اس قیمت سے بڑھ جائے تو ستون ٹوٹ جائے گا۔

چونکہ مستدیر ستون کی صورت میں مج کی قیمت قطر کی چوتھی قوت کے تناسب ہوتی ہے اس لئے (۲) کی مدد سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک ہی مادہ سے بنے ہوئے ستونوں کے لئے سرے پر کا بڑے سے بڑا ممکن دباؤ قطر کی چوتھی قوت کے بالراست اور ستون کے طول کے مربع کے بالعکس بدلتا ہے۔ لمبے ستون یا فشاربند سلاخ کے جھکاؤ کے بارے میں اس کلیہ کو یولر کا کلیہ کہتے ہیں۔




**۵۳۳۔** دفعہ ماقبل میں اگر سرے ا اور ب ثابت ہوں اور بناءً علیہ ان پر کے مماس انتصابی ہوں تو حل مختلف ہوگا۔ سرے ب پر ایک جفت گ لہ عمل کریگا اس جفت اور ب پر عمل کرنے والے دباؤ د کا حاصل ایک متوازی قوت د ہوگی جو شکل میں دکھائی گئی ہے۔ اگر اسکے خطِ عمل کو محور لا مانا جائے تو تعادل کی مساوات

دفعہ ماقبل کی مانند حاصل ہوتی ہے اور ان کا حل بھی ویسا ہی ہے یعنی مساوات (۱)

اس صورت میں فرض کرو کہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۰$ جبکہ لا = ۰ یا $\pm \frac{ل}{۲}$

اس لئے ب = ۰ اور ۰ = ۰ اجب $\left[\frac{ل}{۲}\sqrt{\frac{د}{لہ مج}}\right]$

$\therefore \frac{ل}{۲}\sqrt{\frac{د}{لہ مج}} = \pi$ اس لئے $د = \frac{۴ \pi^۲ لہ مج}{ل^۲}$

اس ستون کا تعدیلی خط جھکاؤ کے بعد جس منحنی کی شکل اختیار کرتا ہے اس کی مساوات ہے

$$ما = ا جم \frac{۲ \pi لا}{ل}$$

اس لئے نقاط انعطاف ہیں جہاں $\frac{\text{فر}^۲ ما}{\text{فر لا}^۲} = ۰$ یعنی جہاں لا = $\pm \frac{ل}{۴}$ -

یہ نقطے ج اور ع ہیں اور اس خط پر واقع ہیں جو ب پر کے جفت اور دباؤ کی مماثل قوت کا خطِ عمل ہے -

**۳۳۶- دھروں کی محوری گردش-** فرض کرو کہ ایک پتلا اسطوانی انتصابی دھرا اپنی چولوں میں محور کے گرد گھوم رہا ہے - اگر گھماؤ کی زاویائی رفتار کافی زیادہ ہو تو یہ پہلو کی جانب جھکنے کا میلان رکھے گا -




فرض کرو کہ جھکاؤ کا معیار اثر گ ا ہے اور نیچے کی چول و پر افقی دباؤ س ہے - نیز چونکہ کسی نقطہ (لا ، ما) پر مرکز گریز قوت $\pi ا^۲ م س^۲ ما$ فرلا ہے، جہاں دھرے کا نصف قطر ا اور کثافت م ہے اور چونکہ یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ انصراف بہت تھوڑا ہے اور فرلا اور فرس تقریباً مساوی ہیں اس لئے

تعادل کی مساوات ہے

$$\text{لہ مج}\ \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} = \text{گ} - \text{س} \times \text{لا} + \pi\, \text{ا}^{2}\, \text{مر سہ}^{2} \int_{\text{ب}}^{\text{لا}} \text{ما}\ \text{فرلَا}\ (\text{لا} - \text{لَا}) \quad \ldots (1)$$

لا کے لحاظ سے دو دفعہ تفرق کرنے سے

$$\text{لہ مج}\ \frac{\text{فر}^{3}\text{ما}}{\text{فرلا}^{3}} = \pi\, \text{ا}^{2}\, \text{مر سہ}^{2} \int_{\text{ب}}^{\text{لا}} \text{ما}\ \text{فرلَا} - \text{س}$$

اور
$$\text{لہ مج}\ \frac{\text{فر}^{4}\text{ما}}{\text{فرلا}^{4}} = \pi\, \text{ا}^{2}\, \text{سہ}^{2}\ \text{ما مر}$$

$$\therefore\ \frac{\text{فر}^{4}\text{ما}}{\text{فرلا}^{4}} = \frac{\pi\, \text{ا}^{2}\, \text{مر سہ}^{2}}{\text{لہ}\ \pi\, \text{ا}^{2} \times \frac{\text{ا}^{2}}{4}}\ \text{ما} = \frac{4\ \text{مر سہ}^{2}}{\text{لہ ا}^{2}}\ \text{ما} = \frac{\text{مہ}^{4}}{\text{ل}^{4}}\ \text{ما}\quad \text{فرض کرو} \quad \ldots (2)$$

اس مساوات کا حل ہے

$$\text{ما} = \text{ا جم}\frac{\text{مہ لا}}{\text{ل}} + \text{ب جب}\frac{\text{مہ لا}}{\text{ل}} + \text{ج جمز}\frac{\text{مہ لا}}{\text{ل}} + \text{د جبنز}\frac{\text{مہ لا}}{\text{ل}} \quad \ldots (3)$$

فرض کرو کہ دُھرا و اور ا پر اس طرح سہارا ہوا ہے کہ سرے اس جگہ پر انتصابی ہیں

یعنی جب لا = ۰ تو ما = ۰ اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = 0$

$$\therefore\ \text{ما} = \text{ا}\left[\text{جم}\frac{\text{مہ لا}}{\text{ل}} - \text{جمز}\frac{\text{مہ لا}}{\text{ل}}\right] + \text{ب}\left[\text{جب}\frac{\text{مہ لا}}{\text{ل}} - \text{جبنز}\frac{\text{مہ لا}}{\text{ل}}\right] \quad \ldots (4)$$

نیز جب لا = ل تو ما اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ دونوں صفر ہوتے ہیں

$$\therefore\ 0 = \text{ا}\left[\text{جم مہ} - \text{جمز مہ}\right] + \text{ب}\left[\text{جب مہ} - \text{جبنز مہ}\right]$$

اور
$$0 = \text{ا}\left[-\text{جب مہ} - \text{جبنز مہ}\right] + \text{ب}\left[\text{جم مہ} - \text{جمز مہ}\right]$$

$$\therefore \frac{\text{جم مہ} - \text{جمز مہ}}{\text{جب مہ} - \text{جبز مہ}} = \frac{\text{جب مہ} + \text{جبز مہ}}{\text{جمز مہ} - \text{جم مہ}} = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}} \quad .. \; .. \; (۵)$$

$$\therefore \left(\text{جم مہ} - \text{جمز مہ}\right)^{۲} + \text{جب}^{۲}\,\text{مہ} - \text{جبز}^{۲}\,\text{مہ} = ۰$$

$$\therefore \text{جم مہ جمز مہ} = ۱ \quad .. \; .. \; .. \; .. \; .. \; (۶)$$

اس مساوات سے مہ کی قیمت معلوم ہوتی ہے اور اس لئے (۵) سے $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ کی قیمت معلوم ہوتی ہے اور بناءً علیہ منحنی (۴) کی شکل معلوم ہوتی ہے۔

لیکن (۲) سے $\frac{۴\,\text{ھ مر مہ}^{۲}}{\text{لہ}\;\text{ا}^{۲}} = \frac{\text{مہ}^{۲}}{\text{ل}^{۲}}$ اس لئے $\text{س} = \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{مہ}^{۲}}{\text{ل}^{۲}}\sqrt{\frac{\text{لہ}}{\text{مر}}}$ جس سے مطلوبہ زاوئی رفتار معلوم ہوتی ہے۔ اگر س اس قیمت سے بڑا ہو تو دھرا اور زیادہ جھکتا چلا جائیگا۔ جم مہ اور قطز مہ کے منحنیوں کو مرتسم کرنے سے ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ (۶) کا حل تقریباً $\frac{۳\pi}{۲}$ ہے، اب اگر $\text{مہ} = \frac{۳\pi}{۲} + \text{صہ}$ رکھا جائے جہاں صہ چھوٹا ہے تو (۶) سے دوسرے درجہ کا تقریبی حل حسب ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\text{صہ} = \frac{۱}{\text{جمز}\,\frac{۳\pi}{۲}} = \frac{۱}{۵۵\text{ء}۷} = \text{ء}۰۱۸ \quad \text{جدولوں سے}$$

$$\therefore \text{مہ} = \frac{۳\pi}{۲} + \text{ء}۰۱۸ = ۴\text{ء}۷۳ \qquad \text{دوسرا تقریبی حل}$$

(۵) میں درج کرنے سے $\frac{\text{ب}}{\text{ا}} = -\text{ء}۹۸$ تقریباً

اب (۴) سے اس منحنی کی مساوات حاصل ہوتی ہے جو شکل دھرا اختیار کرتا ہے

فولاد کے لئے لہ = تقریباً $۳ \times ۱۰^{۷}$ پونڈ وزن فی مربع انچ ہے اور مر = تقریباً ۴۸۰ پونڈ فی مکعب فٹ ہے۔

۷۴۴۔ دفعۂ ماقبل میں فرض کرو کہ شہتیر کے سروں کو انتصابی سمت میں رکھنے کے لئے کوئی پابندی نہیں ہے بلکہ دھرے کے سروں کو صرف آزادانہ طور پر ٹکا دیا گیا ہے لہٰذا $\frac{\text{فز م}}{\text{فز لا}}$ سروں پر صفر نہ ہوگا لیکن $\frac{\text{فز}^2\text{م}}{\text{فز لا}^2}$ صفر ہوگا کیونکہ جھکاؤ کا معیار اثر ہر دو سروں پر صفر ہے۔

اس صورت میں جھکاؤ کا معیار اثر گ صفر ہے۔ مساوات (۲) حسب سابق ہے اور اس کا حل ہے

$$\text{م} = \text{ا}_1\,\text{جم}\frac{\text{مہ لا}}{\text{ل}} + \text{ب}_1\,\text{جب}\frac{\text{مہ لا}}{\text{ل}} + \text{ج}_1\,\text{جمز}\frac{\text{مہ لا}}{\text{ل}} + \text{د}_1\,\text{جبز}\frac{\text{مہ لا}}{\text{ل}}$$

جبکہ $\text{لا} = 0$ تو $\text{م} = 0$ اور $\frac{\text{فز}^2\text{م}}{\text{فز لا}^2} = 0$

$$\therefore\ \text{ا}_1 + \text{ج}_1 = 0 \quad \text{اور} \quad -\frac{\text{مہ}^2}{\text{ل}^2}\times\text{ا}_1 + \frac{\text{مہ}^2}{\text{ل}^2}\times\text{ج}_1 = 0 \quad \text{یعنی}\ \text{ا}_1 = \text{ج}_1 = 0$$

اسی طرح جبکہ $\text{لا} = \text{ل}$ تو $\text{م} = 0$ اور $\frac{\text{فز}^2\text{م}}{\text{فز لا}^2} = 0$

$$\therefore\ 0 = \text{ب}_1\,\text{جب مہ} + \text{د}_1\,\text{جبز مہ}$$

$$0 = -\text{ب}_1\,\text{جب مہ} + \text{د}_1\,\text{جبز مہ}$$

$$\therefore\ \text{ب}_1\,\text{جب مہ} = \text{د}_1\,\text{جبز مہ} = 0$$

$$\therefore\ \text{مہ} = \pi \quad \text{اور} \quad \text{د}_1 = 0$$

$$\therefore\ \pi^4 = \text{مہ}^4 = \text{ل}^4 \times \frac{4\,\text{مہ سہ}^2}{\text{لہ و}^2}$$

جس سے سہ کی کم سے کم قیمت حاصل ہوتی ہے

$$\text{سہ} = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{\text{ل}^2}\sqrt{\frac{\text{لہ}}{\text{مہ}}}$$

نیز منحنی کی شکل اس صورت میں ہے $\text{ما} = \text{ب}_1 \text{ جب } \frac{\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}$ ۔

۳۴۸ ۔ ایک پتلے یکساں ستون کو انتصاباً کھڑا کیا گیا ہے ۔ بتاؤ کہ اس کی بلندی زیادہ سے زیادہ کتنی ہوسکتی ہے کہ یہ اپنے ہی وزن کے زیر عمل شکست نہ ہو جائے۔

اگر مبدا و کو ستون کے بالائی سرے پر لیا جائے، و لا کو انتصاباً نیچے کی طرف کھینچا جائے اور و ما کو متوازی الافق تو تعادل کی مساوات ہے

$$-\text{لہ مج}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = \int_0^{\text{لا}} \text{و فرضا}\,(\text{ما} - \text{عا})$$
جہاں و وزن ہے ستون کے اکائی طول کا اور جھکاؤ کو بہت چھوٹا فرض کیا گیا ہے۔

تفرق کرنے اور $\frac{\text{و}}{\text{لہ مج}} = \text{م}$ اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع}$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فرلا}^2} = -\text{م}\int_0^{\text{لا}} \text{ع فرضا} = -\text{م ع لا}$$

اگر $\text{لا} = \text{ی}^{\frac{2}{3}}$ اور $\text{ع} = \text{ی}^{\frac{1}{3}}\,\text{ت}$ رکھیں تو یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فر}^2\text{ت}}{\text{فری}^2} + \frac{1}{\text{ی}}\,\frac{\text{فرت}}{\text{فری}} + \text{ت}\left[\frac{4\text{م}}{9} - \frac{1}{9\text{ی}^2}\right] = 0$$

فرض کرو کہ $\text{ق}^2 = \frac{4\text{م}}{9} = \frac{4}{9}\,\frac{\text{و}}{\text{لہ مج}}$ اور $\text{ق ی} = \text{و}$

$$\text{تب}\quad \frac{\text{فر}^2\text{ت}}{\text{فرو}^2} + \frac{1}{\text{و}}\,\frac{\text{فرت}}{\text{فرو}} + \text{ت}\left[1 - \frac{1}{9\text{و}^2}\right] = 0$$

$$\therefore\quad \text{ت} = \text{ا}\,\text{جے}_{\frac{1}{3}}(\text{و}) + \text{ب}\,\text{جے}_{-\frac{1}{3}}(\text{و})$$

جہاں $\text{جے}_{\text{ن}}(\text{و})$ بیسل کا ن ویں رتبہ کا تفاعل ہے۔

$$\therefore\quad \text{ع} = \text{لا}^{\frac{1}{2}}\left[\text{ا}\,\text{جے}_{\frac{1}{3}}(\text{ق لا}^{\frac{3}{2}}) + \text{ب}\,\text{جے}_{-\frac{1}{3}}(\text{ق لا}^{\frac{3}{2}})\right]$$

اب $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = 0$ جبکہ لا = ۰ کیونکہ بالاترین نقطہ پر جھکاؤ کا معیار اثر صفر ہے۔

$$\text{نیز}\ \text{جے}_{\frac{1}{3}}\left(\text{ق لا}^{\frac{3}{2}}\right) = \text{ق}^{\frac{1}{3}}\ \text{لا}^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{\text{ق}^{2}\ \text{لا}^{3}}{2^{2}\times\frac{4}{3}} + \frac{\text{ق}^{4}\ \text{لا}^{6}}{\underline{|2}\times 2^{4}\times\frac{4}{3}\times\frac{7}{3}} \cdots\right]$$

$$\text{اور}\ \text{جے}_{-\frac{1}{3}}\left(\text{ق لا}^{\frac{3}{2}}\right) = \text{ق}^{-\frac{1}{3}}\ \text{لا}^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{\text{ق}^{2}\ \text{لا}^{3}}{2^{2}\times\frac{2}{3}} + \frac{\text{ق}^{4}\ \text{لا}^{6}}{\underline{|2}\times 2^{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{3}} \cdots\right]$$

$$\text{پس}\ \frac{\text{ف}}{\text{فلا}}\left[\text{ا لا}^{\frac{1}{2}}\ \text{جے}_{\frac{1}{3}}\left(\text{ق لا}^{\frac{3}{2}}\right)\right] = \text{اق}^{\frac{1}{3}}\quad \text{جبکہ لا} = ۰$$

$$\text{اور}\ \frac{\text{ف}}{\text{فلا}}\left[\text{ب لا}^{\frac{1}{2}}\ \text{جے}_{-\frac{1}{3}}\left(\text{ق لا}^{\frac{3}{2}}\right)\right] = ۰\quad \text{جبکہ لا} = ۰$$

اس لئے ا = ۰ کیونکہ $\frac{\text{فع}}{\text{فلا}} = ۰$ جبکہ لا = ۰

$$\therefore\ \text{ع} = \text{ب لا}^{\frac{1}{2}}\ \text{جے}_{-\frac{1}{3}}\left(\text{ق لا}^{\frac{3}{2}}\right)$$

لیکن ع = ۰ جبکہ لا = ل جہاں ل ستون کی بلندی ہے، کیونکہ ستون زمین میں انتصاباً نصب ہے

اس لئے $\text{جے}_{-\frac{1}{3}}\left(\text{ق ل}^{\frac{3}{2}}\right) = ۰$ ، اس مساوات سے ل حاصل ہوسکتا ہے۔

اس سے حاصل ہوتا ہے:۔

$$1 - \frac{3}{2}\ \frac{1}{2^{2}}\times\frac{4\text{م}}{9}\text{ل}^{3} + \frac{1}{\underline{|2}}\times\frac{1}{2^{4}}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{5}\left(\frac{4\text{م}}{9}\right)^{2}\text{ل}^{6}\ \cdots = ۰$$

$$\text{یعنی}\ 1 - \frac{\text{م ل}^{3}}{3\times 2} + \frac{\text{م}^{2}\ \text{ل}^{6}}{6\times 5\times 3\times 2} - \frac{\text{م}^{3}\ \text{ل}^{9}}{9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}\ \cdots = ۰$$

اس مساوات کا تقریبی حل یہ ہے م ل^۳ = ۷٫۸۴ یعنی $\text{ل}^{3} = 7.84 \times \frac{\text{لہ مجہ}}{\text{و}_1}$ جس سے ستون کی بڑی سے بڑی بلندی معلوم ہوتی ہے۔

اگر ہم ایک ٹھوس فولادی ستون لیں جس کا نصف قطر ایک فٹ ہو تو چونکہ فولاد کی کثافت ۴۸۰ پونڈ فی مکعب فٹ ہوتی ہے اور فولاد کے لئے $\text{لہ} = 3\times 10^{4}$ پونڈ وزن

فی مربع انچ ہے اسلئے مندرجہ بالا ضابطہ سے حاصل ہوگا ل = ۲۶۰ فٹ تقریباً۔

## مثالیں

۱۔ ایک سیدھی فولادی سلاخ کو جس کا طول ۲۰ فٹ اور قطر ایک انچ ہے انتصاباً کھڑا کیا گیا ہے اور اس کے سروں کو اس طرح ثابت کیا گیا ہے کہ ان پر کے مماس انتصابی ہیں۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا وزن جو سلاخ برداشت کرسکتی ہے تقریباً ۱۰۱۰ پونڈ ہے۔

۲۔ ایک سیدھی یکساں فولادی سلاخ جس کی تراش دائرہ ہے ۵ فٹ لمبی ہے۔ یہ دیکھا گیا ہے کہ اگر سلاخ کو سروں پر سادہ طرح ٹیکا جائے اور وسط میں ۲۰ پونڈ کا وزن سہارا جائے تو سلاخ ایک انچ جھک جاتی ہے اس سلاخ کو گول سرے والی انتصابی فشاربند سلاخ کی طرح استعمال کیا جائے تو زیادہ سے زیادہ کتنا وزن رکھا جاسکتا ہے

(جواب تقریباً ۲۴۷ پونڈ)

۳۔ ایک فولادی تکلے کو جس کا قطر $\frac{۳}{۴}$ انچ ہے دو ایسی چولوں کے اندر سہارا گیا ہے جس کی نشستیں کروی ہیں اور یہ فی منٹ تین ہزار چکر لگاتا ہے۔ بتاؤ کہ چولوں کے مرکزوں کے درمیان زیادہ سے زیادہ کتنا فاصلہ ہونا چاہیئے کہ تکلا گھومنے نہ پائے۔

(۱٫۲۱ فٹ تقریباً)

۴۔ ایک لمبی پتلی سلاخ ا ب کو انتصاباً نصب کیا گیا ہے اور اس کے سرے ب پر وزن و رکھا گیا ہے اور نیچے کے سرے کو انتصاباً قایم کردیا گیا ہے اگر سلاخ ذراسی لچکدار ہو اور اس کا طول ل ہو تو ثابت کرو کہ یہ سلاخ جس منحنی کی شکل اختیار کرتی ہے اس کی مساوات ہے

$$ما = ما_۱ \left[ ۱ - جم \frac{\pi\, لا}{۲ ل} \right]$$

جہاں ا مبدا ہے اور ما۱ ب کا افقی ہٹاؤ ہے اور $\frac{لہ\, جم}{و} = \frac{۴ ل^۲}{\pi^۲}$

نیز ثابت کرو کہ شہتیر نہیں جھکیگا اگر $و < \frac{\pi^۲\, لہ\, جم}{۴ ل^۲}$ ۔

اس سے اور دفعہ ۳۳۵ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلاخ جس کے دونوں سرے اس طرح

ثابت ہوں کہ اُن پر کے مماس انتصابی ہوں تو سلاخ اُس وزن کا ۲ اگنا سہار سکے گی جو وہ اس صورت میں سہارتی جبکہ صرف نیچے کا سرا انتصاباً ثابت ہے اور اوپر کا سرا گول ہو اور بنائے علیہ جانبی حرکت اختیار کرنے کے قابل]

۵ ـــ اگر دفعہ ۴۳۴ کے سوال میں نچلے سرے کو اس طرح ثابت رکھا جائے کہ اس کا مماس انتصابی ہے اور اوپر کے سرے پر ایسی قوت لگائی جائے کہ یہ ثابت نچلے سرے میں سے گزرنے والے انتصابی خط میں ہمیشہ رہے تو ثابت کرو کہ

$$\sqrt{\frac{د}{لہ جم}}\,ل = مس \left[\sqrt{\frac{د}{لہ جم}}\,ل\right] \text{ پس } \sqrt{\frac{د}{لہ جم}} \times ل = ۴{,}۴۹۳$$

اور اس لئے ثابت کرو کہ $د = ۲۰{,}۱۸۷ \times \frac{لہ جم}{ل^۲} = ۲{,}۰۴۵ \times \frac{\pi^۲ لہ جم}{ل^۲}$ تقریباً

۶ ـــ دفعہ ۴۳۶ کے سوال میں اگر دھرے کے ایک سرے کو انتصابی رکھا جائے اور دوسرے سرے کو آزادانہ طور پر سہارا جائے تو ثابت کرو کہ مہ کی قیمت مساوات مس مہ = مس ز مہ سے حاصل ہوتی ہے اور بنائے علیہ یہ تقریباً ۳٫۹۳ کے مساوی ہے۔

اگر دوسرا سرا بالکل آزاد ہو تو ثابت کرو کہ مہ کی قیمت مساوات جم مہ جم ز مہ = -۱ سے حاصل ہوتی ہے اور بنائے علیہ یہ تقریباً ۱٫۸۷۵ کے مساوی ہے۔ اس صورت میں جزئی زور اور نیز جھکاؤ کا معیار اثر دوسرے سرے پر صفر ہے، لہذا $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲}$ اور $\frac{فر^۳ ما}{فر لا^۳}$ دونوں صفر ہیں]

۷ ـــ اگر ایک یکساں مادہ کی ایک کمان بنائی جائے تو ثابت کرو کہ رسی کو کھینچنے سے اس کی ذاتی مساوات یہ ہوتی ہے $\frac{فر س}{فر ف} \sqrt{جب^۲ \frac{عہ}{۲} - جب^۲ \frac{ف}{۲}} = ا\ جب \frac{عہ}{۲}$

اگر کمان صرف خفیف طور پر لچکدار اور اگر اس کا طول ۲ ل اور رسی کا طول ۲ ا ہو جہاں ل اور ا تقریباً مساوی ہیں تو ثابت کرو کہ یہ جیبی منحنی کی شکل اختیار کرتی ہے اس کی مساوات ہے $ما = \frac{۴\sqrt{ا(ل-ا)}}{\pi}\ جب\ \frac{\pi لا}{۲ ا}$ ہے اور رسی کا تناؤ $\frac{\pi^۲ لہ جم}{۴ ا^۲}$ ہے

۸ ـــ ایک افقی بریکٹ جس کا طول ا ہے ایک انتصابی ستون کے اوپر کے سرے

پر لگایا گیا ہے ستون کی بلندی ل ہے اور ستون کا نچلا سرا زمین کے اندر مدفون ہے۔ جب شکنجہ کے سرے پر وزن و ہو تو ستون تھوڑا سا جھک جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ ستون کے خماؤ کی وجہ سے (خواہ بریکٹ کا طول کچھ ہی ہو) قاعدہ پر جھکاؤ کا معیار اثر

بنسبت قط $\left(\sqrt{\frac{و}{لہ\ بج}} \times ل\right)$ میں بڑھ جاتا ہے جہاں لہ ینگ کا مقیاس ہے اور جہ

تراش کا جمود کا معیار اثر اس خط کے گرد ہے جو تراش کے مرکز میں سے جھکاؤ کی سطح مستوی پر عمود وار کھینچا جائے۔

۹۔ ایک سیدھا شہتیر جس کی تراش یکساں ہے بچک جانے والے مادہ کی ایک افقی تہ پر رکھا گیا ہے شہتیر کے اس نقطہ پر جہاں گہراؤ ما انچ ہے یہ دیکھا گیا ہے کہ شہتیر اور تہ کے درمیان دباؤ (ک ما) ٹن فی انچ طول ہے۔

اگر شہتیر کے اس نقطہ پر جس کا فاصلہ شہتیر کے دونوں سروں سے مساوی ہے و ٹن وزن رکھا جائے تو ثابت کرو کہ دباؤ کی تقسیم $\frac{1}{2}$ عہ و و$^{-عہ\ لا}$ [جم عہ لا + جب عہ لا]

ٹن فی انچ طول ہے جہاں لا کو وزن کے نقطہ سے ناپا گیا ہے اور عہ = $\sqrt[4]{\frac{ک}{۴\ لہ\ بج}}$ اور تعدیلی محور کے گرد شہتیر کی تراش کا جمود کا معیار اثر بج ہے اور لہ شہتیر کے مادہ کے لئے بچک کا مقیاس ہے۔

# اصطلاحات

## سکونیات اعلیٰ

| | |
|---|---|
| Angle of repose | ٹھہراؤ کا زاویہ |
| Astatic equilibrium | اچل توازن |
| Attraction | کشش |
| Ball and socket | گولہ گردانک |
| Bending moment | جھکاؤ کا معیار اثر |
| Binormal | ثنائی عماد |
| Brake | بریک |
| Breaking tension | توڑنے والا تناؤ |
| Cardiod | خط صنوبری، قلب |
| Catenary | زنجیرہ |
| Central axis | مرکزی محور |
| Centrifugal | مرکز گریز |
| Chain wheel | زنجیر پہیہ |
| Circle ef inflexions | انعطافوں کا دائرہ |
| Circle of stability | قائمیت کا دائرہ |
| Coefficient of friction | رگڑ کی قدر |

| | |
|---|---|
| Composition | ترکیب |
| Compression | پچکاؤ |
| Concentric | ہم مرکز |
| Configuration | روپ۔ تشکیل |
| Constrained bodies | مقید اجسام |
| Couple | جفت |
| Curvature | انحنا |
| Cyclical order | مستدیر ترتیب |
| Cycloid | خط تدویر |
| Cylindroid | اسطوانہ نما |
| Deflection | انصراف |
| Differential pulley | فرقی چرخی |
| Displacement | ہٹاؤ |
| Dyname | حرکیہ |
| Dynamics | حرکیات |
| Eccentric | خارج المرکز |
| Eccentricity | خروج المرکز |
| Effort | طاقت |
| Element | عنصر |
| Equilibrium | تعادل۔ توازن |
| Equipotential surfaces | مساوی تود سطحیں |
| Extension | کھنچاؤ |
| Flexural rigidity | خمیاؤ کی استواریت |
| Frame work | قالب۔ ڈھانچہ |
| Friction | رگڑ |

| | |
|---|---|
| Fulcrum | نصاب |
| Funicular polygon | رسیمانی کثیرالاضلاع |
| Generator | مکون |
| Groove | نالی |
| Helix | مرغولہ |
| Hinges | قبضے |
| Horse-power | اسپی طاقت |
| Hypocycloid | درتدویر |
| Inclined plane | سطح مائل |
| Indicator Diagram | مظہار نقشہ |
| Invariants | غیر متغیرہ |
| Keel | پیندا |
| Lamina | پترا |
| Lemniscate | اشٹیرن، چشمہ شمسی |
| Like (forces) | موافق (قوتیں) |
| Limiting friction | انتہائی رگڑ |
| Lines of force | قوت کے خط |
| Mechanical advantage | حیلی فائدہ |
| Modulus | مقیاس |
| Moment | معیار اثر |
| Neutral line | تعدیلی خط |
| Normal | عماد |
| Null lines | صفری خطوط |
| Osculating plane | بوسندہ مستوی |
| Parallelopiped | متوازی السطوح |

| | |
|---|---|
| Pedal | پائین |
| Potential | قوہ |
| Pulley | چرخی |
| Reaction | تعامل |
| Reciprocal | بتکافی |
| Resistance | مزاحمت |
| Resolution | تحلیل |
| Rigid | استوار |
| Roulette | گردونیسہ |
| Sag | جھوک |
| Screw-press | پیچ شکنجہ |
| Shear | جز |
| Shearing stress | جزی زور |
| Shell | خول |
| Slope | ڈھال |
| Smooth | چکنا |
| Spherical Excess | کروی اضافہ |
| Spherical triangle | مثلث کروی |
| Stable | قائم |
| Steam Engine | بھاپ انجن |
| Steel yard | تیک |
| Strut | فشاربند |
| Suspension bridge | جھولا پل |
| Tension | تناؤ |
| Tie | بندھن |

| | |
|---|---|
| Tube of force | قوت کی نلی |
| Unlike (forces) | مخالف (قوتیں) |
| Unstable | غیر قائم |
| Virial | سایت |
| Virtual work | موہوم کام |
| Wedge | فانہ |
| Wheel & axle | چرخ اور محور |
| Work function | قوتی تفاعل |
| Wrench | پیچ |